[08차] 수원 : 행렬 > 역행렬과 연립일차방정식 – 고급 50제

1. ●●●● 기출 | 고3 - 2012년 10월 서울 가형 #17

두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2B+AB^2=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $(A+B)^{-1}$이 존재한다.
ㄴ. $A+B=E$이면 $A^3=E$이다.
ㄷ. $A^2B=BA^2$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $A^2B+AB^2=A(A+B)B=E$에서 $B^{-1}=A(A+B)$
이므로 $BA(A+B)=E$
따라서 $(A+B)^{-1}=BA$로 존재한다. (참)
ㄴ. $A+B=E$이므로 $A(A+B)B=E$에서 $AB=E$
$A(E-A)=E$, $A^2=A-E$
$A^3=AA^2=A(A-E)=A^2-A=-E$ (거짓)
ㄷ. $BA(A+B)=E$에서 $BA^2+BAB=E$이므로
$BA^2+BAB=A^2B+AB^2$, $BAB=AB^2$
양변의 오른쪽에 B^{-1}을 곱하면 $AB=BA$ (참)

2. ●●●● 기출 | 고3 - 2012년 06월 모평 나형 #26

역행렬을 갖는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 x, y의 연립방정식

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=2 \end{cases}$$

의 해가 $x=5$, $y=4$일 때, $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=2 \end{cases}$ 에서

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 즉, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

주어진 연립일차방정식의 해가

$x=5$, $y=4$ 이므로

$A\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$\therefore\ p=5$, $q=4$

$\therefore\ p+q=9$

3. ●●●● 기출 | 고3 - 2012년 06월 모평 가형 #14

집합 S가

$$S=\{M\,|\,M\text{은 이차정사각행렬이고 } M^2=M\}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\in S$
ㄴ. $A\in S$이고 A의 역행렬이 존재하면 $A=E$이다.
ㄷ. $A+E\in S$이면 $A^4\in S$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S$(참)

ㄴ. $A \in S$ 이므로 $A^2 = A$

A^{-1}이 존재하므로

$A^2 = A$의 양변의 오른쪽에 A^{-1}을 곱하면

$A^2A^{-1} = AA^{-1}$ $\quad \therefore A = E$(참)

ㄷ. $A + E \in S$ 이므로 $(A+E)^2 = A + E$

$A^2 + 2A + E = A + E$

$\therefore A^2 = -A$

$A^4 = (A^2)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$

$(A^4)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$

이므로 $(A^4)^2 = A^4$ $\quad \therefore A^4 \in S$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 03월 서울 나형 #12

두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A(E+B) = E$
(나) $AB - BA = A + B$

다음 중 행렬 $(AB)^{20}$과 항상 같은 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

① $-E$ ② $20E$ ③ $-A$ ④ A ⑤ $20A$

문제풀이

$A(E+B) = E$에서 $A^{-1} = E + B$이므로

$A(E+B) = (E+B)A = E$

$A + AB = A + BA$

$\therefore AB = BA$

이때, $AB - BA = O = A + B$이므로 $B = -A$

$A(E+B) = E$에 $B = -A$를 대입하면

$A(E-A) = E$, $A^2 - A + E = O$

위 등식의 양변에 $A + E$를 곱하면

$(A+E)(A^2 - A + E) = A^3 + E = O$

$\therefore A^3 = -E$

$\therefore (AB)^{20} = (-A^2)^{20} = A^{40}$

$= (A^3)^{13}A = (-E)^{13}A = -A$

5. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 11월 수능 가형 #12

집합 U를

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d\text{는 1이 아닌 양수} \right\}$$

라 하자. U의 부분집합 S를

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, \log_a d = \log_b c,\ a \neq b,\ bc \neq 1 \right\}$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이면 $A \in S$이다.
ㄴ. $A \in U$이고 A가 역행렬을 가지면 $A \in S$이다.
ㄷ. $A \in S$이면 A는 역행렬을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이면

$\log_4 2 = \log_9 3 = \frac{1}{2}$ 이므로

$A \in S$ (참)

ㄴ. (반례) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$이면 $A \in U$이고,

$2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2 \neq 0$이므로

행렬 A의 역행렬이 존재한다. 그러나
$\log_2 5 > 2$, $\log_3 4 < 2$ 에서

$\log_2 5 \neq \log_3 4$이므로 $A \notin S$ (거짓)

ㄷ. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$이면

$\log_a d = \log_b c$이므로 $d = a^{\log_b c}$

$ad - bc = a \cdot a^{\log_b c} - bc$

$= a^{1 + \log_b c} - bc$

$= a^{\log_b bc} - bc$

$= (bc)^{\log_b a} - bc$

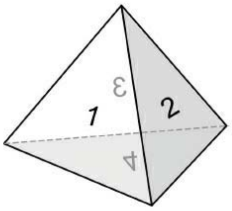
$\neq 0$ $\quad (\because \log_b a \neq 1)$

이므로 행렬 A는 역행렬을 갖는다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

6. ●●●● 기출 | 고2 - 2008년 09월 서울 나형 #20

각 면에 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 정사면체 주사위를 두 번 던져서 바닥에 닿는 면에 적혀 있는 수를 차례로 a, b라 하자. 임의의 실수 t에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a-3 & a+1 \\ b-2 & t \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수는?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제풀이 www.CYGong.com

행렬 $\begin{pmatrix} a-3 & a+1 \\ b-2 & t \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하려면

$(a-3)t-(a+1)(b-2) \neq 0$ … ㉠

이다. 이 때, ㉠이 임의의 실수 t에 대하여 항상 성립하기위한 조건은

$a-3=0$이고 $(a+1)(b-2) \neq 0$이다.

순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 3이다.

7. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 03월 서울 가형 #24

표는 두 등산화 A, B를 각각 한 켤레씩 만드는 데 필요한 가죽과 고무의 양을 나타낸 것이다.

(단위 : kg)

	A	B
가죽	0.6	0.3
고무	0.5	0.4

가죽 45 kg, 고무 42 kg을 모두 사용하여 등산화 A를 x켤레, 등산화 B를 y켤레 만든다고 할 때, 다음은 x와 y의 값을 구하는 식을 행렬로 나타낸 것이다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} a & -3 \\ b & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

이때 두 상수 a, b에 대하여 $(a-b)^2$의 값을 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

x, y에 관한 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} 0.6x+0.3y=45 \\ 0.5x+0.4y=42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+3y=450 \\ 5x+4y=420 \end{cases}$$

이것을 행렬을 이용하여 나타내면

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $a=4$, $b=-5$

$\therefore$ $(a-b)^2=(4+5)^2=81$

8. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 11월 수능 B형 #17

두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB+A^2B=E, \quad (A-E)^2+B^2=O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. B의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB=BA$

ㄷ. $(A^3-A)^2+E=O$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $AB+A^2B=(A+A^2)B=E$ 이므로

$B^{-1}=A+A^2$ (참)

