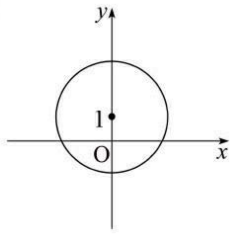
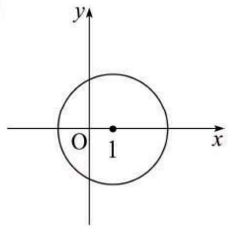
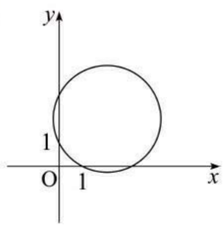
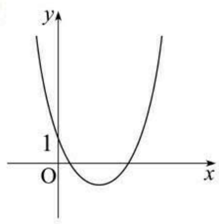
1. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 03월 서울 나형 #14

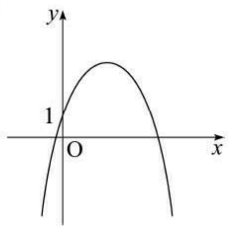
실수 x, y에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} x-2 & -y \\ y-2 & x+2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, 좌표평면 위에서 점 (x, y)가 나타내는 그래프의 개형은?

①


②


③


④


⑤


문제풀이 www.CYGong.com

$\begin{pmatrix} x-2 & -y \\ y-2 & x+2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(x-2)(x+2)+y(y-2)=0$

$\therefore\ x^2+(y-1)^2=5$

따라서 점 (x, y)가 나타내는 도형은 중심이 $(0,1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다.

2. ●●○○ 기출 | 고3 - 2006년 06월 모평 나형 #02

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+2A^{-1}$은?

① $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

문제풀이 www.CYGong.com

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에서

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ A+2A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

3. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 09월 모평 A형 #17

질량 a(g)의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 c(%)인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량 b(g)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$\log\frac{b}{a}=-1+k\log c$ (단, k는 상수이다.)

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4g이다. 20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량(g)은? (단, 각 용액의 양은 충분하다.)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

문제해설

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때, 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4g 이므로

$$\log\frac{4}{10}=-1+k\log 8$$

$$3k\log 2=\log\frac{4}{10}+1=\log\left(\frac{4}{10}\times 10\right)$$

$$=\log 4=2\log 2$$

$$\therefore\ k=\frac{2}{3}$$

따라서, 20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 x라 하면

$$\log\frac{x}{20}=-1+\frac{2}{3}\log 27=\log\frac{(27)^{\frac{2}{3}}}{10}=\log\frac{9}{10}$$

$$\frac{x}{20}=\frac{9}{10}$$

$$\therefore\ x=18$$

4. ●●●○ 기출 | 고2 - 2010년 09월 인천 가형 #12

과학전문 학술지에 '공룡의 속도 측정' 이라는 논문이 발표됐다. 이 논문에서는 중력가속도를 g, 공룡이 달릴 때의 보폭을 s, 공룡의 다리 길이를 h라 할 때, 공룡이 달리는 속도 v가 다음과 같다고 주장했다.

$$v=0.25\,g^{0.5}s^{1.67}h^{-1.17}$$

위의 식을 이용하여 보폭이 8이고 다리 길이가 4인 공룡의 달리는 속도 v를 구할 때, $\log v^{1000}$의 값은? (단, 중력가속도 $g=10$, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

① 601 ② 651 ③ 701 ④ 751 ⑤ 801

문제풀이

$$v=2^{-2}\times 10^{0.5}\times 8^{1.67}\times 4^{-1.17}=2^{0.67}\times 10^{0.5}$$

$$\log v^{1000}=1000\,(0.67\log 2+0.5)$$

$$=1000\,(0.201+0.5)=701$$

5. ●●●○ 기출 | 고3 - 2012년 03월 서울 나형 #26

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_2=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+2}-a_{2n}=1$

(나) $a_{2n+1}-a_{2n-1}=0$

$a_{100}+a_{101}$의 값을 구하시오.

문제풀이

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 구하면 다음과 같다.

$a_3=a_1=1$, $a_5=a_3=1$, $a_7=a_5=1$, $\cdots$

$\therefore\ a_{2n-1}=1$

$a_4=a_2+1=2$, $a_6=a_4+1=3$, $a_8=a_6+1=4$, $\cdots$

$\therefore\ a_{2n}=n$

따라서 $a_{100}+a_{101}=50+1=51$이다.

