1) 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음을 증명하여라.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx$$

2) 폐구간 $[0,\ 1]$에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 $[0,\ 1]$에서 $f'(x)$가 연속일 때 다음을 증명하여라.

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \{f'(x)\}^2 dx$$

3) 폐구간 $[a,\ b]$에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 $f(a)=f(b)=0$, $\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = 1$을 만족한다. 이 때

$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$이고 $\frac{1}{4} \leq \int_a^b \{f'(x)\}^2 dx \int_a^b x^2\{f(x)\}^2 dx$ 임을 증명하여라.

Project OMPT 제작

Project OMPT 제작

<논제 해설>

1) $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2dx\int_a^b g(x)^2dx$ 뭔가 익숙한 식입니다. 이미 아는 분도 계시겠지만, 코시 슈바르츠 부등식의 적분형태입니다. 이 식은 가장 널리 쓰이는 증명법이 하나 있고, 이 외에도 몇 가지 추가적인 증명 방법들이 존재합니다. 적분 형태로 나타내어진 코시 슈바르츠 부등식의 증명법을 미리 알고 있었다면 좋았겠지만 모르고 있었다면 가장 일반적인 형태의 코시 슈바르츠 부등식에서 추론해낼 수 있는 방법을 사용하셔야 할 것입니다. 사실 첫 번째로 설명드릴 방법은 스스로 발상하는 것이 어려울 것 같습니다. 일단, 두 가지 방법 모두 소개하겠습니다.

$pf-1$) 임의의 실수 t에 관하여 $\int_a^b \{f(x)-tg(x)\}^2dx \ge 0$이 성립한다. ($\because$ 항상 양수) 이를 t에 관한 이차식으로 정리하면 $t^2\int_a^b g(x)^2dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)^2dx \ge 0$이 된다. 최고차항의 계수에 대해 두 경우로 분리하자.

① $\int_a^b g(x)^2dx = 0$ 일 경우 : $[a,\ b]$에서 $g(x)=0$이 되므로 논제의 부등식은 항상 성립.

② $\int_a^b g(x)^2dx > 0$ 일 경우 : $t^2\int_a^b g(x)^2dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)^2dx \ge 0$의 이차식이 임의의 실수 t에 대하여 성립하므로 $\frac{D}{4} = \left(\int_a^n f(x)g(x)dx\right)^2 - \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2dx\right) \le 0$이 되어야 한다. 이항하면 위의 논제가 된다.

Project OMPT 제작

$pf-2$) 코시 슈바르츠 부등식 : $\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$

$\left(\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n f(x_k)^2\right)\left(\sum_{k=1}^n g(x_k)^2\right)$에서, $\left(\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\Delta x\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n f(x_k)^2\Delta x\right)\left(\sum_{k=1}^n g(x_k)^2\Delta x\right)$이 된다.

n을 ∞로 발산시킬 때, 정적분의 정의에 의해 자명하게 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2dx\int_a^b g(x)^2dx$ 이 유도된다.

2) $f(0)=0$이고, 미분가능하다는 조건이 주어졌으므로 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$가 성립한다. 여기서, 1)번 논제에서 증명한 적분형태의 코시 슈바르츠 부등식을 사용하여 다음과 같은 과정을 유도해낼 수 있다.

$\{f(x)\}^2 = \left\{\int_0^x f'(t)dt\right\}^2 = \left\{\int_0^x 1\times f'(t)dt\right\}^2 \le \int_0^x 1^2dt\int_0^x \{f'(t)\}^2dt \le x\int_0^1 f'(t)^2dt$ ($\because [0,\ 1]$에서 $0 \le x \le 1$)

Project OMPT 제작

여기서, 양 변을 적분하면 $\int_0^1 \{f(x)\}^2dx \le \int_0^1 xdx\int_0^1 \{f'(x)\}^2dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \{f'(x)\}^2dx$ 이므로 해당 논제가 성립한다.

3) $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = \left[x\times\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{2}\{f(x)\}^2dx = -\frac{1}{2}\int_a^b \{f(x)\}^2dx = -\frac{1}{2}$ ($\because$ 문제 조건 참고할 것)

1)번 논제의 부등식에 의해, $\int_a^b \{f'(x)\}^2dx\int_a^b x^2\{f(x)\}^2dx \ge \left(\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right)^2 = \frac{1}{4}$ 를 유도할 수 있다.