1. ●●○○ 기출 | 고3 - 2013년 04월 경기 B형 #01

문제풀이

$2B = A - \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 1

2. ●●●● 기출 | 고2 - 2008년 11월 경기 가형 #16

문제풀이

자동차의 속력을 x, $y(x > y)$라 할 때,

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 10\pi$, $\frac{5}{3}x - \frac{5}{3}y = 10\pi$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30\pi \\ 30\pi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\pi\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore a = 1$, $b = -1$ 이므로 $|a - b| = 2$

3. ●●●○ 기출 | 고2 - 2013년 06월 서울 A형 #04

문제풀이

그래프에서 변의 개수가 9이므로 이 그래프를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 9의 2배인 18이다.

4. ●●●● 기출 | 고3 - 2012년 04월 경기 나형 #29

문제풀이

$\log x = f(x) + g(x)$ ($f(x)$는 정수, $0 \le g(x) < 1$)

$0 \le g(x^2) < 1$, $0 \le g(x^3) < 1$이므로

(가)에서 $0 \le f(x) = g(x^2) + g(x^3) < 2$이다.

$f(x)$는 정수이므로 0 또는 1이다.

한편, (나)에 의하여 $f(x) \ne 0$

$\therefore f(x) = 1$

$\log x^2 = f(x^2) + g(x^2) = 2f(x) + 2g(x)$ ……㉠

$\log x^3 = f(x^3) + g(x^3) = 3f(x) + 3g(x)$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$f(x^2) + f(x^3) + g(x^2) + g(x^3) = 5f(x) + 5g(x)$ ……㉢

㉢의 좌변은 정수이므로 $5g(x)$는 정수이다.

$\therefore 0 < g(x) < 1$에서 $g(x)$가 될 수 있는 값은

$\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$이다.

$g(x) = \frac{4}{5}$일 때, $g(x^2) = \frac{3}{5}$, $g(x^3) = \frac{2}{5}$, $g(x^4) = \frac{1}{5}$

이므로 $g(x^2) > g(x^3) > g(x^4)$이 성립한다.

$\therefore g(x) = \frac{4}{5}$이므로 $\log x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$, $x = 10^{\frac{9}{5}}$

따라서 $m = 5$, $n = 9$이므로 $m + n = 14$

5. ●●○○ 기출 | 고3 - 2010년 03월 서울 나형 #02

문제풀이

$\log_5 3 \times (\log_3 \sqrt{5} - \log_{\frac{1}{9}} 125)$

$= \log_5 3 \times \left(\frac{1}{2}\log_3 5 + \frac{3}{2}\log_3 5\right)$

$= \log_5 3 \times 2\log_3 5 = 2$

6. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 06월 모평 B형 #17

문제풀이

점 A와 B의 y의 좌표는 2^a로 같으므로

점 B의 x의 좌표를 b라 하면

$15 \cdot 2^{-b} = 2^a$, $15 \cdot 2^{-a} = 2^b$

$\overline{AB} = a - b$

$= a - (-a + \log_2 15)$

$= 2a - \log_2 15$

$1 < \overline{AB} < 100$에서

$1 < 2a - \log_2 15 < 100$

$1 + \log_2 15 < 2a < 100 + \log_2 15$

$\frac{1}{2}\log_2(2 \cdot 15) < a < \frac{1}{2}\log_2(15 \cdot 2^{100})$

이때,

$\frac{1}{2}\log_2(2 \cdot 15) = 2.\times\times\times$

$\frac{1}{2}\log_2(15 \cdot 2^{100}) = 51.\times\times\times$

따라서 구하는 자연수 a의 개수는

$(51 - 3) + 1 = 49$

7. ●●●● 기출 | 고3 - 2007년 07월 인천 가형 #25

문제풀이

$a + b = 100$ …㉠

흘려 내린 물의 양을 M이라 할 때,

B, C, D 물의 양은 차례대로

$M\left(\frac{a}{100}\right)^2\left(\frac{b}{100}\right)$, $M\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)^2$,

$M\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)$

B, C, D가 등비수열을 이루므로

$\left\{\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)^2\right\}^2 = \left\{\left(\frac{a}{100}\right)^2\left(\frac{b}{100}\right)\right\}\left\{\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)\right\}$

$b^2 = 100a$ …㉡

㉠, ㉡에 의해

$b = 50\sqrt{5} - 50$

따라서 $p = 50$, $q = 50$

$\therefore p + q = 100$

8. ●●●○ 기출 | 고3 - 2009년 11월 수능 나형 #18

문제풀이

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_2 + a_4 = 8$에서 $(a_1 + d) + (a_1 + 3d) = 8$

즉, $2a_1 + 4d = 8$

$\therefore a_1 + 2d = 4$ ……㉠

$a_7 = 52$에서 $a_1 + 6d = 52$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$4d = 48$

$\therefore d = 12$

9. ●●●● 기출 | 고3 - 2011년 03월 서울 나형 #21

문제풀이
www.CYGong.com

$a_n = \overline{\mathrm{OP}_n}$ 이라 하자.