6. ●●●○ 기출 | 고2 - 2012년 11월 경기 가형 #12

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=2a_n+1$$

을 만족시킬 때, $\log_4(a_{20}+1)$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

문제풀이

$a_{n+1}=2a_n+1$에서 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$a_n+1=b_n$이라고 하면, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a_1+1=2$, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n=a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}=2^n$

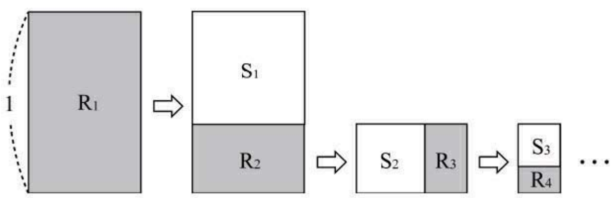
따라서 $\log_4(a_{20}+1)=\log_4 2^{20}=\log_4 4^{10}=10$

7. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 10월 서울 나형 #27

직사각형 중에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형을 잘라내고 남은 직사각형이 처음의 직사각형과 서로 닮음이 되는 것을 황금직사각형이라고 한다.

그림과 같이 긴 변의 길이가 1인 황금직사각형 R_1에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형 S_1을 잘라내고 남은 직사각형을 R_2, 직사각형 R_2에서 정사각형 S_2를 잘라내고 남은 직사각형을 R_3이라고 하자. 이와 같은 방법으로 직사각형 R_4, R_5, R_6, $\cdots$ 을 한없이 만들어 간다.

직사각형 R_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 둘레의 길이 l_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n=k\,l_1$일 때, 상수 k의 값은?



① $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$
④ $3-\sqrt{5}$ ⑤ $3+\sqrt{5}$

문제풀이 www.CYGong.com

R_1의 짧은 변의 길이를 x라 하면 R_2의 긴 변과 짧은 변의 길이는 각각 x, $1-x$이고 R_1과 R_2가 닮음이므로 $x:1=(1-x):x$

$x^2+x-1=0$에서 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because x>0)$

또 R_n과 R_{n+1}사이에 $1:\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$의 닮음비가 성립하므로 $l_{n+1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}l_n$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{l_1}{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}l_1$ 이므로

$k=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$이다.

8. ●●●○ 기출 | 고3 - 2014년 04월 경기 B형 #06

무리방정식 $2x^2-x-\sqrt{-2x^2+x+14}=2$의 모든 실근의 곱은?

① $-\dfrac{3}{2}$　② $-\dfrac{5}{2}$　③ $-\dfrac{7}{2}$

④ $-\dfrac{9}{2}$　⑤ $-\dfrac{11}{2}$

문제풀이 www.CYGong.com

$2x^2-x=t$라 하자.

$t-2=\sqrt{-t+14}$ $(2\le t\le 14)$

$t^2-3t-10=0$

$t=5$ $(\because 2\le t\le 14)$

$2x^2-x=5$, $2x^2-x-5=0$

근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 두 실근의 곱은 $-\dfrac{5}{2}$

9. ●●●○ 기출 | 고3 - 2009년 09월 모평 가형 #26

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$일 때, $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$의 값은?

(단, $0<\theta<\pi$)

① $-\dfrac{\sqrt{5}}{8}$　② $-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　③ $-\dfrac{1}{2}$

④ $-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

문제풀이 www.CYGong.com

$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$$

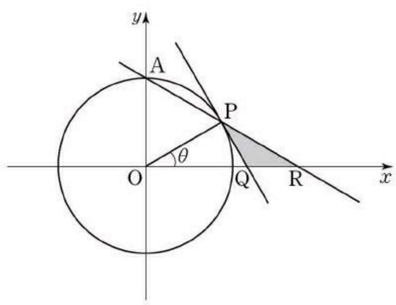
$$\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=1-\frac{1}{16}$$
$$=\frac{15}{16}$$

그런데, $\dfrac{\pi}{6}<\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7}{6}\pi$이고, $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$이므로 $\theta+\dfrac{\pi}{6}$는 제 2사분면의 각이다.

$$\therefore \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$$

10. ●●●● 기출 | 고3 - 2010년 06월 모평 가형 #30

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 A$(0,1)$과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자. $\angle$QOP $=\theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



