(가) 1973년, Victor Klee는 ‘Art Gallery Problem'이라는 문제를 제기하였다. 한 박물관의 주인이 박물관에 경비원을 세우고, 박물관의 모든 영역을 빠짐없이 감시하려고 한다. 경호원들은 항상 제자리에 서서 사방을 둘러보기만 할 수 있다. 이 때 몇 명의 경비원이 있어야 고용비를 최소화하며, 박물관을 완벽하게 감시하고 있다고 장담할 수 있는가? (Art Gallery Problem, 1973)

(나) 비둘기집의 원리(Pigeonhole Principle)는 n+1개의 물건을 n개의 상자에 넣을 때 적어도 어느 한 상자에는 두 개 이상의 물건이 들어 있다는 원리를 말한다. 보통 비둘기와 비둘기집의 형태로 비유되어 쓰이며, '서랍과 양말'로 비유하여 '서랍 원칙' 또는 '디리클레의 방 나누기 원칙'이라고 부르기도 한다. 물론, 비둘기가 두 마리 이상 존재하는 집이 정확히 어떤 집인지는 이 증명으로 알아낼 수 없다. 가령, 한 강의실의 학생수가 357명이라고 하자. 또한 올해는 1년이 356일이라고 가정한다. 이 학생들의 생일을 조사해 보았을 때, 비둘기집의 원리에 의해 1년 중 최소 하루 이상의 날에 두 명 이상의 학생들이 생일이라는 사실을 자명하게 이끌어 낼 수 있다.

(다) 일반적으로 이산수학에서 정해진 공간 속에 포함된 원소의 최소 개수를 구하기 위한 방법으로 “삼각화 과정(Triangulation)”이라는 것을 이용한다. 이는 해당 임의의 도형을 꼭짓점과 꼭짓점끼리 연결하되, 서로 그 선들이 겹쳐지지 않도록 하여 전 영역을 삼각형으로 분할하는 방법이다. 그 이후에 대한 문제 해결 전략은 문제 상황에 따라 달라질 수 있다.

(라) “색칠하기 (coloring)” 방법은 이산수학에서 그래프 문제를 해결하는 방법 중 가장 유명한 문제라고 해도 과언이 아니다. 이는 주어진 몇 가지 색으로 구분된 영역이나 점들을 색칠하되, 인접한 영역 혹은 선으로 서로 연결된 점들은 같은 색으로 칠하지 않는 것을 원칙으로 하는 방법이다. 이 색칠하기 방법을 확장한 문제 중 가장 유명한 것으로 4색 문제’가 있다. 구드리라는 이름의 대학생이 1852년 영국 지도를 색칠하다 4가지 색깔만으로 모든 인접지역을 다르게 구분할 수 있다는 사실을 깨닫고 자기 스승에게 증명이 가능한지 문의한 이후 100년 넘게 수학계의 줄기찬 도전을 물리친 문제다. 난제가 풀린 것은 1976년이다. 미국 일리노이 대학의 K 아펠, W 하켄 교수가 컴퓨터를 1200시간 이상 돌려 귀납법 증명을 완성했다.

[1] 임의의 모든 다각형에 대하여 삼각화 과정을 진행시킬 수 있다는 사실을 증명하여라. (25점)

[2] x개의 변으로 이루어진 다각형의 각 꼭짓점들을 $x-3$개의 대각선으로 서로 겹치지 않게 연결하여, 적당히 삼각화 과정을 진행하였을 때, 각 꼭짓점들을 3가지 색으로, 동일 색은 서로 인접하지 않게 색칠할 수 있다는 사실을 증명하여라. (25점)

[3] 제시문 (가)에 주어진 Art Gallery Problem에 대한 논리적인 답안을 도출하여라. (50점)