01. [행렬]

$sol)$

$A+B=\begin{pmatrix} 2+a & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \therefore\ a=4$

02. [삼각함수]

$sol.1)$

$tan2\theta = \dfrac{2tan\theta}{1-tan^2\theta} = \dfrac{2\sqrt{5}/5}{1-(1/5)} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$1+tan^2 2\theta = sec^2 2\theta = \dfrac{9}{4} \qquad \therefore\ cos2\theta = \dfrac{2}{3}$

$\because tan\theta > 0, tan2\theta > 0 \ \rightarrow\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ or $\pi < \theta < \dfrac{5\pi}{4}$

$\rightarrow \cos 2\theta > 0$

(실제론 보기가 전부 양수이므로 부호는 신경 안 쓰고 넘어가도 됩니다)

$sol.2)$ 바이어슈트라스 치환

$\therefore\ cos2\theta = \dfrac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta} = \dfrac{1-(1/5)}{1+(1/5)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

03. [암산해요, 우리]

$sol)$

$a=3, b=2 \ \rightarrow\ a+b=5$

04. [계산]

$sol.1)$ 정상인

$a_n = 2+(n-1)d$라 하면, $a_9 = 3a_3$에서 $2+8d = 3(2+2d)$ 즉, $d=2$이고 따라서, $a_n = 2n \ \rightarrow\ a_5 = 10$

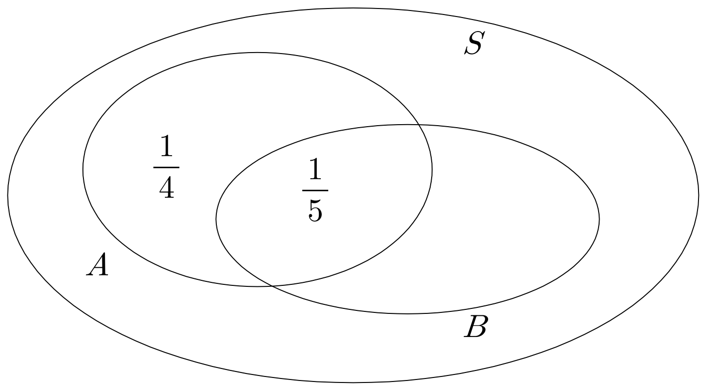
$sol.2)$ 쓸데없이 의미를 부여하면

'등차수열은 n에 관한 일차식인데, $a_9 = f(9) = 3f(3) = 3a_3$이네?'
'설마 $f(mx) = mf(x)$?'
'그렇담 f는 원점을 지나는 일차함수고, 점 $(1,2)$를 지나니까'
'옳거니~! $f(n) = a_n = 2n$이면 되겠네.'

05. [벤 다이어그램]

$sol)$

여집합 기호가 많아서 처리하기 귀찮으니, 수치를 맞춰가며 벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같습니다.



그러면 $P(A^c) = 1-P(A) = 1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5} = \dfrac{11}{20}$

06. [계산 문제]

$sol)$

공간에서 직선과 직선이 수직하기 위해선 각각의 직선끼리 방향벡터를 내적하면 0이 되어야 합니다. 직선 AB의 방향벡터는 $(5,5,a-3)$이고, 다른 직선의 방향벡터는 $(1,-1,1)$이고, 내적해보면 $a=3$임을 알 수 있습니다.

07. [간단한 삼각함수 공식]

$sol)$

$f(x) = 1+cos2x+ksin2x-1 = \sqrt{k^2+1}\,sin(2x+\alpha)$
그런데, 여기서 정의역이 모든 실수이므로 편하게 생각해도 되고, 굳이 $tan\,\alpha = \dfrac{1}{k}$이란 추가 조건을 언급해 줄 필요도 없이 보기 중에서 $k=3$을 찾으면 됩니다. 수능은 제한 시간이 중요하니까요.

08. [Are you ready?]

$sol.1)$

주어진 이차방정식을 풀면 $m_1 = 1, m_2 = \dfrac{1}{2}$이고, (혹은 $m_1 = \dfrac{1}{2}, m_2 = 1$라 놓고 풀어도 답은 바뀌지 않으므로 일반성을 잃지 않습니다.) $y^2 = 8x$에 두 직선 $l_1 : y = x+n_1$, $l_2 : y = \dfrac{1}{2}x + n_2$가 접하도록

① 판별식으로 풀든지(계산이 제법 있으나 능숙하게 처리 가능),
② 미분계수로 풀든지(계산이 더 짧을뿐더러, 암산도 가능해짐),
③ 감각적으로 대충 찍어서 찾아버리든지(틀릴 수도 있음-_-;)
해서 풀면 $n_1 = 2, n_2 = 4$가 나오고, 두 직선 l_1, l_2의 교점을 찾으면 $(4,6)$이 나오므로 $x=4$가 답입니다.