문제풀이 www.CYGong.com

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로 직선 AP의 방정식은

$$y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$$

위 직선의 x절편은

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

이므로 점 R의 좌표는 $\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta},0\right)$이다.

$$\triangle ORP=\frac{1}{2}\times\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\sin\theta$$

$$\triangle OQP=\frac{1}{2}\times1\times\tan\theta$$

이므로

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta}-\tan\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}\right\}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}$$

$$\therefore\ \alpha=\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\theta}{2\theta^2}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 100\alpha=50$$

11. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 06월 모평 가형 #30

두 양수 a, b가 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin7x}{2^{x+1}-a}=\frac{b}{2\ln2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$b>0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin7x}{2^{x+1}-a}=\frac{b}{2\ln2}\neq0$이고,

$x\to0$일 때, (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

따라서, $\lim\limits_{x\to0}(2^{x+1}-a)=0$에서 $2-a=0$

$\therefore\ a=2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{2^{x+1}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin7x}{x}}{\frac{2^{x+1}-2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin7x}{7x}\cdot7}{\frac{2(2^x-1)}{x}}$$

$$=\frac{1\cdot7}{2\cdot\ln2}=\frac{7}{2\ln2}$$

$\therefore\ b=7$

$\therefore\ ab=14$

12. ●●○○ 기출 | 고3 - 2007년 10월 서울 가형 #03

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{ax+3}-3}{x-3}=b$ 일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

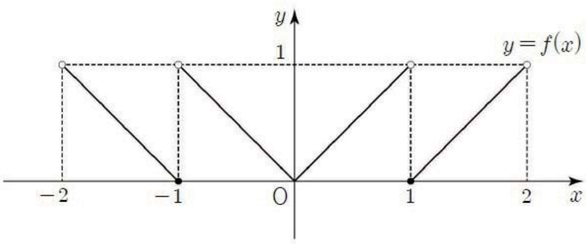
문제풀이 www.CYGong.com

$\sqrt{3a+3}-3=0$에서 $a=2$, $b=\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{7}{3}$

13. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 04월 경기 B형 #15

열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



〈보 기〉

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+0}\{f(x)+f(-x)\}=0$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}f(x)\sin\frac{1}{x}=0$

ㄷ. $g(x)=\sin\pi x$라 할 때, 함수 $(g\circ f)(x)$는 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=0$이고

$\lim\limits_{x\to1+0}f(-x)=\lim\limits_{t\to-1-0}f(t)=0$ 이므로

$$\lim_{x\to1+0}\{f(x)+f(-x)\}$$

$$=\lim_{x\to1+0}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(-x)=0\ \text{(참)}$$

ㄴ. $-1\le\sin\frac{1}{x}\le1\,(x\neq0)$이고 $f(x)\ge0$이므로

$$-f(x)\le f(x)\sin\frac{1}{x}\le f(x)$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\sin\frac{1}{x}=0$ (참)

ㄷ. 함수 $(g\circ f)(x)$가 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이면 된다.

ⅰ) $x=1$인 경우

$(g\circ f)(1)=0$

$\lim\limits_{x\to1+0}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{t\to+0}g(t)=0$

$\lim\limits_{x\to1-0}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{t\to1-0}g(t)=0$

$\therefore\ x=1$에서 연속

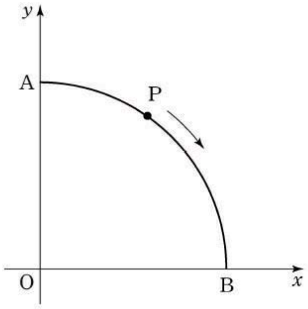
ⅱ) $x=-1$인 경우 ⅰ)과 같은 방법으로 연속

ⅰ), ⅱ)에 의하여 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $(g\circ f)(x)$는 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. ●●●○ 기출 | 고3 - 2007년 09월 모평 가형 #28

좌표평면 위에 그림과 같이 중심각의 크기가 $90°$이고 반지름의 길이가 10인 부채꼴 OAB가 있다. 점 P가 점 A에서 출발하여 호 AB를 따라 매초 2의 일정한 속력으로 움직일 때, $\angle AOP = 30°$가 되는 순간 점 P의 y좌표의 시간(초)에 대한 변화율은?



