

전 이렇게 부릅니다.

“ 하란대로 한다 + 직접 해본다 ”

무슨 말인가?

ㄱ 을 보는 순간, 세계의 향이 곱해져있으니, 하란대로 곱하고.

곱을 직접해보아, 양변을 비교합니다.

곱을 직접하면,

$$A - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$$

가 되죠. 바로 참임을 압니다.

이미 ㄱ, ㄴ, ㄷ 유형에 통달하신 분들은

이 “ 직접 ” 해보는 행동을 무의식중에 합니다. 아무 의식없이 하는것이죠.

그래놓고 “ 일정한 기준이 없다 ” 라고 하십니다.

하지만, 이 “ 직접 ” 해보는 행동이 이 유형의 풀이의 80%를 차지합니다.

이 “ 직접 ” 해보는 풀이 속에 우리가 교과서에서 배운

행렬의 합, 차, 곱 성질들이 쓰이니깐요.

그걸 자유자재로 활용할 수 있는지 묻는 문항이기에,

직접 해보아야만 풀리게끔 내는겁니다.

자 정리. 첫번째 풀이법 :

“ 하란대로 한다 + 직접 해본다 ”

ㄴ 을 보겠습니다. 가독성을 위해 문제를 다시 가져오죠.

이차정사각행렬 A, B 가 역행렬을 가질 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$

ㄴ. $AB^2 = E$ 이면 $B^{-1}A^{-1} = B$ 이다.

ㄷ. $AB^2 = B^2A$ 이면 $AB = BA$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

AB^2 이 등장하는군요. 행렬의 제곱에서 우리가 배운 교과개념이 있죠.

$$B^2 = BB, (AB)^2 = ABAB$$

여기에 입각해, 전 이런풀이를 제시합니다.

“ 제곱은 늘려라 ”

물론, 모든 기술 분석해보면, 늘린다고 다 풀리고 이런건 아니지만,

이 늘리는 행동 하나가 풀이의 힌트를 가져옵니다.

다음 풀이가 쉽게 보인다 이거죠.

ㄴ 에 적용해 보면,

$$AB^2 = ABB,$$

$$\rightarrow BB = A^{-1}$$

$$\rightarrow B = B^{-1}A^{-1}$$

즉, 참.

다시,

“ 제곱은 늘려라 ”

뭐 이 예제 문제는 쉽지만, 다음같은 문제를 보면 얘기가 다르죠.

두 이차정사각행렬 A, B 가 $A^2 = E, B^2 = B$ 를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. 행렬 B 가 역행렬을 가지면 $B=E$ 이다.

ㄴ. $(E-A)^5 = 2^4(E-A)$

ㄷ. $(E-ABA)^2 = E-ABA$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀어보세요. ㄴ, ㄷ 모두 직접해보기 + 제곱은 늘린다. 로 쉽게, 명확하게

해설가능하지만, 전 ㄷ만 풀이해보죠.

두 이차정사각행렬 A, B 가 $A^2 = E, B^2 = B$ 를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. 행렬 B 가 역행렬을 가지면 $B=E$ 이다.
 ㄴ. $(E-A)^5 = 2^4(E-A)$
 ㄷ. $(E-ABA)^2 = E-ABA$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ. $(E-ABA)^2 = (E-ABA)(E-ABA)$
 $= E - 2ABA + ABAABA$
 $= E - 2ABA + ABBA$
 $= E - 2ABA + ABA$
 $= E - ABA$

(왜냐하면, $A^2 = E, B^2 = B$)

뭐한거죠? 제곱이니 **늘렸고**, 그 후 **직접** 곱했습니다. 참 쉽네요.

아까 문제 계속 볼게요.