ㄴ. $AB+A^2B=A(B+AB)=E$

$\therefore$ $A^{-1}=B+AB$

따라서,

$A^{-1}B^{-1}=E+A$, $B^{-1}A^{-1}=E+A$

에서 $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 이므로

$(A^{-1}B^{-1})^{-1}=(B^{-1}A^{-1})^{-1}$

$BA=AB$ (참)

ㄷ. $(A-E)^2+B^2=O$ 에서

$B^2=-A^2+2A-E$

$AB+A^2B=E$ 에서

$B=AB^2+A^2B^2$

$=A(-A^2+2A-E)+A^2(-A^2+2A-E)$

$=-A^4+A^3+A^2-A$

$=-(A^3-A)(A-E)$

따라서, $(A+A^2)B=E$ 이므로

$(A+A^2)\{-(A^3-A)(A-E)\}=E$

$(A^3-A)^2=-E$

$(A^3-A)^2+E=O$ (참)

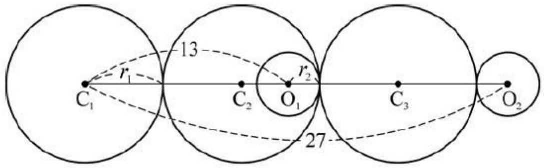
따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

9. ●●●● 기출 | 고2 - 2008년 09월 서울 가형 #30

그림과 같이 반지름의 길이가 r_1인 세 원 C_1, C_2, C_3의 중심과 반지름의 길이가 r_2인 두 원 O_1, O_2의 중심이 모두 한 직선 위에 있다.
두 원 C_1, C_2는 외접하고, 두 원 C_2, C_3이 외접한다. 두 원 C_1, C_3은 만나지 않는다.
원 O_1은 원 C_2에 내접하고 원 C_3에 외접한다. 원 O_2는 원 C_3에 외접하고 원 C_2와 만나지 않는다.
원 C_1과 원 O_1의 중심거리가 13이고 원 C_1과 원 O_2의 중심거리가 27일 때, r_1, r_2에 대한 연립일차방정식을 행렬을 이용하여

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} a & 1 \\ -5 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 27 \end{pmatrix}$$

과 같이 나타낼 수 있다.



$10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $r_1 > r_2$)

문제풀이 www.CYGong.com

$3r_1 - r_2 = 13$, $5r_1 + r_2 = 27$ 이므로 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 27 \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 27 \end{pmatrix}$$ 이다.

$a=1$, $b=3$이므로 $10(a+b)=40$이다.

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면 $(ABA^{-1})^2 = AB^2A^{-1}$이다.
ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면 행렬 A^2의 역행렬도 존재한다.
ㄷ. 행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않으면 행렬 A의 역행렬도 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $(ABA^{-1})^2 = (ABA^{-1})(ABA^{-1})$
$= AB(A^{-1}A)BA^{-1} = ABEBA^{-1}$
$= ABBA^{-1} = AB^2A^{-1}$ (참)
ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면
$A^2(A^{-1})^2 = AAA^{-1}A^{-1} = A(AA^{-1})A^{-1}$
$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E$
$\therefore\ (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ (참)
ㄷ. (반례) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

11. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 11월 수능 가형 #13

이차정사각행렬 A와 행렬 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $(BA)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 $(AB)^2$은?

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

문제풀이 www.CYGong.com

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이므로 $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$이다.

$(BA)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$BABA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

이 등식의 왼쪽에 B^{-1}을 곱하면

$B^{-1}BABA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$ABA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ (AB)^2 = (ABA)B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. ●●●● 기출 | 고3 - 2010년 06월 모평 나형 #29

이차정사각행렬 A, B, P가

$$AP = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\quad BP = P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

를 만족시킨다. P가 역행렬을 가질 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a=c$이고 $b=d$이면 $A=B$이다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $A-B$가 역행렬을 가지면 $a \neq c$이고 $b \neq d$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $A=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$

$B=P\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}P^{-1}$

이므로 $a=c$, $b=d$ 이면 $A=B$ 이다. (참)

ㄴ. $AB=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}ac&0\\0&bd\end{pmatrix}P^{-1}$

$BA=P\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}ac&0\\0&bd\end{pmatrix}P^{-1}$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄷ. $A-B=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}P^{-1}-P\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\left[\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}\right]P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}a-c&0\\0&b-d\end{pmatrix}P^{-1}$

에서 $A-B$의 역행렬이 존재하므로

$(a-c)(b-d)\neq 0$ 이다.

따라서 $a\neq c$ 이고 $b\neq d$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 09월 모평 A형 #18

두 이차정사각행렬 A, B가

$$2A-A^2B=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $A^{-1}=2E-AB$

ㄴ. $AB=BA$

ㄷ. $A=\frac{1}{2}(E+BA^2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제해설 www.CYGong.com

ㄱ. $2A-A^2B=E$에서

$A(2E-AB)=E$

$\therefore A^{-1}=2E-AB$ (참)

ㄴ. $A^{-1}=2E-AB$ 에서 각 변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$E=2A-AAB$ ⋯㉠

$A^{-1}=2E-AB$ 에서 각 변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면

$E=2A-ABA$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서 $AAB=ABA$ ⋯㉢

㉢의 각 변의 왼쪽에 A의 역행렬 A^{-1}를 곱하면

$AB=BA$ (참)

ㄷ. $2A-A^2B=E$에서

$A=\frac{1}{2}(E+A^2B)$

$=\frac{1}{2}(E+BA^2)(\because AB=BA)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

14. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 09월 모평 나형 #25

수직선 위의 두 점 A(a), B(b)에 대하여 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 P(p), 3 : 2로 내분하는 점을 Q(q) 라 하자. 이차정사각행렬 M을 이용하여 $M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$로 나타낼 때, 행렬 M^{-1}의 모든 성분의 곱을 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$p=\frac{2b+3a}{2+3}=\frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b$

$q=\frac{3b+2a}{3+2}=\frac{2}{5}a+\frac{3}{5}b$

따라서, $\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ 이므로

$M=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$이다.

$M^{-1}=5\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$

이므로 행렬M^{-1}의 모든 성분의 곱은

$3\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot 3=36$

15. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 10월 서울 나형 #20

정수 a, b, c에 대하여 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix}a&b\\1&c\end{pmatrix}$라 하자.

$|b|\leq 100$일 때, $A=A^{-1}$을 만족하는 행렬 A의 개수를 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b & b(a+c) \\ a+c & b+c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 $c=-a$, $b=-a^2+1$을 만족하는 a^2의 값은 0, 1, 4, ⋯, 100등의 모두 11개이다. $a^2=0$을 만족하는 경우의 행렬은 1개이고 그 이외의 경우는 모두 2개씩 있으므로 구하는 행렬의 개수는 모두 21(개)이다.

16. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 11월 수능 A형 #19

두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB+A^2B=E,\quad (A-E)^2+B^2=O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. B의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $(A^3-A)^2+E=O$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $AB+A^2B=(A+A^2)B=E$ 이므로
$B^{-1}=A+A^2$ (참)
ㄴ. $AB+A^2B=A(B+AB)=E$
$\therefore\ A^{-1}=B+AB$
따라서,
$A^{-1}B^{-1}=E+A$, $B^{-1}A^{-1}=E+A$
에서 $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 이므로
$(A^{-1}B^{-1})^{-1}=(B^{-1}A^{-1})^{-1}$
$BA=AB$ (참)
ㄷ. $(A-E)^2+B^2=O$ 에서
$B^2=-A^2+2A-E$
$AB+A^2B=E$ 에서
$B=AB^2+A^2B^2$
$=A(-A^2+2A-E)+A^2(-A^2+2A-E)$
$=-A^4+A^3+A^2-A$
$=-(A^3-A)(A-E)$
따라서, $(A+A^2)B=E$ 이므로
$(A+A^2)\{-(A^3-A)(A-E)\}=E$
$(A^3-A)^2=-E$
$(A^3-A)^2+E=O$ (참)
따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

17. ●●●● 기출 | 고2 - 2010년 06월 부산 가형 #27

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=5$ 위의 두 점 A$(1,2)$, B$(2,-1)$에서의 접선의 방정식을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 접선 l_1, l_2의 교점의 좌표 (x, y)는 다음과 같이 행렬을 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

이차정사각행렬 M의 모든 성분의 합이 k일 때, $100k$의 값을 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 A$(1,2)$에서의 접선의 방정식은 $x+2y=5$

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 B$(2,-1)$에서의 접선의 방정식은 $2x-y=5$

연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ 에서 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

따라서, 행렬 M은 $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ 이다.

$\therefore$ 모든 성분의 합 $k=\frac{4}{5}$ 이므로 80 이다.

18. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 07월 인천 가형 #17

기울기가 0이 아닌 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라고 정의할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 행렬 A의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. 두 직선이 일치하면 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄷ. 두 직선이 x축 위에서 만나면 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 $a=c$, $b\neq d$
$\therefore\ ad-bc\neq 0$ (참)
ㄴ. 두 직선이 일치하면 $a=c$, $b=d$
$\therefore\ ad-bc=0$ (참)
ㄷ. 두 직선이 x축 위에서 만나면 $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$
$\therefore\ ad-bc=0$ (참)

19. ●●●● 기출 | 고2 - 2006년 09월 서울 나형 #21

어느 스포츠 센터의 회원들은 수영과 요가 중에 한 가지만 배우며 지난달의 전체 회원의 수는 160명이었다. 이번 달은 지난달에 비해 수영을 배우는 회원의 수는 5% 증가하고, 요가를 배우는 회원의 수는 10% 감소하여 전체 회원의 수는 7명이 감소하였다. 지난달에 수영과 요가를 배운 회원의 수를 각각 x, y라 하면 x, y사이의 관계는 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 160 \\ -140 \end{pmatrix}$과 같이 행렬을 사용하여 나타낼 수 있다. 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0
④ 1　　⑤ 3

문제풀이 www.CYGong.com

지난달의 전체 회원의 수는 160명이므로

$x+y=160$　… ㉠

이번 달의 회원의 수가 모두 7명이 감소하였으므로

$0.05x-0.1y=-7$

$x-2y=-140$　… ㉡

연립방정식 ㉠, ㉡을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 160 \\ -140 \end{pmatrix}$

$a=1$, $b=-2$ 이므로 $a-b=3$

20. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 09월 모평 가형 #16

다음은 이차정사각행렬 A와 서로 다른 두 실수 p, q에 대하여 $A-pE$와 $A-qE$가 모두 역행렬을 갖지 않으면

$$A^2-(p+q)A+pqE=O$$

임을 증명한 것이다. (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

<증명>

$B=A-\dfrac{p+q}{2}E$, $k=$ $\boxed{(가)}$ 라 하면

$B-kE=A-pE$이고 $B+kE=A-qE$이므로

$B-kE$와 $B+kE$는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면,

$k\neq 0$이므로 $a+d=$ $\boxed{(나)}$ 이고 $ad-bc=-k^2$이다.

그런데 $B^{-1}=\dfrac{1}{k^2}$ $\boxed{(다)}$ 이므로

$A^2-(p+q)A+pqE=(A-pE)(A-qE)=O$

가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{p-q}{2}$	0	$-B$
②	$\dfrac{p+q}{2}$	0	$-B$
③	$\dfrac{p-q}{2}$	0	B
④	$\dfrac{p+q}{2}$	1	$-B$
⑤	$\dfrac{p-q}{2}$	1	B

문제풀이 www.CYGong.com

$B=A-\dfrac{p+q}{2}E$, $k=\left[\dfrac{p-q}{2}\right]$라 하면

$B-kE=A-pE$이고　$B+kE=A-qE$이므로

$B-kE$와 $B+kE$는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$B-kE=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$

는 역행렬을 갖지 않으므로

$(a-k)(d-k)-bc=ad-k(a+d)+k^2-bc$

$=0$

$k\neq 0$이므로 $a+d=[0]$, $ad-bc=-k^2$이다. 그런데

$B^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{k^2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($\because a+d=0, ad-bc=-k^2$)

$=\dfrac{1}{k^2}[B]$

이므로

$A^2-(p+q)A+pqE=(A-pE)(A-qE)=O$

가 성립한다.

21. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 09월 모평 가형 #15

세 양수 a, b, c에 대하여 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$라 하자. 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. a, b, c는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

ㄴ. $A+E$의 역행렬이 존재한다. (단, E는 단위행렬이다.)

ㄷ. $A^2=A$이면 $a+c=1$이다.

① ㄴ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$ac-b^2=0$

$\therefore\ b^2=ac$

ㄱ. $b^2=ac$에서 b는 a와 c의 등비중항이므로 a, b, c는 이 순서로 등비수열을 이룬다. (참)

ㄴ. $A+E=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & c+1 \end{pmatrix}$

이 때,

$(a+1)(c+1)-b^2=ac+a+c+1-b^2$

$=a+c+1\neq 0$

$(\because ac-b^2=0,\ a>0, c>0)$

따라서 $A+E$는 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=A$

에서 행렬이 서로 같을 조건에 의해

$ab+bc=b$

$\therefore\ a+c=1\ (\because b>0)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

22. ●●●● 기출 | 고3 - 2007년 03월 서울 나형 #17

철수는 집에서 5km 떨어진 학교에 갈 때, 처음 $x$km는 매시 4km의 속력으로 걸어서 가고, 나머지 $y$km는 매시 8km의 속력으로 뛰어서 간다. 그리고 학교에서 집으로 올 때는 처음 $y$km는 매시 4km의 속력으로 걸어서 오고, 나머지 $x$km는 매시 8km의 속력으로 뛰어서 온다. 철수가 학교에서 집으로 올 때 걸리는 시간은 집에서 학교로 갈 때 걸리는 시간보다 15분이 더 걸린다고 한다. 이를 만족하는 x, y에 대하여 등식

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

가 성립할 때, $p-q$의 값은? (단, p, q는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

문제풀이

집과 학교 사이의 거리가 5km이므로

$x+y=5\ \cdots$ ㉠

집에서 학교에 갈 때 걸리는 시간은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}$(시간)이고, 학교에서 집으로 올 때 걸리는 시간은 $\frac{y}{4}+\frac{x}{8}$(시간)이므로

$\frac{x}{4}+\frac{y}{8}+\frac{1}{4}=\frac{y}{4}+\frac{x}{8}$

$\therefore\ x-y=-2\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p=1,\ q=-1\quad \therefore\ p-q=2$

23. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 09월 모평 나형 #16

다음은 이차정사각행렬 A와 서로 다른 두 실수 p, q에 대하여 $A-pE$와 $A-qE$가 모두 역행렬을 갖지 않으면

$$A^2-(p+q)A+pqE=O$$

임을 증명한 것이다. (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

<증명>

$B=A-\frac{p+q}{2}E$, $k=\boxed{(가)}$라 하면

$B-kE=A-pE$이고 $B+kE=A-qE$이므로

$B-kE$와 $B+kE$는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면,

$k\neq 0$이므로 $a+d=\boxed{(나)}$이고 $ad-bc=-k^2$이다.