① $-\dfrac{1}{2}$　　② $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

④ -1　　⑤ -2

문제풀이 www.CYGong.com

t초 후에 선분 OP와 y축이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

점 P의 좌표는 $(10\sin\theta, 10\cos\theta)$이므로 속력 v는

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\ \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \sqrt{(10\cos\theta)^2 + (-10\sin\theta)^2}\ \frac{d\theta}{dt}$$

$$= 10\frac{d\theta}{dt}$$

$$= 2$$

$$\therefore\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}$$

따라서

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -10\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -2\sin\theta$$

이므로

$\angle AOP = 30°$인 순간의 점 P의 y좌표의 시간에 대한 변화율은

$-2\sin 30° = -1$

15. ●●●● 기출 | 고3 - 2007년 06월 모평 가형 #22

그림과 같이 좌표평면 위에 네 점

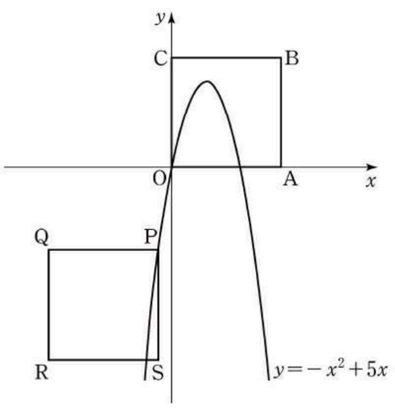
$O(0, 0)$, $A(8, 0)$, $B(8, 8)$, $C(0, 8)$

을 꼭지점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다.

점 P가 점 $(-1, -6)$에서 출발하여 포물선

$y = -x^2 + 5x$

를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동시킨다. 평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최대값을 $\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



문제풀이 www.CYGong.com

점 P의 좌표를 $(x, -x^2+5x)$라 하면

두 정사각형 OABC, PQRS가 겹칠 때,

$0 \le x \le 5$이다.

두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x) = x(-x^2+5x) = -x^3+5x^2$

이다.

$S'(x) = -3x^2+10x = -3x\left(x-\dfrac{10}{3}\right)$이므로

$S'(x) = 0$에서 $x = 0, \dfrac{10}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	5
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗		↘	

증감표에서 $S(x)$는 $x = \dfrac{10}{3}$일 때, 최대값을 갖고 최대값은

$$S\left(\frac{10}{3}\right) = -\frac{1000}{27} + 5\cdot\frac{100}{9} = \frac{500}{27}$$

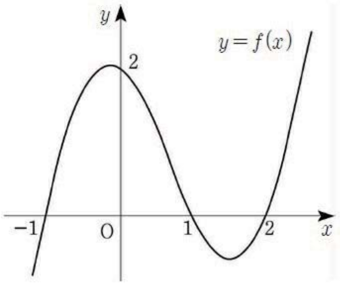
$\therefore\ p+q = 27+500 = 527$

16. ●●●○ 기출 | 고3 - 2012년 10월 서울 나형 #10

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$가

$$f(-1)=f(1)=f(2)=0,\ f(0)=2$$

를 만족시킬 때, $\int_0^2 f'(x)dx$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

문제풀이 www.CYGong.com

$\int_0^2 f'(x)dx=[f(x)]_0^2=f(2)-f(0)=0-2=-2$

17. ●●●● 기출 | 고3 - 2010년 07월 인천 가형 #24

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \leqq x < 1) \\ 2 & (x \geqq 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt \quad (x \geqq 0)$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $q-p$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

문제풀이 www.CYGong.com

$0 \leqq x < 1$ 일 때, $g(x)=\int_0^x 2t\,dt = x^2$

$x \geqq 1$ 일 때,

$g(x)=\int_0^1 2t\,dt+\int_1^x 2\,dt=2x-1$

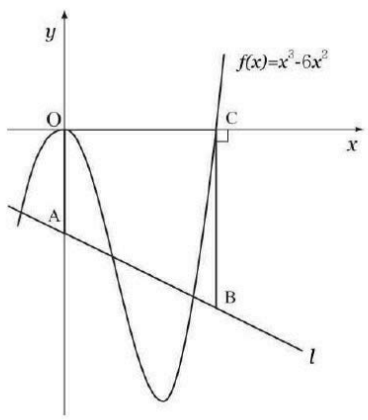
$g(x)=\begin{cases} x^2 & (0 \leqq x < 1) \\ 2x-1 & (x \geqq 1) \end{cases}$