$sol.2)$

올해 평가원 시험에서 기울기가 m인 타원의 접선식이 아주 요긴하게 쓰였었는데, 막상 수능에는 기울기가 m인 포물선의 접선식이 나왔네요. $y^2 = 4px$라는 포물선의 표준형에 대하여 기울기가 m인 접선은 $y = mx + \dfrac{p}{m}$이고, $p = 2, m_1 = 1, m_2 = \dfrac{1}{2}$을 대입해서 구하면 답은 똑같이 나옵니다.

(그렇다고, 이 문제를 통하여 *'평가원은 다양한 풀이를 존중하는 구나. 이런 신기한 공식들 많이 많이 외워야겠다!!'* 하시면 안 됩니다. 출제자가 진정으로 변별력을 갖고서 물어보고자 하는 수학적인 내용은 이런 시시한 것들이 아닙니다.)

※ 이 시험이 끝이 아닌 분들을 위하여

그런데, $x^2 = 4py$의 꼴의 포물선의 표준형에 대하여 기울기가 m인 접선은 $x = my + \dfrac{p}{m}$이 아니고, (역함수에 대한 마인드, 기울기 계산 등을 통해) $x = \dfrac{y}{m} + pm$를 구한 후 다시 정리하면 최종적으로 $y = m(x - pm)$가 됩니다. 아마 내년 이후 시험 중에 이렇게 패러디해서 물어보는 문제가 등장할지도 모르겠네요.

09. [흔한 문제]

$sol)$

숫자 4를 기준으로 경우를 나누면 됩니다.

4를 한 번 ; ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$

4를 사용 안 하는 경우 ; ${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$

따라서 $15 + 21 = 36$

10. [출제자 曰 : 잠시 낚싯대 좀 찾을테니 기다려요~]

$sol.1)$

문제가 좀 너무 했네요 ㅠㅠ 하나씩 후보에 해당하는 숫자들 넣어보면 $x = -4, -1, 1, 3, 4$가 됩니다.

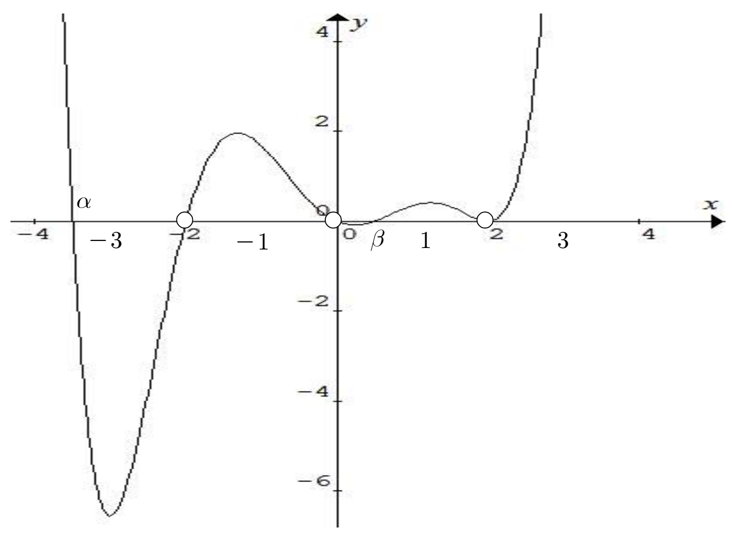
$sol.2)$

$\dfrac{g-f}{f} \le 0$에서, $f(x)$를 삼차함수라 가정하면(그래도 일반성을 잃지 않음 = 문제 답이 달라지는 일은 없으니 걱정 안 해도 됨),

$\dfrac{l(x-\alpha)(x-\beta)(x-2)}{-kx(x+2)(x-2)} \le 0 \quad (k > 0, l > 0)$

$\Leftrightarrow x(x+2)(x-\alpha)(x-\beta)(x-2)^2 \ge 0 \quad (x \ne 0, \pm 2)$

$\therefore\ x = -4, -1, 1, 3, 4$



11. [...]