이차정사각행렬 A, B 가 역행렬을 가질 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$
 ㄴ. $AB^2 = E$ 이면 $B^{-1}A^{-1} = B$ 이다.
 ㄷ. $AB^2 = B^2A$ 이면 $AB = BA$ 이다

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ에 제곱이 보이니, 풀어볼게요.

$$AB^2 = B^2A, ABB = BBA$$

음, 그런데,

$$ABB = ABB$$

오로지 이것만으로,

$$AB = BA$$

이걸 알아낼 수 있나요??

없습니다. 절대로

또한, 여러분이 교과서에서 배운 교과개념 이내에서도 증명해낼 수 없습니다.

전 이걸 이렇게 해석합니다.

“ 근거가 없으면, 틀린다. ”

여기서, 틀린다는 것은, 저 \Leftarrow 이 무조건 맞는게 아니란겁니다.

\Leftarrow 자체가 틀린건 아닙니다. \Leftarrow 이 맞을수도, 틀릴 수도 있으나,

그걸 맞게하는, 혹은 그걸 틀리게 하는 **“ 근거 ”**가 부족하단 얘깁니다.

마치 이차방정식에서 주어진 식이 하나뿐이 없는, 그런 상황인거죠.

물론, ㄱ, ㄴ, ㄷ 외에 처음 문제 시작할 때 행렬 A에 관한

정보가 주어졌으면,

그 정보를 필사적으로 이용하여 저 \Leftarrow 을 증명하려 애써야 합니다.

그런데도 증명이 안되면, 그제서야

아, 근거가 부족하군. 틀리다 이건.

하는 겁니다.

교육청 풀이마냥 반례제시하고 끝내는게 아니구요.

반례 다 외우게요? ?설마?

반례 만드는법도 있던데

ㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋ

자 계속해서 개념 배워볼게요. 지금 6시 되는데, 7시에 저녁약속 있어서..

아무튼, 다음 예제 볼게요.

0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 두 행렬 A, B 를 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ 이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $(A-B)^2 = abE$
 ㄴ. $A^{-1} = 2E - A$
 ㄷ. $A + A^{-1} = B + B^{-1}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 두 행렬 A, B 를 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ 이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $(A-B)^2 = abE$
 ㄴ. $A^{-1} = 2E - A$
 ㄷ. $A + A^{-1} = B + B^{-1}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

문항 해설 전에 개념부터 보고 가시죠.
 우린 행렬을 배울 때, 두개의 큰 틀로 배웁니다.

첫째 : 행렬 " 자체 " 를 다루는 개념.
 ex) $AX = E$ 면 A 의 역행렬은 X 다.

둘째 : 행렬 " 성분 " 을 도입하는 개념.
 ex) 행렬의 곱셈에서의 성질을 설명할 때.

그초?
 전 이걸 문제풀이에 가져옵니다.
 즉, 문제풀때도, 이 두개의 큰 틀로 나뉜다 이 말입니다.
 예제보면, 문제의 시작에 행렬 A 에 성분을 도입합니다.
 저 순간 이 문제는 행렬의 " 성분 " 을 도입하여 푸는 문항이란 애깁니다.
 그래서 ㄴ, ㄷ 을 풀면서 행렬자체를 가지고 노는 것이 아니라
 바로 행렬의 "성분을 도입"하고 저 식을 "직접 해봐서" 정답인지 오답인지를
 가려내야합니다.
 다음 문항 볼까요?
 아, 옆 쪽에서 볼게요.

두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 $AB - BA = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ 라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이면 $ps - qr = 0$ 이다.
 ㄴ. 모든 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 $p + s = 0$ 이다.
 ㄷ. 행렬 $AB - BA$ 가 영행렬이면 B 는 A 의 역행렬이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