$V=\pi\int_0^1 (x^2)^2 dx + \pi\int_1^2 (2x-1)^2 dx = \frac{68}{15}\pi$

$\therefore\ q-p=53$

18. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 07월 인천 가형 #23

그림과 같이 임의로 그은 직선 l이 y축과 만나는 점을 A, 점 C$(6,\ 0)$을 지나고 y축과 평행하게 그은 직선과의 교점을 B라 하자. 사다리꼴 OABC의 넓이가 곡선 $f(x)=x^3-6x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같을 때, 임의의 직선 l은 항상 일정한 점 D를 지난다. 이 때, $\triangle$ODC의 넓이를 구하시오. (단, $\overline{AB}$는 $\overline{OC}$아래에 있다.)



문제풀이 www.CYGong.com

직선을 $y=mx+n$ 이라 두면

$\int_0^6 (x^3-6x^2-mx-n)dx=0$ 이므로

$n=-3m-18$

직선 $y=mx-3m-18$

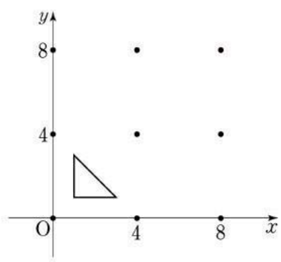
$m(x-3)-(y+18)=0$이고 m에 관한 항등식

이므로 점 D의 좌표는 $(x,\ y)=(3,\ -18)$ 따라

서 넓이는 54

19. ●●●● 기출 | 고3 - 2010년 06월 모평 가형 #17

좌표평면 위에 9개의 점 $(i,\ j)$ $(i=0, 4, 8,\ j=0, 4, 8)$이 있다. 이 9개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형 중에서 내부에 세 점 $(1,\ 1)$, $(3,\ 1)$, $(1,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 포함하는 사각형의 개수는?



① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

문제풀이 www.CYGong.com

주어진 삼각형을 포함하는 사각형을 만들려면 점 $O(0,0)$을 반드시 꼭짓점으로 해야 한다.
점 O와 연결된 변의 꼭짓점은
$(4,0)$, $(8,0)$ 중에서 한 개,
$(0,4)$, $(0,8)$ 중에서 한 개 선택하며,
점 O와 변으로 연결되지 않은 한 꼭짓점은
$(4,4)$, $(4,8)$, $(8,4)$, $(8,8)$ 중에서 한 개를 선택해야 한다.
따라서, 꼭짓점을 선택하는 방법의 수는
${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_4C_1 = 16$(개)
이 중에서 $(0,0)$, $(8,0)$, $(4,4)$, $(0,8)$을 꼭짓점으로 선택하면 사각형을 만들 수 없다.
따라서, 구하는 사각형의 개수는
$16-1=15$(개)

20. ●●●○ 기출 | 고3 - 2013년 10월 서울 B형 #08

같은 종류의 구슬 다섯 개를 서로 다른 세 개의 주머니에 나누어 넣으려고 한다. 각 주머니 안의 구슬이 세 개 이하가 되도록 넣는 방법의 수는? (단, 구슬끼리는 서로 구별하지 않고 빈 주머니가 있을 수도 있다.)

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

문제풀이 www.CYGong.com

세 개의 주머니 A, B, C에 넣은 공의 수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=5$이므로 가능한 모든 경우의 수는 ${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = 21$
(ⅰ) 2개의 주머니에 다섯 개의 공을 1개와 4개로 나누어 넣는 경우의 수 ${}_3P_2 = 6$
(ⅱ) 한 개의 주머니에 다섯 개의 공을 모두 넣는 경우의 수 ${}_3C_1 = 3$
따라서 구하는 경우의 수는 $21-(6+3)=12$이다.

[다른 풀이]
한 주머니에 네 개 이상의 공을 넣을 수 없으므로 세 개의 주머니에 넣는 공의 수에 따라 경우를 나누면
(ⅰ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 다른 주머니에 공을 두 개 넣는 경우는 3, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $3!=6$
(ⅱ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 한 개씩 넣는 경우는 3, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$
(ⅲ) 한 개의 주머니에 공을 한 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 두 개씩 넣는 경우는 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$6+3+3=12$이다.

21. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 09월 모평 가형 #17

9개의 수 2^1, 2^2, 2^3, $\cdots$, 2^9이 오른쪽 표와 같이 배열되어 있다. 각 행에서 한 개씩 임의로 선택한 세 수의 곱을 3으로 나눈 나머지가 1이 될 확률은?