$sol)$

$f(n) = \dfrac{1}{n(n+1)} \ \rightarrow\ \dfrac{1}{f(4)} = 20$

$g(n) = 2 - \dfrac{1}{n} \ \rightarrow\ g(10) = \dfrac{19}{10}$

12. [기본에 충실하게]

$sol)$

f가 이차함수이니 모든 구간에서 연속이라서 문제 되지 않지만 g는 구간 $(-1, \infty)$ 중 $x = 0$에서만 유일하게 불연속이네요. 따라서, $f(x)g(x)$는 $x = 0$에서의 연속성만 보장된다면 구간 $(-1, \infty)$에서 연속이라 할 수 있겠죠? 즉, $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$이면 됩니다.

이제 $f(x) = x(x-k)$라 하면 $f(0)g(0) = 0$이 되므로,

$0 = \lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x(x-k)}{\ln(1+x)} = -k$에서 $k = 0$이므로

$f(x) = x^2$이고 $f(3) = 9$가 됩니다.

13. [손 좀 풀었죠^^?]

$sol)$

가볍게 다른 교점이 $(3, 2)$임을 찾은 후에, 구하라는 부분을 잘 확인하여 식을 세워서 풀면 됩니다.

$\pi\displaystyle\int_0^2 \{(1+2y^2) - (y+1)^2\}dy = \pi\int_0^2 (y^2 - 2y)dy = \dfrac{4\pi}{3}$

원뿔대의 부피 공식을 이용하든, 이차함수 면적 공식을 이용하든, 아니면 쌩으로 계산하든, 자신에게 최적화된 방법을 택해서 풀면 됩니다.

14. [발상의 전환]

$sol)$

직선을 회전하라고 요구하고 있는 듯 해도, 초점 F를 반대 방향의 각으로 역회전시킨 점이 직선 l을 지난다고 식을 세우면 간단해 집니다.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta \end{pmatrix} \text{에서}$$

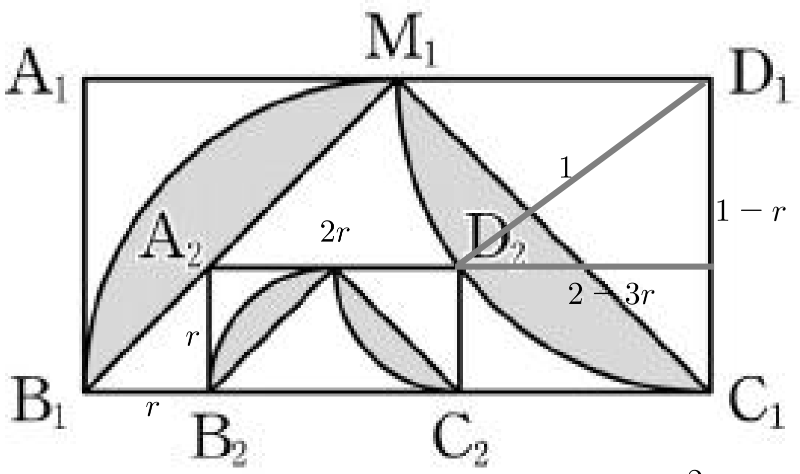
$-\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta - \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta - 1 = 0$를 정리하면

$\cos\theta + \sin\theta = -\sqrt{\frac{2}{3}}$이고, 이때 양변을 완전제곱하면

$\therefore\ 1 + \sin 2\theta = \frac{2}{3} \ \rightarrow\ \sin 2\theta = -\frac{1}{3}$

15. [보조선만 잘 그으면 끝]

sol)



$1 = (2-3r)^2 + (1-r)^2 = 10r^2 - 14r + 5 \ \rightarrow\ r = \frac{2}{5}$

$S_1 = \frac{\pi}{2} - 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{S_1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{25}{21}S_1$

16. [수능에 등장하는 낚시 문항의 좋은 예]

sol)

정답률이 상당히 낮았던 문제였습니다. (가) 조건이 결코 $P(X=x)$가 아니라 $\int_0^x P(X=t)dt = kx^2$이므로, 양변을 미분하면 비로소 $P(X=x) = 2kx$가 나옵니다. 이때, 다시 적분할 필요 없이 간단하게 $\int_0^a P(X=t)dt = ka^2 = 1$을 얻고, (나) 조건으로부터 $\int_0^a xP(X=x)dx = \int_0^a 2kx^2 dx = \frac{2}{3}ka^3 = 1$이 되어,

$a = \frac{3}{2}, k = \frac{4}{9}$임을 알 수 있습니다.