시작할 때 " 성분 " 을 도입했죠?
 즉, 이 문제를 해결할 때는 성분도입해서 푸는 것이 주된 풀이라는 얘기입니다.
 ㄴ을 보면,
 모든 A, B 에 대해서 $p + s = 0$ 을 만족하나 몰랐으면,
 정말 "주지않고" 바로 A, B 를 임의의 행렬성분을 도입하여 증명하면 됩니다.
 이 "주지않고"가 중요합니다.
 저도 그렇고 여러 괴수분들도 그렇고,
 수학 B형 30문제를 50분 안쪽으로 돌파하는 분들은,
 문제를 보고 반응하는 그 반응속도가 정말 짱습니다.
 보자마자 풀이가 머릿속으로 줄줄 흐르고 펜이 앞선다는 거지요.
 어쩔텐 펜 대기도 전에 답이 나오기도 합니다.
 머리가 똑똑한걸까요?
 아뇨. 그냥 반복에 의한 효율상승효과일 뿐입니다.
 평상시 풀어왔던대로 수능도 그냥 푸는거죠 뭐.
 똑같습니다.
 여러분이 문제풀 때 성분도입으로 시작하는 문제를 보고
 성분도입하여 풀이를 써내려가도록 남은 기간 동안 연습하면,
 수능날 정말 "주지않고" 저 풀이를 시전할 수 있습니다.
 잠깐 얘기가 흘렀지만 수학 B형에서 중요한 건 이겁니다.
 몰라서 틀려요 여러분들이?
 자꾸 뭘 더 배우려 들지말고,
 이미 배운것들을 틀을 맞춰 정리하고, 무한복습하여 체화시키세요.

잡소리가 많았네요 ^^; 다음 예제 봅시다.

이차정사각행렬 A 가 $A^2 + A = 3E$ 를 만족할 때, $A - 3E$ 의 역행렬은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}(A + 3E)$
 ② $\frac{1}{3}(A - 3E)$
 ③ $\frac{1}{3}(A + 3E)$
 ④ $-\frac{1}{9}(A - 4E)$
 ⑤ $-\frac{1}{9}(A + 4E)$

\neg, \wedge, \vee 유형은 아니지만, 그 전에 중요한 개념 설명할 것이 있어서. 흠.

우리가 역행렬의 정의를 배울 때,

어떤 행렬 A 에 X 를 곱했을 때, E 가 나오면. 그 X 는 행렬 A 에 역행렬이다.

식으로 배웠습니다.

그럼, $A - 3E$ 의 역행렬은 어떻게 구하죠?

정의대로 풀면 됩니다.

$$(A - 3E)(X) = E.$$

그럼 이 X 에 무얼넣을지, 즉 $A + 3E$ 에 무얼 곱할지 어떻게 알까요?

자 밑줄.

“ 조건에 근거하여 ”

조건을 보면, $A^2 + A = 3E$ 가 주어져 있죠?

즉, 우리가 아는 정보는 이것밖에 없단 뜻이니,

X 가 무엇이 될지는 오로지 이것에만 근거하여 풀어야 합니다.

X 에 무엇이 들어가야 하죠?

네.

$A - 4E$ 죠? 그래야 곱했을 때 $A^2 + A$ 꼴이 나오니깐요.

이해가 가죠? 역행렬의 기본 개념입니다.

그런데 행렬 \neg, \wedge, \vee 에도 이 개념이 그대로 나오죠.

이번 6평에서도 나왔고, 7월 교육청 문항에서도 나왔습니다.

두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 = -A, \quad A^2 + B^2 = A + E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

— < 보 기 > —

$\neg, A^3 = A$
 $\wedge, AB^2 = B^2A$
 \vee, B 의 역행렬이 존재한다.

① \neg ② \vee ③ \neg, \wedge
 ④ \neg, \vee ⑤ \neg, \wedge, \vee

이차정사각행렬 X, Y 에 대하여 \ast 를

$$X \ast Y = (X - Y)(X + Y)$$

라 정의하자. 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [3점]

— < 보 기 > —

$\neg, A \ast O = O$ 이면 $A = O$ 이다.
 $\wedge, A \ast B = A \ast (-B)$ 이면 $(AB)^2 = A^2B^2$ 이다.
 $\vee, A \ast E = A$ 이면 $A + E$ 의 역행렬이 존재한다.