2^1	2^2	2^3
2^4	2^5	2^6
2^7	2^8	2^9

① $\frac{10}{27}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{14}{27}$
④ $\frac{16}{27}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

문제풀이 www.CYGong.com

각 행에서 하나씩 택하여 곱하는 경우의 수는
$3\times3\times3=27$ (가지)
택한 수의 곱이 3으로 나누었을 때, 나머지가 1이 되는 경우는 택한 세 수의 지수의 합이 짝수일 때이다. 1행, 2행, 3행에서 택한 수의 지수를 순서쌍으로 나타내어 지수의 합이 짝수인 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) (짝수, 짝수, 짝수)
$1\times2\times1=2$ (가지)
(ⅱ) (짝수, 홀수, 홀수)
$1\times1\times2=2$ (가지)
(ⅲ) (홀수, 짝수, 홀수)
$2\times2\times2=8$ (가지)
(ⅲ) (홀수, 홀수, 짝수)
$2\times1\times1=2$ (가지)
따라서 구하는 확률은
$\frac{2+2+8+2}{27}=\frac{14}{27}$

22. ●●●○ 기출 | 고3 - 2012년 07월 인천 가형 #05

A, B, C, D, E, F 여섯 명으로 구성된 어느 수학 동아리에서 회장과 부회장을 각각 1명씩 뽑으려고 한다. A 또는 B가 회장으로 뽑혔을 때, F가 부회장으로 뽑힐 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

문제풀이 www.CYGong.com

A 또는 B가 회장으로 뽑히는 사건을 M, F가 부회장으로 뽑히는 사건을 N라 하면,

$$\mathrm{P}(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(M \cap N) = \frac{2}{{}_6\mathrm{P}_2} = \frac{1}{15}$$

$$\mathrm{P}(N|M) = \frac{\mathrm{P}(M \cap N)}{\mathrm{P}(M)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

23. ●●●○ 기출 | 고3 - 2012년 11월 수능 가형 #08

어느 학교 전체 학생의 60%는 버스로, 나머지 40%는 걸어서 등교하였다. 버스로 등교한 학생의 $\frac{1}{20}$이 지각하였고, 걸어서 등교한 학생의 $\frac{1}{15}$이 지각하였다. 이 학교 전체 학생 중 임의로 선택한 1명의 학생이 지각하였을 때, 이 학생이 버스로 등교하였을 확률은?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{9}{20}$ ③ $\frac{9}{19}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{9}{17}$

문제풀이 www.CYGong.com

선택한 한 학생이 지각하는 사건을 A, 학생이 버스로 등교하는 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$
$$= P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c)$$
$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{20} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{15}$$
$$= \frac{17}{300}$$

따라서 $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$= \frac{\frac{3}{100}}{\frac{17}{300}}$$
$$= \frac{9}{17}$$

24. ●●●○ 기출 | 고3 - 2013년 07월 인천 B형 #10

두 일차변환 f, g에 대하여 $f : (x,\ y) \to (2x-3y,\ 3x-y)$이고 합성변환 $g \circ f : (x,\ y) \to (2x+3y,\ x+2y)$이다. 역변환 g^{-1}에 의하여 점 $(1,\ 1)$이 옮겨지는 점을 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

문제풀이 www.CYGong.com

일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬은

$BA = B\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\therefore a+b = -9$

25. ●●●○ 기출 | 고3 - 2012년 06월 모평 가형 #09

행렬 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 세 점 $\mathrm{A}(-2,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$, $\mathrm{C}(0,2)$가 옮겨진 점을 각각 A', B', C'이라 하자. 삼각형 ABC의 내부와 삼각형 A′B′C′의 내부의 공통부분의 넓이는?

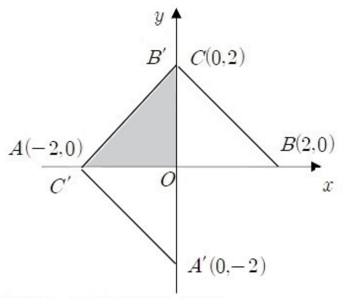
① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

문제풀이 www.CYGong.com

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

이므로 주어진 일차변환은 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 회전변환을 나타낸다.