17. [ㄱ,ㄴ 조건을 최대한 연관지어 ㄷ 풀기]

sol)

$AB + A^2B = (A + A^2)B = E = B(A + A^2)$이므로 ㄱ, ㄴ은 모두 참입니다. ㄷ이 어려운데, 아마 ㄷ이니까 맞겠지? 해서 맞출 수도 있고, 답 개수의 법칙으로 풀 수도 있지만, 제대로 풀어 보겠습니다! 문제에서 주어진 두 개의 식을 보면, $AB + A^2B = E$에는 $A + A^2$이라는 덩어리(?!)가, $(A-E)^2 + B^2 = O$에는 $(A-E)^2$이라는 덩어리가 있네요. 그리고, $A^3 - A = (A + A^2)(A - E)$로 볼 수 있으므로, ㄱ의 역행렬 조건과 ㄴ의 교환법칙 조건을 이용하면, $(A-E)^2 + B^2 = O$의 양변에 $(B^{-1})^2 = (A + A^2)^2$을 가하면 $(A^3 - A)^2 + E = O$가 됩니다. 따라서 ㄷ은 참.

18. [직관적으로 보인다면 그렇게]

sol.1)

$(n-1)\pi < a_n < (n-1)\pi + \frac{\pi}{2}$이고, 샌드위치 정리를 적용코자 부등식을 변형해가면

$\frac{n-1}{n}\pi < \frac{a_n}{n} < \frac{n-1}{n}\pi + \frac{\pi}{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\pi \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\pi + \frac{\pi}{2n}\right)$

즉, $1 \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \le 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 1$

sol.2)

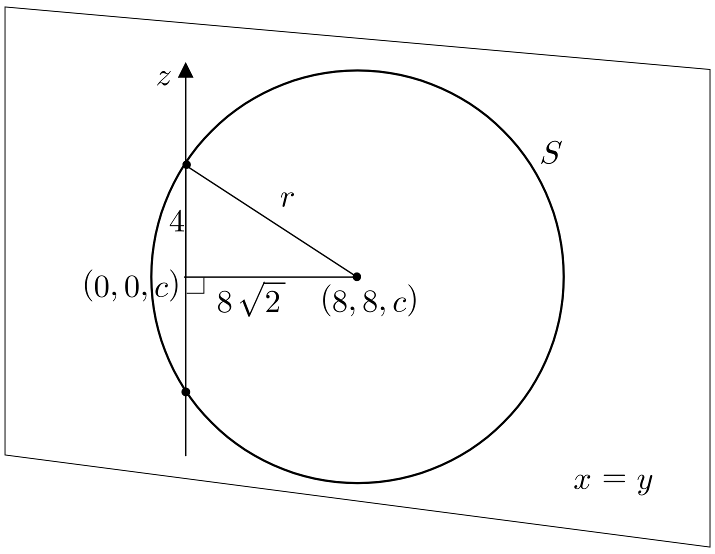
'$n\to\infty$이면, $a_n \to \frac{2n-1}{2}\pi$ 잖아?'

'$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 1$이군'

19. [공간좌표의 설정]

sol)

문제에서 각기 언급한
'중심의 x, y, z좌표가 모두 양수',
'구 S가 x, y축에 접하고',
'구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π'
라는 정보를 결합하면, 구의 중심의 좌표는 $(8, 8, c)$라 할 수 있습니다. 이때, 구 S의 방정식을 $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-c)^2 = r^2$이라 두면, '$z$축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8'이라는 정보로부터 다음의 단면도를 하나 더 생각해야 겠네요. (평면 $x = y$로 자른 단면입니다.)



따라서, 피타고라스 정리에 의하여 $r=12$임을 알 수 있습니다.