그런데 $B^{-1}=\frac{1}{k^2}\boxed{(다)}$이므로

$A^2-(p+q)A+pqE=(A-pE)(A-qE)=O$

가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{p-q}{2}$	0	$-B$
②	$\frac{p+q}{2}$	0	$-B$
③	$\frac{p-q}{2}$	0	B
④	$\frac{p+q}{2}$	1	$-B$
⑤	$\frac{p-q}{2}$	1	B

문제풀이

$B=A-\frac{p+q}{2}E$, $k=\left[\frac{p-q}{2}\right]$라 하면

$B-kE=A-pE$이고　$B+kE=A-qE$이므로

$B-kE$와 $B+kE$는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$B-kE=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$

는 역행렬을 갖지 않으므로

$(a-k)(d-k)-bc=ad-k(a+d)+k^2-bc$

$=0$

$k\neq 0$이므로 $a+d=[0]$, $ad-bc=-k^2$이다. 그런데

$B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\because a+d=0, ad-bc=-k^2)$

$=\frac{1}{k^2}[B]$

이므로

$A^2-(p+q)A+pqE=(A-pE)(A-qE)=O$

가 성립한다.

24. ●●●● 기출 | 고3 - 2007년 09월 모평 나형 #15

모든 성분이 양수인 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $L(A)$를 다음과 같이 정의한다.

$$L(A)=\begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b \\ \log_2 c & \log_2 d \end{pmatrix}$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$일 때, $L(8A)=3A$ 이다.

ㄴ. $L(A)=E$를 만족시키는 행렬 A는 역행렬을 갖는다. (단, E는 단위행렬이다.)

ㄷ. $L(A^2)=2L(A)$를 만족시키는 행렬 A가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. $8A=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$이므로

$$L(8A)=\begin{pmatrix} \log_2 8 & \log_2 8 \\ \log_2 8 & \log_2 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \log_2 2^3 & \log_2 2^3 \\ \log_2 2^3 & \log_2 2^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=3A \quad \text{<참>}$$

ㄴ. $L(A)=E$에서

$$\begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b \\ \log_2 c & \log_2 d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로

$\log_2 a=1$, $\log_2 b=0$, $\log_2 c=1$, $\log_2 d=0$

$\therefore$ $a=2$, $b=1$, $c=2$, $d=1$

이 때, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이고 $2\cdot 2-1\cdot 1\neq 0$이므로 행렬 A는 역행렬을 갖는다. <참>

ㄷ. $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$

이므로

$$L(A^2)=\begin{pmatrix} \log_2(a^2+bc) & \log_2(ab+bd) \\ \log_2(ca+dc) & \log_2(cb+d^2) \end{pmatrix}$$

$$2L(A)=2\begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b \\ \log_2 c & \log_2 d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \log_2 a^2 & \log_2 b^2 \\ \log_2 c^2 & \log_2 d^2 \end{pmatrix}$$

이 때, $L(A^2)=2L(A)$ 이려면

$a^2+bc=a^2\cdots$㉠, $ab+bd=b^2$

$ca+dc=c^2$, $cb+d^2=d^2$

㉠에서 $bc=0$이므로 $b>0$, $c>0$에 모순이다.

따라서, $L(A^2)=2L(A)$를 만족시키는 행렬 A가 존재하지 않는다. <거짓>

25. ●●●● 기출 | 고2 - 2009년 11월 경기 나형 #19

집합 $S=\left\{M \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}M=M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M\text{은 이차정사각행렬} \right\}$의 두 원소 A, B에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $AB\in S$

ㄴ. A의 역행렬 A^{-1}이 존재하면 $A^{-1}\in S$이다.

ㄷ. $A^2=A$를 만족하는 행렬 A는 무수히 많다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

$A\in S$, $B\in S$이므로

ㄱ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}AB=A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}B=AB\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$AB\in S$ (참)

ㄴ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A=A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$의 양변에 A^{-1}을 곱하면

$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이다.

또 양변에 A^{-1}을 곱하면

$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A^{-1}$이므로 $A^{-1}\in S$ (참)

ㄷ. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S$라 하면

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A=A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$을 만족하는 행렬은 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$

$A^2=A$를 만족하려면

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ac & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}=A$$

$a^2=a$, $2ac=c$이므로

$\begin{cases} a=0 \\ c=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=1 \\ c=0 \end{cases}$이다.

따라서 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 또는 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (거짓)

26. ●●●● 기출 | 고2 - 2011년 06월 서울 가형 #19

세 이차정사각행렬 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $AB=BC$
(나) B의 역행렬이 존재한다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $A=E$이면 $C=E$이다.
ㄴ. A의 역행렬이 존재하면 C의 역행렬도 존재한다.
ㄷ. $A^7B=BC^7$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

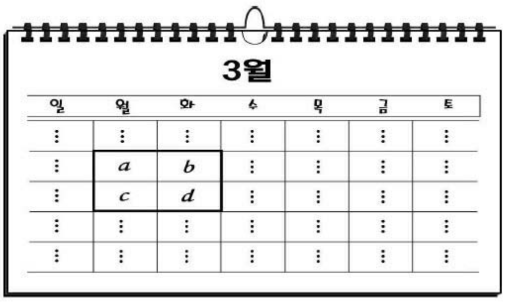
ㄱ. $A=E$이면 (가)에서 $B=BC$
행렬 B의 역행렬이 존재하므로
$B^{-1}B=B^{-1}BC$
$\therefore\ C=B^{-1}B=E$ (참)
ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면
$AB=BC$에서 $C=B^{-1}AB$
이때, $C^{-1}=(B^{-1}AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}B$ 이므로
행렬 C의 역행렬이 존재한다. (참)
ㄷ. (가), (나)에서 $A=BCB^{-1}$이므로
$A^7=(BCB^{-1})^7$
$=(BCB^{-1})(BCB^{-1})\cdots(BCB^{-1})$
$=BC^7B^{-1}$
$\therefore\ A^7B=BC^7$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. $A^7B=AA\cdots AAB$
$=AA\cdots ABC$
$=AA\cdots BCC$
$\vdots$
$=BC\cdots CCC$
$=BC^7$

27. ●●●● 기출 | 고2 - 2009년 09월 부산 가형 #10

그림은 어느 해 3월 달력의 일부분을 나타낸 것이다. 그림에 굵은 실선으로 표시된 직사각형 안에 있는 수 a, b, c, d를 성분으로 하는 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 연립방정식 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하자.
$\alpha-\beta=1$일 때, 그 해의 4월 14일의 요일은?