① \neg ② \wedge ③ \vee
 ④ \neg, \wedge ⑤ \wedge, \vee

하지만, 저랑 볼 예제는 다음 문항입니다. 풀어보세요.

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 + B^2 = O, \quad (A + B)^2 = O$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [4점]

— < 보 기 > —

$\neg, AB = -BA$
 $\wedge, A^3B^3 = B^3A^3$
 $\vee, \text{행렬 } A + B + E \text{는 역행렬을 갖는다.}$

① \neg ② \neg, \wedge ③ \neg, \vee
 ④ \wedge, \vee ⑤ \neg, \wedge, \vee

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B 가
 $A^2 + B^2 = O, (A+B)^2 = O$
 를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
 (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $AB = -BA$
 ㄴ. $A^3B^3 = B^3A^3$
 ㄷ. 행렬 $A+B+E$ 는 역행렬을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

두 이차정사각행렬 A, B 가
 $2A - A^2B = E$
 를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른
 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $A^{-1} = 2E - AB$
 ㄴ. $AB = BA$
 ㄷ. $A = \frac{1}{2}(E + BA^2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ만 해설할게요.

$A+B+E$ 의 X 를 곱했을 때 E 꼴이 나와야 합니다만,

무엇을 곱할지는,

“ 조건에 근거하여 ”

분다 했습니다.

주어진 조건은 두개인데, 무얼 이용할까요 ?

네. $(A+B)^2 = O$

저걸 이용하려면 X 엔 어떤 값이 들어가야 할까요?

그렇습니다. $(A+B-E)$ 입니다.

연산해보면,

$$(A+B+E)(A+B-E) = (A+B)^2 - E$$

$$= -E$$

아. ㄷ 참. 쉽네요

이해 가셨죠? 역행렬의 개념에 근거하되, 그 근거는 주어진 조건에서 찾는다.

꼭 명심하시길 바랍니다.

시간이 없으니, 바로 다음 문항 볼게요.

풀어보세요. 배울 개념은 다음장에서.

두 이차정사각행렬 A, B 가

$$2A - A^2B = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1} = 2E - AB$
 ㄴ. $AB = BA$
 ㄷ. $A = \frac{1}{2}(E + BA^2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

다들 눈치 채셨겠지만, 배울 개념은 ㄴ 입니다.

$$AB = BA$$

이 식이 성립함이 보일때는 두가지를 이용합니다.

첫째, 역행렬의 성질.

우린 이런개념을 배웠죠.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

그렇죠? 다음 식을 볼까요?

$$A(B + E) = E$$

이걸 보는 순간, 아...역행렬개념이용하는구나. 를 느끼고, 다음행동을 해야죠.

$$A(B + E) = B(A + E) = E,$$

$$AB + E = BA + E,$$

$$AB = BA$$

아하. 납득이 가죠???

둘째. 뭐..이름 불일게 없어서 제가 붙였습니다. "한쪽으로 옮기"

바로 이겁니다.

ex) $A = B + E$

자 행렬의 특성상, 같은 행렬이면 왼쪽에 곱하나 오른쪽에 곱하나 값은 같죠.

그걸 이용해 푸는 겁니다.

$$A = B + E,$$

$$AA = AB + A$$

$$AA = BA + A$$

$$\therefore AB = BA$$

이해가죠??

워, 대충 이정도 입니다만,

사실 대부분 짜잘짜잘한거고,

큰 틀은 "직접 해보기" 입니다.

이 행동요소가 정말 큰거거든요.

여기에 제곱은 늘려라, 워 역행렬 개념 등등이 쓰인겁니다.

한번 기출펴놓고 도전해보심쇼 ㅎㅎ

개념 설명 중 이해가 안가는건 아래에 블로그로 오셔서

질문주십시오.

유제 못실어논건 죄송합니다 ㅎㅎ.