20. [오랜만에 등장한 지표가수 문제!]

sol)

$\log x = f(x)+g(x)$에서 $f(x), g(x)$가 각각 지표와 가수라 하였으므로 편의상 $f(x)=n, g(x)=\alpha\ (0 \le \alpha < 1)$이라 하겠습니다. 그러면 $\log x > 0$인 10의 배수로
$3n+5\alpha = 10, 20, 30, 40, \cdots$ 가 됩니다.
$3n+5\alpha=10$일 때, $n=2,3$이 가능하고, (그 때마다 α는 유일하게 결정되지만, 필요한 순간에만 α를 구해도 충분하겠죠?)
$3n+5\alpha=20$일 때, $n=6$이 가능하며,
$3n+5\alpha=30$일 때, $n=9,10$이 가능하고,
$3n+5\alpha=40$일 때, $n=12,13$이 가능합니다.
따라서, $\log a = 3+\frac{1}{5}, \log b = 12+\frac{4}{5}$이므로 $\log ab = 16$입니다.

21. [늘 나오던 문제 + 대칭성(기함수)]

sol)

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$를 미분하면 $f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$이고,

따라서, $xf(x+1)=\frac{2}{\pi}xf'(x)$이고,

$$\int_0^1 xf(x+1)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 xf'(x)dx = \frac{2}{\pi}\left\{f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right\}$$

한편, $f(1)=1$이고,

$f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)dt = -f(1) = -1$로부터

$\int_0^1 f(t)dt = \frac{2}{\pi}$를 얻으므로, 따라서 구하고자 하는 값은

$$\therefore \pi^2\left\{\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right\} = 2(\pi-2)$$

22. [잠시 쉬어가기]

sol)

$f'(x)=15e^{3x-3} \rightarrow f'(1)=15$

23. [조건부 확률]

sol.1) **조건부 확률은 표본 공간이 축소된 것**

$p=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$에서 $100p=60$

sol.2) **베이즈의 정리**(내용은 이미 여러분들이 아는 것)

W: 참가한 동호회 회원이 여성일 사건
C: 참가한 동호회 회원이 마라톤을 완주했을 사건
이라 하였을 때, 구하고자 하는 확률 p는

$$P(C|W)=\frac{P(C\cap W)}{P(W)}=\frac{P(C)P(W|C)}{P(C)P(W|C)+P(C^c)P(W|C^c)}$$

$$=\frac{\frac{35}{50}\cdot\frac{9}{35}}{\frac{35}{50}\cdot\frac{9}{35}+\frac{14}{50}\cdot\frac{6}{14}}=\frac{9}{9+6}=\frac{3}{5}$$

24. [응용 없음]

sol)

$\sqrt{2x^2-6x}=t$라 치환하면 주어진 무리방정식은 $t=\frac{1}{2}t^2-4$ 즉,
$t^2-2t-8=0$에서 $t=4$가 유의미한 근이 되고, 이는 다시
$\sqrt{2x^2-6x}=4$에서 $2x^2-6x=16 \rightarrow k=-8,\ k^2=64$

25. [계산]

sol)

$2=1-k\log R^{\frac{4}{23}} \rightarrow k\log R = -\frac{23}{4}$

$3=1-k\log R^{a-1}=1+\frac{23}{4}(a-1) \rightarrow a=\frac{8}{23}+1$

$\therefore 23a=31$

26. [모비율, 안 나올 줄 알았지?]

$sol.1$) **공식을 외우고 있는 경우**

$$0.098 = 2\times 1.96 \times \sqrt{\frac{pq}{n}} = 2\times 1.96\times \frac{2}{5}\times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\therefore\ \sqrt{n} = 16 \ \rightarrow\ n = 256$

$sol.2$) **공식을 안 외우고 있던 경우**

중앙공원을 이용한 주민의 수 X에 대하여, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{4}{5}\right)$를 따르고, n이 크다는 전제하에 다시 확률변수 X는 정규분포 $N\left(\frac{4n}{5}, \left(\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)^2\right)$을 근사적으로 따른다고 할 수 있습니다. 이때, n과 n^2으로 평균과 분산을 나누면, 즉 $\frac{X}{n}$에 관한 평균과 분산이 구하고자 하는 모비율에 관한 식이 됩니다. 이때 표본비율 $\frac{X}{n}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{4}{5}, \left(\frac{2}{5\sqrt{n}}\right)^2\right)$를 따른다고 할 수 있고, 이때, 신뢰구간의 길이 식에 맞춰보면 $0.098 = 2\times 1.96\times \frac{2}{5\sqrt{n}}$로 $n = 256$이 나옵니다.