즉, 세 점 $A(-2.0)$, $B(2.0)$, $C(0.2)$은 각각 $A'(0.-2)$, $B'(0.2)$, $C'(-2.0)$로 옮겨지므로 삼각형 ABC의 내부와 삼각형 $A'B'C'$의 내부의 공통부분은 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서, 공통부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

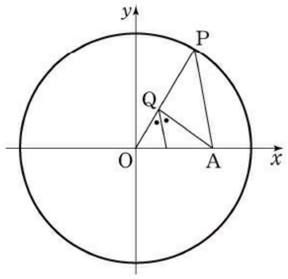
26. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 09월 모평 가형 #08

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 점 $\mathrm{A}(4,0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 Q 전체의 집합을 X라 하자. (단, $b \neq 0$)

(가) 점 Q는 선분 OP 위에 있다

(가) 점 Q는 선분 OP 위에 있다.

(나) 점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 ∠OQA를 이등분한다.



집합의 포함관계로 옳은 것은?

① $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1\right\}$

② $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1\right\}$

③ $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{y^2}{5} = 1\right\}$

④ $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1\right\}$

⑤ $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1\right\}$

문제풀이

$\overline{AP} // \overline{BQ}$이므로

$\angle AQB = \angle QAP$

$\angle OQB = \angle QPA$

따라서,

$\angle QAP = \angle QPA$

이므로

삼각형 QAP는 $\overline{QA} = \overline{QP}$인 이등변삼각형이고,

$\overline{OQ} + \overline{QB} = \overline{OQ} + \overline{QP} = \overline{OP} = 6$

따라서, 점 Q는 두 점 O, Q에 이르는 거리의 합이 6으로 일정하다.

점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{OQ} + \overline{QA} = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+y^2} = 6$

$\sqrt{(x-4)^2+y^2} = 6 - \sqrt{x^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 36 - 12\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2$

$3\sqrt{x^2+y^2} = 2x + 5$

양변을 제곱하면

$9x^2 + 9y^2 = 4x^2 + 20x + 25$

$5(x-2)^2 + 9y^2 = 45$

따라서, 점 Q의 차취는

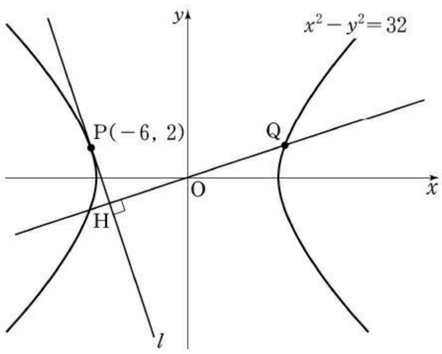
$\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ (단, $y \neq 0$)

이므로

$X \subset \left\{(x, y) \middle| \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1\right\}$

27. ●●●○ 기출 | 고3 - 2008년 09월 모평 가형 #20

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 32$ 위의 점 P$(-6,\ 2)$에서의 접선 l에 대하여 원점 O에서 l에 내린 수선의 발을 H, 직선 OH와 이 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. 두 선분 OH와 OQ의 길이의 곱 $\overline{\text{OH}} \cdot \overline{\text{OQ}}$를 구하시오.



문제풀이

접선 l의 방정식은

$-6x - 2y = 32$, $3x + y = -16 \cdots$ ㉠

원점을 지나면서 ㉠과 수직인 직선의 방정식은

$-x + 3y = 0$, $x - 3y = 0 \cdots$ ㉡

㉠,㉡에서 $H(-\dfrac{24}{5}, -\dfrac{8}{5})$

또한, 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 32$와 ㉡의 교점은 $Q(6, 2)$ 이다.