$y_n = a_n \sin \dfrac{n-1}{3}\pi$ 에서

$y_1=0,\ y_2>0,\ y_3>0,\ y_4=0,\ y_5<0,\ y_6<0,\ y_7=0,$
$\cdots$ 으로 y_n의 부호가 주기적으로 바뀐다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 몇 개의 항을 구하면

$a_1=1 \qquad a_2=1 \qquad a_3=\dfrac{1}{2}$

$a_4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \qquad a_5=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \qquad a_6=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)$

$a_7=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \qquad a_8=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \qquad \cdots$

으로 동경 OP_1에서 동경 OP_7까지 동경이 2π만큼 회전하면 a_7은 a_1의 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$배이다.

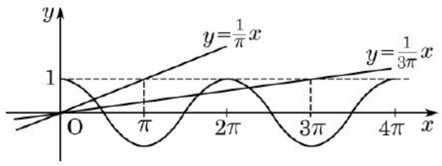
즉, 2π만큼씩 회전할 때마다 그 이전 길이의 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$배가 된다.

$a_{n+6}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 a_n$ 인 관계가 성립하므로

$a_{50}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 a_{44}=\cdots=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16} a_2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16}$

10. ●●●● 기출 | 고3 - 2011년 03월 서울 가형 #28

문제풀이
www.CYGong.com



그림에서 $a_n=2n-1\,(n\ge 1)$

$$\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}=\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{2n(2n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{24}\frac{125}{n(n+1)}$$
$$=125\sum_{n=1}^{24}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=120$$

11. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 04월 경기 A형 #20

문제풀이
www.CYGong.com

$p=-10,\ f(n)=2^{n-1},\ g(n)=2^n-1$

따라서

$$\frac{2\times p\times g(10)}{5\times f(3)}=\frac{2\times(-10)\times(2^{10}-1)}{5\times 2^2}=-1023$$

12. ●●●○ 기출 | 고3 - 2007년 04월 경기 가형 #05

문제풀이
www.CYGong.com

ㄱ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan\frac{2n+1}{4}\pi$ (발산)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$
(수렴)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_2 n^2-2\log_2(n+2)\}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2}{(n+2)^2}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2}{n^2+4n+4}=\log_2 1=0$ (수렴)

13. ●●○○ 기출 | 고3 - 2008년 04월 경기 가형 #03

문제풀이
www.CYGong.com

2^{n-1} 으로 분모와 분자를 나누어 정리하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}=4$$

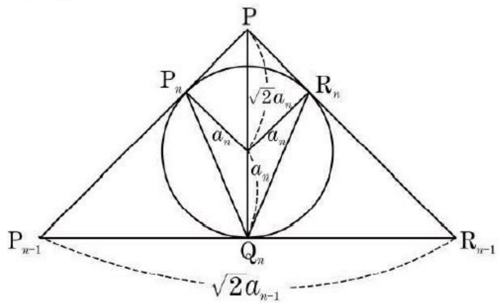
14. ●●●● 기출 | 고3 - 2011년 03월 서울 나형 #15

문제풀이
www.CYGong.com

삼각형 PQR 의 내접원의 반지름을 a_1이라 하면

$\sqrt{2}a_1+a_1=\sqrt{2}$ 에서 $a_1=2-\sqrt{2}$ 이고

$S_1=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-2)\times 1=\sqrt{2}-1$



삼각형 $\mathrm{PP}_{n-1}\mathrm{R}_{n-1}$의 내접원의 반지름을 a_n이라 하면

$\sqrt{2}a_n+a_n=\dfrac{\sqrt{2}a_{n-1}}{2}$

$\therefore\ a_n=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a_{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 공비가 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$인 등비수열을

이루므로 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}=\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$

$\therefore\ p+q=\dfrac{4}{7}$

15. ●●●○ 기출 | 고2 - 2012년 09월 인천 가형 #23

문제풀이

공비가 $\dfrac{2x-5}{7}$이므로 주어진 무한등비급수가

수렴하기 위해서는 $-1<\dfrac{2x-5}{7}<1$ 이다.