27. [이차곡선의 성질]

sol)

타원의 정의에 의하면 평면 상의 두 초점에서 이르는 거리의 합이 일정한 점들의 자취이므로, $\overline{\mathrm{FP}}$ 대신에 $10-\overline{\mathrm{F'P}}$를 대입하면 $\overline{\mathrm{AP}} - \overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{AP}} - (10-\overline{\mathrm{F'P}}) = \overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{F'P}} - 10 \ge 1$에서 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{F'P}} \ge 11$를 이끌어 낼 수 있습니다. 최솟값은 세 점 $\mathrm{A}, \mathrm{P}, \mathrm{F'}$가 순서대로 한 직선상에 놓여있을 때이고, 따라서 $4^2 + a^2 = 11^2$을 풀면 $a^2 = 121 - 16 = 105$가 나옵니다.

28. [그냥 주는 문제]

sol)

$S(\theta)$를 삼각형 ADP 넓이에서 삼각형 ABP의 넓이를 빼는 방식으로 취해주면 되는데, 끼인각 $\angle DAP$와 한 변 $\overline{AP}$를 공유하고 있으므로 계산이 간단해지겠네요. $sin\frac{\theta}{2} = \frac{2}{\overline{AC}}$에서

$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AP} = \frac{2}{sin\frac{\theta}{2}}$이고,

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{sin\frac{\theta}{2}} - 4\right)\frac{2}{sin\frac{\theta}{2}}sin2\theta = 2\frac{\left(1-2sin\frac{\theta}{2}\right)sin2\theta}{sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\{\theta\times S(\theta)\} = \lim_{\theta\to 0}\frac{2\theta\left(1-2sin\frac{\theta}{2}\right)sin2\theta}{sin^2\frac{\theta}{2}} = 16$$

29. [여러분들이 원하던 공간도형 킬러 문제가 이런게 맞습니까?]

$sol.1$) **수식의 조작 - 삼각치환**

우선 구하라는 벡터를 좀 더 의미를 파악하기 쉽도록 변형하면

$2\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|^2$

$= \left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|^2\right) + \left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|^2\right) \cdots (*)$ 가 됩니다.

그리고, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}$가 이루는 예각의 크기를 α라 하고, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}$가 이루는 예각의 크기를 β라 하면, $\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 cos^2\alpha$가 되고, $\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 cos^2\beta$가 됨을 이용해서, 식 $(*)$는 다시 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2(sin^2\alpha + sin^2\beta) \cdots (**)$로 깔끔하게 바꿀 수 있겠죠? 이때, 최댓값을 구하라고 하고 있으니 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 지름이 되도록 4로 잡아주면 결국 $sin\alpha, sin\beta$에 대한 식을 세워서 해석하면 되겠네요.

한편, ***직선의 방향벡터와, 평면의 법선벡터를 내적하면 코사인 값이 아니라 사인에 대한 값***으로 정리된다는 점에 주의해서, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 4(a,b,c)$의 방향벡터 성분(크기가 1)인 (a,b,c)와 각각의 평면의 법선 벡터 $(0,1,0), (0,1,\sqrt{3})$가 이루는 사인값을 구해보면 $sin\alpha = b, sin\beta = \frac{b+\sqrt{3}c}{2}$가 나오고, 식 $(**)$는

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2(sin^2\alpha + sin^2\beta) \le 16\left\{b^2 + \left(\frac{b+\sqrt{3}c}{2}\right)^2\right\}$ 로 바뀝니다.

여기서 까다로운데, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 4(a,b,c)$의 방향벡터 (a,b,c)는 사실 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 x, y, z축과 이루는 각에 대한 코사인 값으로 방향코사인이 되고, $-1 \le a,b,c \le 1$이고, $a^2+b^2+c^2 = 1$을 만족합니다. 이때, $b^2 + \left(\frac{b+\sqrt{3}c}{2}\right)^2$가 최대가 되려면 $a = 0$이어야 하고, 그때, $b^2 + c^2 = 1$을 만족하므로 다시 $b = cos\phi, c = sin\phi$로 치환하면

$$b^2 + \left(\frac{b+\sqrt{3}c}{2}\right)^2 = \frac{5b^2 + 2\sqrt{3}bc + 3c^2}{4}$$

$$= \frac{2b^2 + 2\sqrt{3}bc + 3}{4} = \frac{1}{4}(1 + cos2\phi + \sqrt{3}sin2\phi + 3)$$