① 월요일 ② 화요일 ③ 수요일 ④ 목요일 ⑤ 금요일

문제풀이

$b=a+1$, $c=a+7$, $d=a+8$이므로
$A=\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+7 & a+8 \end{pmatrix}$이고
$A^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} a+8 & -(a+1) \\ -(a+7) & a \end{pmatrix}$
$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+8 & -a-1 \\ -a-7 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-6 \\ -a+7 \end{pmatrix}$
$\therefore\ \alpha=a-6$, $\beta=-a+7$
$\alpha-\beta=2a-13=1$이므로 $a=7$
한편, 4월 14일은 3월 14일로부터 31일 후이고, 31을 7로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 4월 14일은 목요일이다.

28. ●●●● 기출 | 고3 - 2007년 06월 모평 가형 #11

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A^2=A$이고 $B=-A$ 일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A^3=A$
ㄴ. $B^2=-B$
ㄷ. $A+3E$는 역행렬을 갖는다. (단, E는 단위행렬이다.)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $A^2=A$의 양변에 A를 곱하면

$A^3=A^2=A$ (참)

ㄴ. $B^2=(-A)^2=A^2=A=-B$ (참)

ㄷ. $A^2=A$에서 $A^2-A=O$이므로

$(A+3E)(A-4E)=-12E$

$\therefore\ (A+3E)^{-1}=-\dfrac{1}{12}(A-4E)$

따라서 $A+3E$는 역행렬을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

29. ●●●● 기출 | 고2 - 2009년 11월 경기 나형 #29

행렬 $\begin{pmatrix} m-7 & 5 \\ 5 & m-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않도록 하는 모든 실수 m의 값의 합을 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$\begin{pmatrix} m-7 & 5 \\ 5 & m-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2m-9 & m^2-7m+10 \\ m+2 & 7m-16 \end{pmatrix}$

역행렬이 존재하지 않으므로

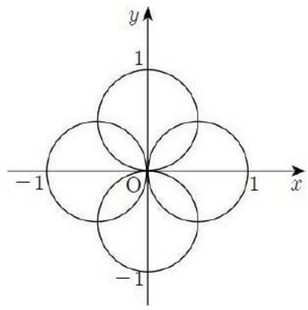
$(2m-9)(7m-16)-(m+2)(m^2-7m+10)=0$

$(m-4)(m^2-15m+31)=0$이므로

모든 실수 m의 값의 합은 19이다.

30. ●●●● 기출 | 고2 - 2009년 09월 부산 나형 #12

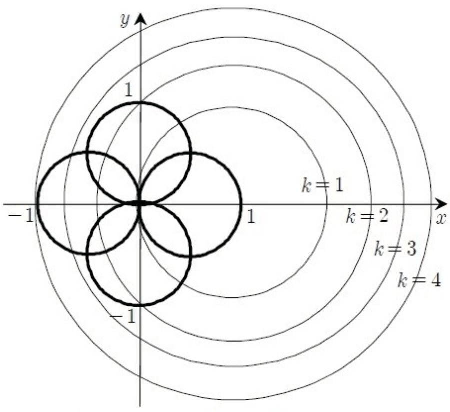
반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 4개의 원이 그림과 같이 놓여 있다. 주어진 4개의 원과 원 $(x-1)^2+y^2=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$의 서로 다른 교점의 개수를 a_k라 하자. 이 때, $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}$을 만족시키는 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

문제풀이 www.CYGong.com

$(x-1)^2+y^2=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$인 원에서 k의 값이 1, 2, 3, 4일 때의 반지름의 길이는 각각 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2이다. 이들 원과 주어진 4개의 원과의 교점을 세어보면



$a_1=3,\ a_2=6,\ \ a_3=2,\ a_4=1$

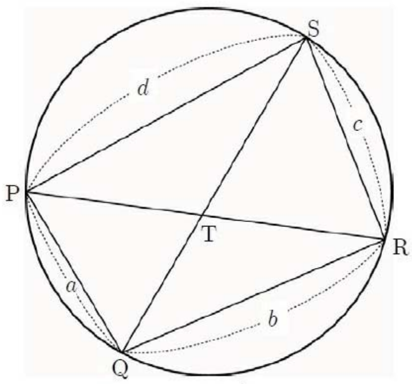
$\therefore\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}$

$=-\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p+q=7$

31. ●●●● 기출 | 고2 - 2010년 11월 경기 가형 #15

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 PQRS의 두 대각선 PR와 QS가 만나는 점을 T라 하고, $\overline{PQ}=a$, $\overline{QR}=b$, $\overline{RS}=c$, $\overline{SP}=d$라 하자. 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



〈보 기〉

ㄱ. △PQS와 △QRS의 넓이가 같다.

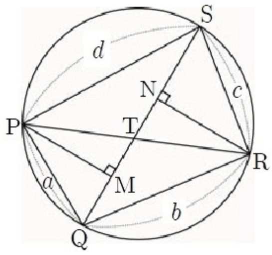
ㄴ. $\overline{PT}=\overline{RT}$

ㄷ. △PQT, △QRT, △RST, △SPT의 넓이를 각각 M_1, M_2, M_3, M_4라 할 때, 행렬 $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com



ㄱ. $\angle QPS=\theta$라 하면,

$$\begin{aligned}\triangle PQS-\triangle QRS&=\frac{1}{2}ad\sin\theta-\frac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta)\\&=\frac{1}{2}ad\sin\theta-\frac{1}{2}bc\sin\theta\\&=\frac{1}{2}(ad-bc)\sin\theta\\&=0\ (ad-bc=0)\end{aligned}$$

(참)

ㄴ. 두 점 P, R에서 대각선 QS에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면

$\triangle PQS=\frac{1}{2}\cdot\overline{QS}\cdot\overline{PM}$,

$\triangle QRS=\frac{1}{2}\cdot\overline{QS}\cdot\overline{RN}$ 이므로 $\overline{PM}=\overline{RN}$ 이다.

한편, 두 $\triangle PMT$, $\triangle RNT$에서

$\angle PTM=\angle RTN$, $\overline{PM}=\overline{RN}$,

$\angle MPT=\angle NRT$이다.

따라서 $\triangle PMT\equiv\triangle RNT$이다.

그러므로 $\overline{PT}=\overline{RT}$ 이다. (참)

ㄷ. $\overline{PT}=\overline{RT}$ 이므로 $M_1=M_2$이고 $M_3=M_4$ 이다.