$\therefore\ \overline{OH} \cdot \overline{OQ}$

$= \sqrt{(-\dfrac{24}{5})^2 + (-\dfrac{8}{5})^2} \times \sqrt{6^2 + 2^2}$

$= \dfrac{8\sqrt{10}}{5} \times 2\sqrt{10} = 32$

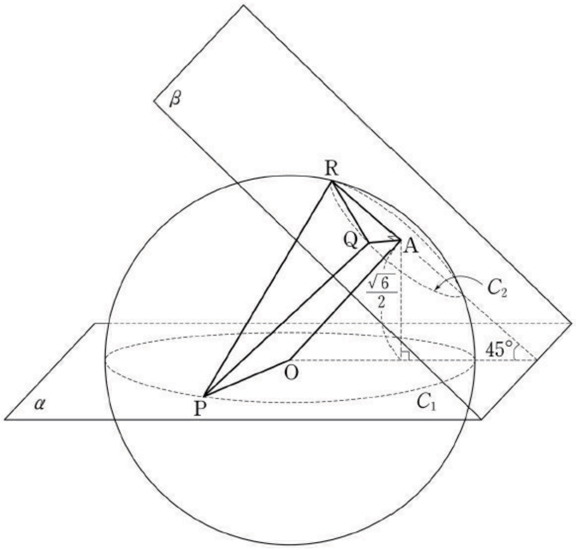
28. ●●●● 기출 | 고2 - 2012년 05월 모평 가형 #30

반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 45°인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

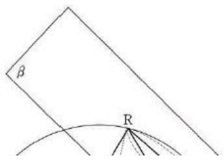
(가) $\angle$QAR $= 90°$

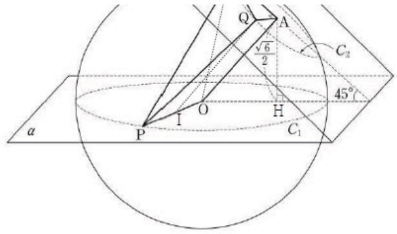
(나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



문제풀이 www.CYGong.com





A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{AH}^2 = 3$에서 $\overline{OA} = \sqrt{3}$
점 Q에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 I라 두면,
$\overline{PQ}^2 = \overline{PI}^2 + \overline{QI}^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4$에서 $\overline{PQ} = 2$
△POR에서 $\overline{PR}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OR}^2 = 8$이므로
$\overline{PR} = 2\sqrt{2}$
이때, $\angle PQR = \theta$라 두면 코사인법칙에 의해
$\cos\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$이다.

$\triangle PQR = \frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

△PQR을 평면 AQPO로 정사영한 도형은 △PQA이고, $\triangle PQA = \frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 $\frac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

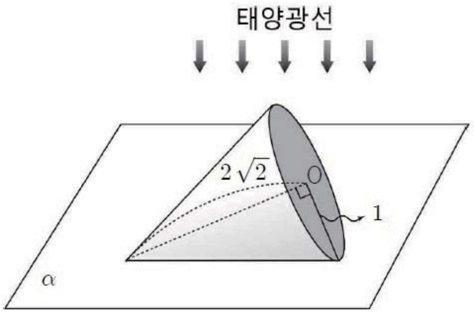
$\cos^2\theta = \frac{3}{7}$

$\therefore p+q = 10$

29. ●●●○ 기출 | 고3 - 2013년 07월 인천 B형 #13

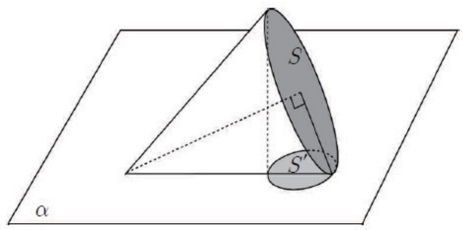
반지름의 길이가 1, 중심이 O인 원을 밑면으로 하고 높이가 $2\sqrt{2}$인 원뿔이 평면 α 위에 놓여있다.
(단, 원뿔의 한 모선이 평면 α에 포함된다.)

그림과 같이 태양광선이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 원뿔의 밑면에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는?



① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{8}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{7}{24}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$

문제풀이 www.CYGong.com



원뿔의 밑면을 포함한 평면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하고
원뿔의 밑면의 평면 α위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하자.
$\therefore S' = S\cdot\cos\theta = \pi\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$

30. ●●○○ 기출 | 고3 - 2010년 11월 수능 가형 #03

좌표공간에서 점 P$(0,\ 3,\ 0)$과 점 A$(-1,\ 1,\ a)$ 사이의 거리는 점 P와 점 B$(1,\ 2,\ -1)$ 사이의 거리의 2배이다. 양수 a의 값은?

① $\sqrt{7}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{3}$

문제풀이 www.CYGong.com

$\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 이므로

$\overline{PA}^2 = 4\overline{PB}^2$

$(-1)^2 + (-2)^2 + a^2 = 4\{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2\}$

$5 + a^2 = 12$

$a^2 = 7$

$a > 0$ 이므로

$a = \sqrt{7}$