$\le \frac{1}{4}(4+2) = \frac{3}{2}$가 되어 최종적으로 구하고자 하는 값은

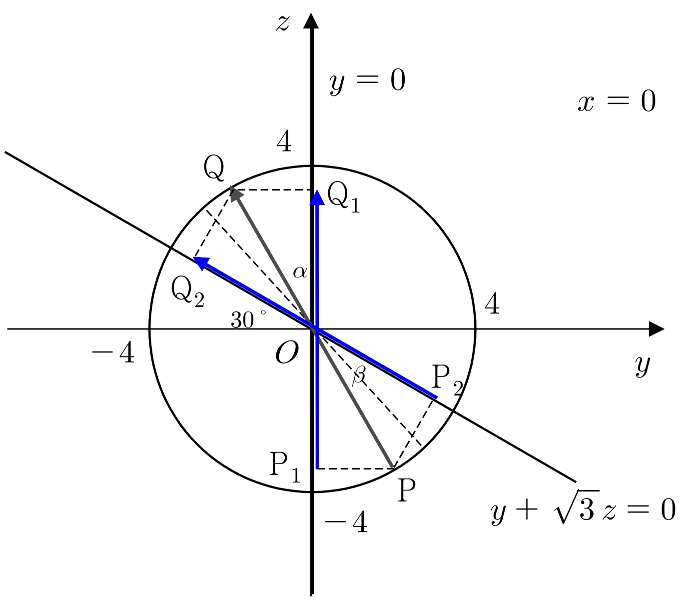
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2(sin^2\alpha + sin^2\beta) \le 16\left\{b^2 + \left(\frac{b+\sqrt{3}c}{2}\right)^2\right\}$$

$$\le 16\cdot\frac{3}{2} = 24$$ 가 됩니다.

$sol.2$) **단면화**

$2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2=\cdots=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2\left(sin^2\alpha+sin^2\beta\right)$

$\le 16\left(sin^2\alpha+sin^2\beta\right)$ 까지 왔다고 가정합시다. 이제 α,β를 관찰하여야 하는데, 그러고 보니 평면을 적절하게 평행이동 하여도 α,β가 바뀌지 않겠네요? 그러므로, 각각의 평면이 모두 구의 중심인 원점을 지나도록 평행이동 하면 $y=0, y+\sqrt{3}z=0$으로 바뀝니다. 이때 평면 $x=0$으로 단면화 해서 관찰하면



그러면 $\alpha+\beta=60^\circ$ 가 되고, (직관적으로 $\alpha=\beta=30^\circ$ 일 때 답이 나올 것 같지만, 그 때가 답이 아닙니다!)

$sin^2\alpha+sin^2\beta=sin^2\alpha+sin^2(60^\circ-\alpha)$

$=sin^2\alpha+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha-\dfrac{1}{2}sin\alpha\right)^2$

$=\dfrac{5}{4}sin^2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha cos\alpha+\dfrac{3}{4}cos^2\alpha$

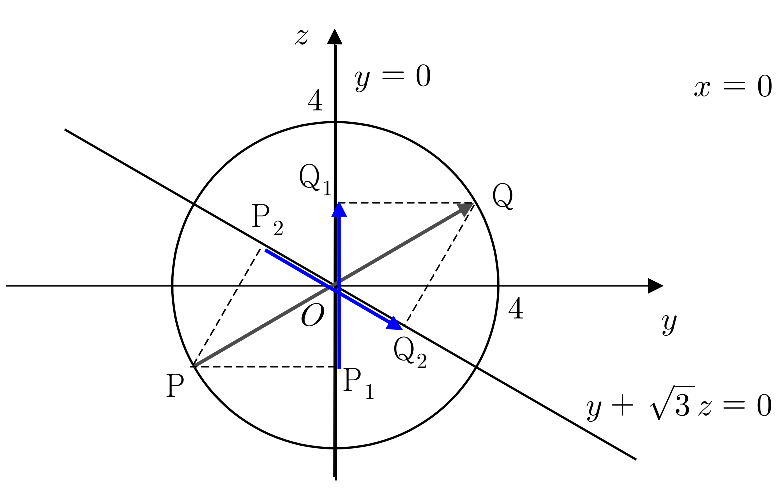
$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}sin^2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha cos\alpha$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1-cos2\alpha-\sqrt{3}sin2\alpha}{4}\le\dfrac{3}{4}+\dfrac{1+2}{4}=\dfrac{3}{2}$가 되어,

$2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2=\cdots=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2\left(sin^2\alpha+sin^2\beta\right)$

$$\le 16\left(sin^2\alpha+sin^2\beta\right)\le 16\times\frac{3}{2}=24$$

즉, $\alpha=-60^\circ, \beta=120^\circ$ 인 상황에서 최댓값이 발생하며, 한 번 그 순간을 포착해보면 다음과 같습니다.