$-7<2x-5<7$ 이므로 $-1<x<6$

$\therefore$ 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 합은 15

16. ●●●○ 기출 | 고3 - 2014년 04월 경기 A형 #24

문제풀이

$\lim\limits_{x\to-2}(x+2)=0$이고 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}=6$

이므로 $\lim\limits_{x\to-2}(\sqrt{x+a}-b)=0$

$\therefore\ b=\sqrt{a-2}$

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2}}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-2}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})=2\sqrt{a-2}=6$

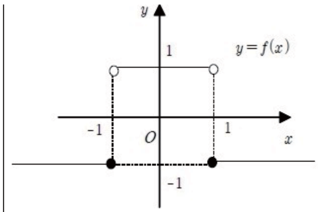
$\therefore\ a=11,\ b=3$

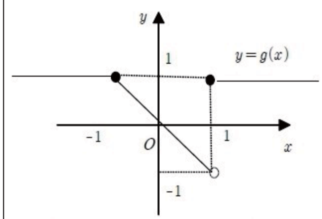
따라서 $a+b=14$

17. ●●●● 기출 | 고3 - 2012년 11월 수능 나형 #20

문제풀이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.





ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)g(x)=(-1)\times1=-1$

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to+0}g(x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to-0}g(x+1)=-1$

이므로 $g(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다.

(거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)g(x+1)=1\times0=0$

$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)g(x+1)=(-1)\times0=0$

$f(-1)g(0)=(-1)\times0=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to-1}f(x)g(x+1)=f(-1)g(0)$

따라서, 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서

연속이다. (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

18. ●●●○ 기출 | 고3 - 2012년 04월 경기 나형 #23

문제풀이

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+5)}{x-1}=6$

따라서 $a=6$

19. ●●●○ 기출 | 고3 - 2011년 06월 모평 나형 #24

문제풀이

$f(x)=x^2+3x$에서

$f'(x)=2x+3$

$\therefore\ f(2)+f'(2)=10+7=17$

20. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 10월 서울 A형 #20

문제풀이

$f(x)=x^3+ax$를 미분하면

$f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y=(3+a)(x+1)+(-1-a)$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 구하면

$x^3+ax=(3+a)(x+1)+(-1-a)$

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ b=2$

따라서 점 B의 좌표는 $(2,\ 8+2a)$이다.

마찬가지로 점 B에서의 접선의 방정식은

$y=(12+a)(x-2)+(8+2a)$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 구하면

$x^3+ax=(12+a)(x-2)+(8+2a)$

$x^3-12x+16=0$, $(x-2)^2(x+4)=0$

$\therefore\ c=-4$

주어진 조건에서

$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)=8+2a-64-4a=-80$

$\therefore\ a=12$

[다른 풀이]

점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면

$f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-b)$

$g(x)$는 일차식이므로 $f(x)-g(x)$는 이차항을 갖지 않는다. 즉, 이차항의 계수는 0이므로

$-b+2=0\ \ \therefore\ b=2$

점 B에서의 접선의 방정식을 $y=h(x)$라 하면

$f(x)-h(x)=(x-2)^2(x-c)$

마찬가지로 이차항의 계수는 0이므로

$-c-4=0\ \ \therefore\ c=-4$

따라서

$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)=-56-2a=-80$

$\therefore\ a=12$

21. ●●●○ 기출 | 고3 - 2011년 07월 인천 나형 #10

문제풀이 www.CYGong.com

$f'(x)=a(x-2)^2\ (a<0)$이므로

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘

ㄱ. $f'(0)<0$이므로 $x=0$에서 감소상태 (참)
ㄴ. 극댓값은 존재하지 않는다. (거짓)
ㄷ. 모든 실수에 대하여 함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다. (참)

22. ●●●○ 기출 | 고3 - 2013년 10월 서울 A형 #11

문제풀이 www.CYGong.com

$f'(x)=3x^2-2x-5=(x+1)(3x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(-1)$	↘	$f\left(\frac{5}{3}\right)$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로
$f(-1)=-1-1+5+k=20$
$\therefore\ k=17$