$M_1M_4-M_2M_3=M_2M_4-M_2M_4=0$

이므로 역행렬이 존재하지 않는다. (참)

32. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 07월 인천 나형 #17

기울기가 0이 아닌 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라고 정의할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 행렬 A의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. 두 직선이 일치하면 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄷ. 두 직선이 x축 위에서 만나면 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 $a=c$, $b\neq d$
$\therefore ad-bc\neq 0$ (참)
ㄴ. 두 직선이 일치하면 $a=c$, $b=d$
$\therefore ad-bc=0$ (참)
ㄷ. 두 직선이 x축 위에서 만나면 $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$
$\therefore ad-bc=0$ (참)

33. ●●●● 기출 | 고2 - 2012년 05월 모평 가형 #15

두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2=A-E,\quad (AB)^2=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. A와 B는 모두 역행렬을 가진다.
ㄴ. $BAB=-A^2$
ㄷ. $B^2AB^2=A^2+B^2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

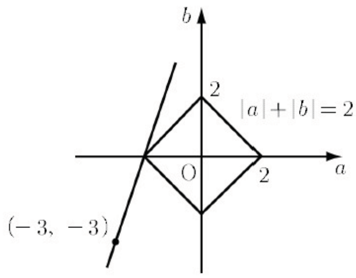
ㄱ. (참) $(AB)^2=E$이므로 $ABAB=E$이다. 두 행렬 M, N에 대하여 $MN=NM=E$이면 $N^{-1}=M$이고 $M^{-1}=N$이므로
$A^{-1}=BAB$이고 $B^{-1}=ABA$이다.
ㄴ. (참) $A^2=A-E$에서
$E=A-A^2=A(E-A)$이다.
즉, $A^{-1}=E-A$
그러므로 $BAB=E-A=-(A-E)=-A^2$
ㄷ. (참) $B^2AB^2=B(BAB)B=B(E-A)B$
$=B^2-BAB=B^2-(-A^2)$
$=A^2+B^2$
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

34. ●●●● 기출 | 고2 - 2008년 11월 경기 나형 #27

집합 $\{(x,\ y)\,|\,|x|+|y|=2,\ x,\ y$는 실수$\}$의 임의의 원소 $(a,\ b)$에 대하여 행렬 $P=\begin{pmatrix}1&m\\a+3&b+3\end{pmatrix}$이 역행렬 P^{-1}를 갖지 않을 때, m의 최댓값을 구하시오. (단, m은 실수이다.)

문제풀이 www.CYGong.com

행렬 $P=\begin{pmatrix}1&m\\a+3&b+3\end{pmatrix}$이 역행렬 P^{-1}를 갖지 않을 때, $(b+3)-m(a+3)=0$이다.
$\therefore b=m(a+3)-3$
이를 좌표평면 위에 나타내면 항상 점$(-3,\ -3)$을 지나는 직선이므로 m의 최댓값은 점$(-2,\ 0)$을 지날 때이다.
그러므로 m의 최댓값은 3이다.



35. ●●●● 기출 | 고2 - 2011년 09월 인천 가형 #20

세 이차정사각행렬 A, B, C와 단위행렬 E에 대하여 $ABC=E$가 성립할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A^{-1}=BC$
ㄴ. $BCA=CAB$
ㄷ. 행렬 B의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. $A(BC)=E$에서 $A^{-1}=BC$ (참)
ㄴ. $A^{-1}(ABC)A=A^{-1}A=E$에서 $BCA=E$
$C(ABC)C^{-1}=CC^{-1}=E$에서 $CAB=E$
따라서 $BCA=CAB$ (참)
ㄷ. $B(CA)=E$에서 $B^{-1}=CA$ (참)
∴ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36. ●●●● 기출 | 고3 - 2014년 03월 서울 A형 #19

두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2=BA+E,\ (A-B+2E)(A-B-2E)=O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. A의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $A^2+B^2=2AB+4E$
ㄷ. A의 모든 성분의 합이 2이면 B의 모든 성분의 합은 -6이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. $A^2-BA=E$, $(A-B)A=E$
∴ $A^{-1}=A-B$
ㄴ. ㄱ에 의하여 $(A-B)A=E=A(A-B)$
$A^2-BA=A^2-AB$
$A^2=AB+E$
∴ $AB=BA$
$(A-B+2E)(A-B-2E)=O$에서
$(A-B)^2-4E^2=O$이고 $AB=BA$이므로
$A^2-2AB+B^2-4E=O$
∴ $A^2+B^2=2AB+4E$
ㄷ. ㄱ에서 $(A-B)^{-1}=A$이고,
ㄴ의 $(A-B)^2=4E$에서
$(A-B)^{-1}=\frac{1}{4}(A-B)$
역행렬을 가지는 행렬의 역행렬은 유일하므로

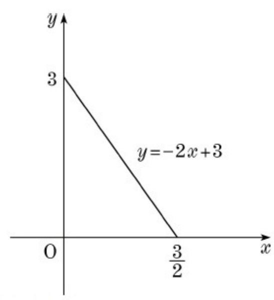
$(A-B)^{-1}=A=\frac{1}{4}(A-B)$
∴ $B=-3A$
따라서 B의 모든 성분의 합은 A의 모든 성분의 합에 -3을 곱한 값과 같으므로 A의 모든 성분의 합이 2이면 B의 모든 성분의 합은 -6이다.
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
[다른 풀이]
ㄷ. $(A-B)^{-1}=A$이고 $A^2=BA+E$이므로
$A^2=BA+E$을 $A^2+B^2=2AB+4E$에 대입하면
$BA+E+B^2=2AB+4E$
$B^2=AB+3E$ ($\because\ AB=BA$)
$(A-B)B=-3E$
∴ $A=(A-B)^{-1}=-\frac{1}{3}B$
∴ $B=-3A$

37. ●●●● 기출 | 고2 - 2013년 06월 서울 A형 #28

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 9^{-a} \\ 27 & 3^b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않도록 음이 아닌 두 실수 a, b의 값을 정할 때, 점 (a, b)가 나타내는 도형의 길이를 l이라 하자. $4l^2$의 값을 구하시오.

문제풀이

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 9^{-a} \\ 27 & 3^b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로
$1\cdot 3^b-9^{-a}\cdot 27=0$
$3^b=3^{-2a+3}$
∴ $b=-2a+3$
$a\ge 0$, $b\ge 0$이므로 점 (a, b)가 나타내는 도형의 길이는 직선 $y=-2x+3$이 x축, y축과 만나는 두 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $(0, 3)$을 양 끝점으로 하는 선분의 길이와 같다.



따라서 구하는 값은
$4l^2=4\left(\frac{9}{4}+9\right)=45$

38. ●●●● 기출 | 고2 - 2006년 09월 서울 나형 #19

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y) 전체의 집합을 M이라 할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $(2,\ 4) \in M$

ㄴ. $(a,\ b) \in M$이면 $(-a,\ -b) \in M$ 이다.