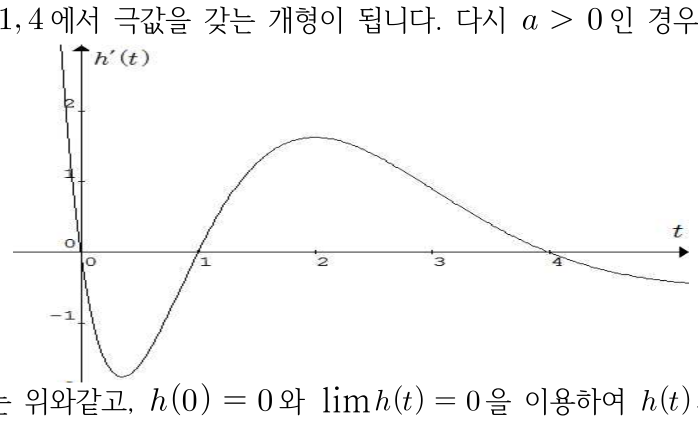
30. [착실한 해석과 정직한 계산으로]

sol)

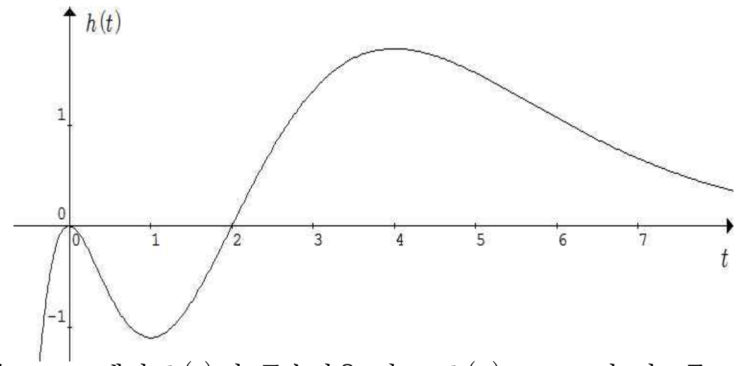
$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$라 놓고서 $g(x)=f(x)e^{-x}$의 이계도함수까지 구해야겠네요. $g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$이고, $g''(x)=\{f''(x)-2f'(x)+f(x)\}e^{-x}$에서, $f''(x)-2f'(x)+f(x)$부분, 즉 x에 대한 이차식이 변곡점을 갖는 꼴이어야 하므로 $f''(x)-2f'(x)+f(x)=a(x-1)(x-4)$가 되도록 양변의 계수를 비교하여 a,b,c의 관계를 찾아주면, $f(x)=ax(x-1)$가 되고, $g(x)=ax(x-1)e^{-x}$가 나옵니다.

한편, 점 $(0,k)$에서 그은 접선은 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$이고, 점 $(0,k)$를 지난다 하였으므로 $k=g(t)-tg'(t)$로 정리할 수 있고, 결국 $y=g(t)-tg'(t)=h(t)$에 대하여 $y=k$가 교점이 세 개가 되는 k의 범위가 $-1<k<0$이 되도록 a값을 찾아주면 됩니다.

$h'(t)=g'(t)-g'(t)-tg''(t)=-tg''(t)=-at(t-1)(t-4)e^{-t}$로 $t=0,1,4$에서 극값을 갖는 개형이 됩니다. 다시 $a>0$인 경우



도함수는 위와같고, $h(0)=0$와 $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=0$을 이용하여 $h(t)$의 개형을 그려보면



이때, $t=1$에서 $h(t)$가 극솟값을 갖고, $h(1)=-1$이 되도록 a값을 찾아주면 되겠네요.

$h(1)=g(1)-g'(1)=0-f'(1)e^{-1}=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$이고,

따라서, $g(x)=ex(x-1)e^{-x}$가 됩니다.

고로, $g(-2)\times g(4)=6e^3\times 12e^{-3}=72$가 정답입니다.

반면에, $a<0$의 경우는 다음과 같이 뒤집어진 개형이 되어 $-1<k<0$조건을 만족할 수 없습니다.