23. ●●●○ 기출 | 고3 - 2013년 10월 서울 A형 #04

문제풀이 www.CYGong.com

$$\int_0^1(3x^2-4x+5)dx=\left[x^3-2x^2+5x\right]_0^1=4$$

24. ●●●○ 기출 | 고3 - 2012년 11월 수능 나형 #11

문제풀이 www.CYGong.com

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\{f(x)\}^2dx&=\int_{-1}^1(x+1)^2dx\\&=\int_{-1}^1(x^2+2x+1)dx\\&=2\int_0^1(x^2+1)dx\\&=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1\\&=2\left(\frac{1}{3}+1\right)\\&=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1f(x)dx&=\int_{-1}^1(x+1)dx\\&=2\int_0^1 1\,dx\\&=2\,[x]_0^1\\&=2\end{aligned}$$

$\int_{-1}^1\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^1f(x)dx\right)^2$에서

$\frac{8}{3}=4k\qquad\therefore k=\frac{2}{3}$

25. ●●●○ 기출 | 고3 - 2013년 07월 인천 A형 #05

문제풀이 www.CYGong.com

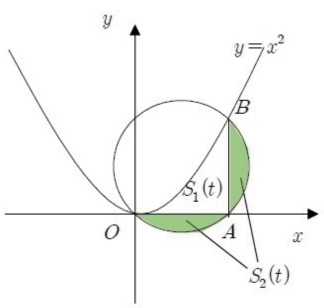
$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1(3x^2+6x+7)dx\\&=2\int_0^1(3x^2+7)dx=2(1+7)=16\end{aligned}$$

26. ●●●● 기출 | 고3 - 2012년 09월 모평 나형 #29

문제풀이 www.CYGong.com

세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(t,0)$, $\mathrm{B}(t,t^2)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 원 C의 반지름의 길이 r는

$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$



위의 그림에서 $S_2(t)$의 넓이는

$S_2(t)=$ (반원의 넓이)
$-$(직각삼각형 OAB의 넓이)

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2-\frac{1}{2}\times t\times t^2\\&=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3\end{aligned}$$

위의 그림에서 $S_1(t)$의 넓이는

$$\begin{aligned}S_1(t)&=\int_0^t x^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3\end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이 $S(t)$는

$$\begin{aligned}S(t)&=S_1(t)+S_2(t)\\&=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{3}t^3\\&=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{6}t^3\end{aligned}$$

$S'(t)=\frac{1}{8}(2t+4t^3)\pi-\frac{1}{2}t^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ S'(1)&=\frac{1}{8}(2+4)\pi-\frac{1}{2}\\&=\frac{3\pi-2}{4}\end{aligned}$$

$\therefore\ p=3,\ q=-2$

$\therefore\ p^2+q^2=9+4=13$

27. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 11월 수능 나형 #14

문제풀이 www.CYGong.com

셔츠와 바지의 색은 서로 다르게 정하므로 인형 A에게 셔츠와 바지를 입히는 경우의 수는

$3\times3\times2\times1=18$(가지)

이고 한 인형에게 입힌 셔츠와 바지는 다른 인형에게 입히지 않으므로 인형 B에게 셔츠와 바지를 입히는 경우의 수는

$2\times2\times2\times1=8$(가지)

따라서 곱의 법칙에 의해 구하려는 경우의 수는

$18\times8=144$(가지)

이다.

28. ●●●● 기출 | 고3 - 2012년 10월 서울 나형 #13

문제풀이 www.CYGong.com

	A역	B역	
	승차	하차	승차
남자	90	18	60
여자	60	12	60

B역에서 C역으로 가는 도중 기차에 타고 있는 승객의 수는 남자 $90-18+60=132$, 여자 $60-12+60=108$ 이므로 전체 승객은 240이다.

여자 승객이 선택될 확률은 $\frac{108}{240}$이고, A역에서 승차한 여자 승객이 선택될 확률은 $\frac{60-12}{240}=\frac{48}{240}$ 이므로

구하는 확률은 $\dfrac{\frac{48}{240}}{\frac{108}{240}}=\frac{4}{9}$

29. ●●●○ 기출 | 고3 - 2011년 09월 모평 나형 #04

문제풀이 www.CYGong.com

두 사건 A, B 가 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$이다.

이 때

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

이므로

$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)$

$\therefore\ P(B)=\frac{3}{5}$

$\therefore\ P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

30. ●●●○ 기출 | 고3 - 2007년 09월 모평 나형 #05

문제풀이 www.CYGong.com

$P(A\cup B)$

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{3}P(B)$

$=\frac{2}{3}P(B)+\frac{1}{3}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ P(B)=\frac{7}{10}$

$\therefore\ P(B^c)=1-P(B)=\frac{3}{10}$