ㄷ. $(a,\ b) \in M,\ (c,\ d) \in M$이면 $(a+c,\ b+d) \in M$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. (참)행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로
$(2, 4) \in M$

ㄴ. (참)$(a, b) \in M$이면 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로 $b=2a$
이때 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 2 & -b \end{pmatrix}$에서 $-b-(-2a)=-b+2a=0$
이므로 역행렬이 존재하지 않는다.
따라서 $(-a,\ -b) \in M$

ㄷ. (참)$(a, b) \in M$, $(c, d) \in M$ 이면 $b=2a$, $d=2c$
이때 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & a+c \\ 2 & b+d \end{pmatrix}$에서
$(b+d)-2(a+c)=(b-2a)+(d-2c)=0$이므로
역행렬이 존재하지 않는다.
따라서 $(a+c,\ b+d) \in M$

39. ●●●● 기출 | 고3 - 2012년 04월 경기 나형 #14

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면 $(ABA^{-1})^2 = AB^2A^{-1}$이다.

ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면 행렬 A^2의 역행렬도 존재한다.

ㄷ. 행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않으면 행렬 A의 역행렬도 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $(ABA^{-1})^2 = (ABA^{-1})(ABA^{-1})$
$= AB(A^{-1}A)BA^{-1} = ABEBA^{-1}$
$= ABBA^{-1} = AB^2A^{-1}$ (참)

ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면
$A^2(A^{-1})^2 = AAA^{-1}A^{-1} = A(AA^{-1})A^{-1}$
$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E$
$\therefore\ (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ (참)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

40. ●●●● 기출 | 고3 - 2011년 11월 수능 나형 #15

두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2+B=3E, \quad A^4+B^2=7E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$

ㄴ. $B^{-1}=A^2$

ㄷ. $A^6+B^3=18E$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $B=3E-A^2$이므로
$AB=A(3E-A^2)=3A-A^3$
$BA=(3E-A^2)A=3A-A^3$
$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄴ. $A^2=3E-B$ 이므로
$A^4=(3E-B)^2=B^2-6B+9E$
$A^4+B^2=7E$ 에서
$2B^2-6B+9E=7E$
$B^2-3B=-E$
$B(B-3E)=-BA^2=-E$
$\therefore\ B^{-1}=A^2$ (참)

ㄷ. ㄴ 에서 $A^2B=BA^2=E$ 이므로
$(A^2+B)(A^4+B^2)=A^6+A^2B^2+BA^4+B^3$
$=A^6+B+A^2+B^3$
$=A^6+B^3+3E=21E$
$\therefore\ A^6+B^3=18E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

41. ●●●● 기출 | 고3 - 2010년 03월 서울 나형 #14

두 이차정사각행렬 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^2=2A+E$
(나) $AB=2E$
(다) 행렬 A의 모든 성분의 합은 7이다.

행렬 B의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제풀이

$A^2-2A=A(A-2E)=E$ ⋯ ㉠

$A\left(\frac{1}{2}B\right)=E$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $A^{-1}=A-2E=\frac{1}{2}B$

$\therefore\ B=2A-4E$

행렬 B의 모든 성분의 합은 $2\times7-4\times2=6$이다.

42. ●●●● 기출 | 고2 - 2012년 09월 인천 나형 #15

0이 아닌 실수 k와 두 이차정사각행렬 A, B가 $A^2+A+E=O$, $B^{-1}=A+kE$을 만족시킬 때 $(A^2B^2)^{-1}=(\boxed{(가)})A+(1-2k)E$임을 증명하는 과정이다. (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)

<증명>

$A^2+A+E=O$에서

$A^{-1}=\boxed{(나)}(A+E)$

$B^{-1}=A+kE$이므로

$(A+kE)B=E=B(A+kE)$이다.

따라서 $AB=BA$

$(A^2B^2)^{-1}=(A^{-1})^2(B^{-1})^2=(A^{-1}B^{-1})^2$

$=\{kA+(\boxed{(다)})E\}^2$

$=(\boxed{(가)})A+(1-2k)E$

위 증명에서 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고 (나)에 알맞은 값을 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

문제풀이

<증명>

$A^2+A+E=O$에서 $A(A+E)=-E$이므로

$A^{-1}=\boxed{-1}(A+E)$

$B^{-1}=A+kE$이므로

$(A+kE)B=E=B(A+kE)$이다.

따라서 $AB=BA$

$(A^2B^2)^{-1}=(A^{-1})^2(B^{-1})^2=(A^{-1}B^{-1})^2$

$=\{(-A-E)(A+kE)\}^2$

$=\{kA+(\boxed{k-1})E\}^2$

$=(\boxed{k^2-2k})A+(1-2k)E$

$f(k)=k^2-2k$, $g(k)=k-1$이고 $p=-1$

$\therefore\ f(-1)\times g(-1)=-6$

43. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 04월 경기 A형 #17

그림은 어느 고등학교의 수학 동아리에서 만든 두 종류의 수학체험전 입장권이다.

수학동아리에서는 입장권 A를 x매, 입장권 B를 y매로 총 500매를 만들어 이를 모두 판매하였다.

이 동아리에서는 입장권 A의 한 매당 판매가격의 70%, 입장권 B의 한 매당 판매가격의 40%를 적립한 총 금액 250000원을 불우 이웃 돕기 성금으로 내었다.

x와 y의 값을 구하는 식을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=100\begin{pmatrix} -2 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

이때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

문제풀이

문제의 조건을 만족시키는

연립일차방정식 $\begin{cases} x+y=500 \\ 7x+2y=2500 \end{cases}$ 을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 500 \\ 2500 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 2500 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=100\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=1,\ b=7$

따라서 $a+b=8$

44. ●●●● 기출 | 고2 - 2012년 06월 서울 나형 #18

어느 회사에서 두 종류의 제품 P, Q를 생산하고 있다. P, Q를 각각 한 개씩 생산할 때 사용되는 금과 은의 양은 다음과 같다.

(단위: g)

소재 / 제품	금	은
P	4	1
Q	2	3

이 회사에서 금 130 g과 은 145 g을 모두 사용하여 P, Q를 각각 x개, y개 만들었다. 이때, 등식 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 29 \end{pmatrix}$가 성립한다. 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

문제풀이

제품 P, Q를 각각 x개, y개 만들 때 사용되는 금과 은의 양이 각각 130g, 145g이므로 연립방정식을 세우면

$\begin{cases} 4x+2y=130 \\ x+3y=145 \end{cases}$

정리하면

$\begin{cases} 2x+y=65 \\ x+3y=145 \end{cases}$

이고, 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 65 \\ 145 \end{pmatrix}$

행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$의 역행렬을 양변의 왼쪽에 곱하면

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 65 \\ 145 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 65 \\ 145 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 29 \end{pmatrix}$

한편 주어진 조건에서 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 29 \end{pmatrix}$이므로

$a=3,\ b=2\quad \therefore\ a+b=5$

45. ●●●● 기출 | 고2 - 2012년 06월 서울 나형 #27

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A+E$의 역행렬은 $A+2E$이다.

(나) $(A+3E)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a^2+d^2의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)

문제풀이

조건 (가)에서

$(A+E)(A+2E)=E$

$A^2+3A+E=O$

$A(A+3E)=-E$

조건 (나)에서

$(A+3E)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}+3E\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}-3E\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}$ … ㉠

조건 (나)의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A(A+3E)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=-E\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$A\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8+3 & 4+1 \\ -22-9 & -11-3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -31 & -14 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=11,\ d=-14$이므로

$a^2+d^2=11^2+(-14)^2=121+196=317$

46. ●●●● 기출 | 고2 - 2013년 06월 서울 A형 #21

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 원점 O와 점 P(a, b)를 지나는 직선의 기울기의 최댓값은?

① $4-2\sqrt{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $2-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}-1$　⑤ 1

문제풀이

$\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ b & a-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ b & a-3 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

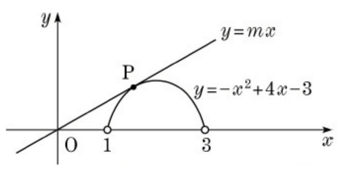
$(a-1)(a-3)+b=0$

$b=-a^2+4a-3\ (a>0,\ b>0)$

즉, 점 P(a, b)는 곡선 $y=-x^2+4x-3$의 제1사분면에 있는 부분 위의 점이다.

직선 OP의 기울기를 m이라 하면 직선 OP의 방정식은 $y=mx$이다.

직선 OP가 곡선 $y=-x^2+4x-3$과 제1사분면에서 서로 접할 때 직선 OP의 기울기 m은 최댓값을 갖는다.



두 식 $y=mx$, $y=-x^2+4x-3$을 연립하면

$mx=-x^2+4x-3$

$x^2+(m-4)x+3=0$ … ㉠

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(m-4)^2-12=0$

$\therefore\ m=4-2\sqrt{3}$ 또는 $m=4+2\sqrt{3}$

$0<m<1$이므로 $m=4-2\sqrt{3}$

[다른 풀이]

원점 O와 곡선 위의 점 P(a, b) $(1<a<3)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{b-0}{a-0}=\frac{b}{a}$$
$$=\frac{-a^2+4a-3}{a}$$
$$=-a+4-\frac{3}{a}$$
$$=4-\left(a+\frac{3}{a}\right)$$

a는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$a+\frac{3}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=2\sqrt{3}$$

(단, 등호는 $a=\frac{3}{a}$, 즉 $a=\sqrt{3}$일 때 성립)

$\sqrt{3}$은 a의 범위에 포함되므로

(직선 OP의 기울기)$=4-\left(a+\frac{3}{a}\right)\le 4-2\sqrt{3}$

47. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 11월 수능 나형 #12

집합 U를

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d\text{는 1이 아닌 양수}\right\}$$

라 하자. U의 부분집합 S를

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ \log_a d=\log_b c,\ a\ne b,\ bc\ne 1\right\}$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이면 $A\in S$이다.

ㄴ. $A\in U$이고 A가 역행렬을 가지면 $A\in S$이다.

ㄷ. $A\in S$이면 A는 역행렬을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이면

$\log_4 2=\log_9 3=\frac{1}{2}$ 이므로

$A\in S$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$이면 $A\in U$이고,

$2\cdot 5-3\cdot 4=-2\ne 0$이므로

행렬A의 역행렬이 존재한다. 그러나

$\log_2 5>2$, $\log_3 4<2$ 에서

$\log_2 5\ne\log_3 4$이므로 $A\notin S$ (거짓)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S$이면

$\log_a d=\log_b c$이므로 $d=a^{\log_b c}$

$$ad-bc=a\cdot a^{\log_b c}-bc$$
$$=a^{1+\log_b c}-bc$$
$$=a^{\log_b bc}-bc$$
$$=(bc)^{\log_b a}-bc$$
$$\ne 0\quad(\because\ \log_b a\ne 1)$$

이므로 행렬A는 역행렬을 갖는다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

48. ●●●● 기출 | 고2 - 2013년 06월 서울 A형 #14

행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$과 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p : $x>a$

q : 행렬 $A-xE$의 역행렬이 존재한다.

p는 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최솟값은? (단, E는 단위행렬이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제풀이

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$에서 $A-xE=\begin{pmatrix} 3-x & 4 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}$

행렬 $A-xE$의 역행렬이 존재하려면

$(3-x)(1-x)-4\times 2\ne 0$

$x^2-4x-5\ne 0$

$(x-5)(x+1)\ne 0$

$x\ne 5$이고 $x\ne -1$

조건 p를 만족하는 집합을 P, 조건 q를 만족하는 집합을 Q라 할 때

$P=\{x\mid x>a\}$

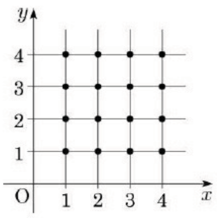
$Q=\{x\mid x<-1,\ -1<x<5,\ x>5\}$

p는 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 $a\ge 5$이다.

따라서 a의 최솟값은 5이다.

49. ●●●● 기출 | 고2 - 2011년 06월 서울 나형 #29

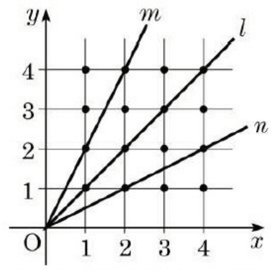
그림은 좌표평면에 직선 $x=m\,(m=1, 2, 3, 4)$과 직선 $y=n$ $(n=1, 2, 3, 4)$의 교점을 나타낸 것이다.



16개의 교점 중 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 차례로 택하여 두 점의 x, y좌표를 성분으로 하는 행렬 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$를 만든다.
예를 들어 차례로 택한 두 점의 좌표가 각각 (1, 3), (2, 4)이면 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$가 만들어지고, 차례로 택한 두 점의 좌표가 각각 (2, 4), (1, 3)이면 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$이 만들어진다.
이와 같이 위의 16개의 교점 중 서로 다른 두 점을 차례로 택하여 만든 행렬 중에서 역행렬을 갖지 않는 것의 개수를 구하시오.

문제풀이

서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 택하여 만든 행렬 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으려면
$x_1y_2-x_2y_1=0$이어야 한다.
이때, x_1, x_2, y_1, y_2는 모두 0이 아니므로
$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$
따라서 세 점 O, (x_1, y_1), (x_2, y_2)가 한 직선 위에 있을 때 역행렬이 존재하지 않는다.



두 점을 택하는 순서에 따라 서로 다른 행렬이 만들어지므로
(i) 직선 l 위의 두 점을 택한 경우
$\quad {}_4\mathrm{P}_2=12$ (개)
(ii) 직선 m 위의 두 점을 택한 경우
$\quad {}_2\mathrm{P}_2=2$ (개)
(iii) 직선 n 위의 두 점을 택한 경우
$\quad {}_2\mathrm{P}_2=2$ (개)
그러므로 역행렬을 갖지 않는 행렬의 개수는
$12+2+2=16$ 이다.

50. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 06월 모평 나형 #12

이차정사각행렬 A는 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $A^3+E=O$
(나) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 영행렬이고 E는 단위행렬이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제풀이

$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$의 양변에 A^2을 곱하면
$A^2A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A^2A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
$A^3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
$\therefore\ A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=-A^3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$\qquad =E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(\because A^3+E=O)$
$\qquad =\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$\therefore\ a=1,\quad b=1$
$\therefore\ a+b=2$