

[08차] 수원 : 행렬 > 역행렬과 연립일차방정식 - 고급 50제

1. 기출 | 고3 - 2012년 10월 서울 가형 #17

두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2B + AB^2 = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)

- < 보 기 >
- ㄱ. $(A+B)^{-1}$ 이 존재한다.
 - ㄴ. $A+B=E$ 이면 $A^3=E$ 이다.
 - ㄷ. $A^2B=BA^2$ 이면 $AB=BA$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

2. 기출 | 고3 - 2012년 06월 모평 나형 #26

역행렬을 갖는 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 x, y 의 연립방정식

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=2 \end{cases}$$

의 해가 $x=5, y=4$ 일 때, $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

3. 기출 | 고3 - 2012년 06월 모평 가형 #14

집합 S 가

$$S = \{M \mid M \text{은 이차정사각행렬이고 } M^2 = M\}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)

- < 보 기 >
- ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S$
 - ㄴ. $A \in S$ 이고 A 의 역행렬이 존재하면 $A=E$ 이다.
 - ㄷ. $A+E \in S$ 이면 $A^4 \in S$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 기출 | 고3 - 2009년 03월 서울 나형 #12

두 이차정사각행렬 A, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $A(E+B) = E$
- (나) $AB - BA = A+B$

다음 중 행렬 $(AB)^{20}$ 과 항상 같은 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)

- ① $-E$ ② $20E$ ③ $-A$ ④ A ⑤ $20A$

5. 기출 | 고3 - 2008년 11월 수능 가형 #12

집합 U 를

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \text{는 } 1 \text{이 아닌 양수} \right\}$$

라 하자. U 의 부분집합 S 를

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \log_a d = \log_b c, a \neq b, bc \neq 1 \right\}$$

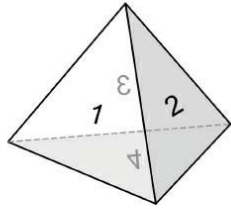
이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

- < 보 기 >
- ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 이면 $A \in S$ 이다.
 - ㄴ. $A \in U$ 이고 A 가 역행렬을 가지면 $A \in S$ 이다.
 - ㄷ. $A \in S$ 이면 A 는 역행렬을 가진다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 기출 | 고2 - 2008년 09월 서울 나형 #20

각 면에 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 정사면체 주사위를 두 번 던져서 바닥에 닿는 면에 적혀 있는 수를 차례로 a, b 라 하자. 임의의 실수 t 에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a-3 & a+1 \\ b-2 & t \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하도록 하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. ●●● 기출 | 고3 - 2008년 03월 서울 가형 #24

표는 두 등산화 A, B를 각각 한 켤레씩 만드는 데 필요한 가죽과 고무의 양을 나타낸 것이다.

(단위 : kg)		
	A	B
가죽	0.6	0.3
고무	0.5	0.4

가죽 45kg, 고무 42kg을 모두 사용하여 등산화 A를 x 켤레, 등산화 B를 y 켤레 만든다고 할 때, 다음은 x 와 y 의 값을 구하는 식을 행렬로 나타낸 것이다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} a-3 & a+1 \\ b-2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

이때 두 상수 a, b 에 대하여 $(a-b)^2$ 의 값을 구하시오.

8. ●●● 기출 | 고3 - 2013년 11월 수능 B형 #17

그림과 같이 반지름의 길이가 r_1 인 세 원 C_1, C_2, C_3 의 중심과 반지름의 길이가 r_2 인 두 원 O_1, O_2 의 중심이 모두 한 직선 위에 있다.

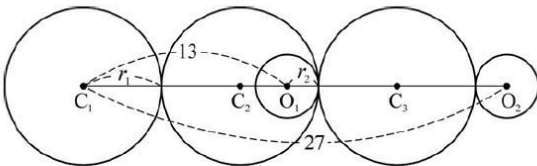
두 원 C_1, C_2 는 외접하고, 두 원 C_2, C_3 이 외접한다. 두 원 C_1, C_3 은 만나지 않는다.

원 O_1 은 원 C_2 에 내접하고 원 C_3 에 외접한다. 원 O_2 는 원 C_3 에 외접하고 원 C_2 와 만나지 않는다.

원 C_1 과 원 O_1 의 중심거리가 13이고 원 C_1 과 원 O_2 의 중심거리가 27일 때, r_1, r_2 에 대한 연립일차방정식을 행렬을 이용하여

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -5 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 27 \end{pmatrix}$$

과 같이 나타낼 수 있다.



$10(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, $r_1 > r_2$)

10. ●●● 기출 | 고3 - 2012년 04월 경기 가형 #14

두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB + A^2B = E, \quad (A-E)^2 + B^2 = O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.)

<보기>

ㄱ. B 의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. $(A^3 - A)^2 + E = O$

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. ●●● 기출 | 고2 - 2008년 09월 서울 가형 #30

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 행렬 A 의 역행렬이 존재하면 $(ABA^{-1})^2 = AB^2A^{-1}$ 이다.

ㄴ. 행렬 A 의 역행렬이 존재하면 행렬 A^2 의 역행렬도 존재한다.

ㄷ. 행렬 AB 의 역행렬이 존재하지 않으면 행렬 A 의 역행렬도 존재하지 않는다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. ●●● 기출 | 고3 - 2009년 11월 수능 가형 #13

이차정사각행렬 A 와 행렬 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$(BA)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 일 때, 행렬 $(AB)^2$ 은?

- ① $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

12. ●●● 기출 | 고3 - 2010년 06월 모평 나형 #29

이차정사각행렬 A, B, P 가

$$AP = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad BP = P \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

를 만족시킨다. P 가 역행렬을 가질 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $a=c$ 이고 $b=d$ 이면 $A=B$ 이다.
 ㄴ. $AB=BA$
 ㄷ. $A-B$ 가 역행렬을 가지면 $a \neq c$ 이고 $b \neq d$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. ●●● 기출 | 고3 - 2013년 09월 모평 A형 #18

두 이차정사각행렬 A, B 가

$$2A - A^2B = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)

<보 기>

- ㄱ. $A^{-1} = 2E - AB$
 ㄴ. $AB = BA$
 ㄷ. $A = \frac{1}{2}(E + BA^2)$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. ●●● 기출 | 고3 - 2006년 09월 모평 나형 #25

수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)$ 에 대하여 선분 AB 를 2 : 3으로 내분하는 점을 $P(p)$, 3 : 2로 내분하는 점을 $Q(q)$ 라 하자. 이차정사각행렬 M 을 이용하여 $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 로 나타낼 때, 행렬 M^{-1} 의 모든 성분의 곱을 구하시오.

15. ●●● 기출 | 고3 - 2008년 10월 서울 나형 #20

정수 a, b, c 에 대하여 행렬 A 를 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ 라 하자.

$|b| \leq 100$ 일 때, $A = A^{-1}$ 을 만족하는 행렬 A 의 개수를 구하시오.

16. ●●● 기출 | 고3 - 2013년 11월 수능 A형 #19

두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB + A^2B = E, \quad (A - E)^2 + B^2 = O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.)

<보 기>

- ㄱ. B 의 역행렬이 존재한다.
 ㄴ. $AB = BA$
 ㄷ. $(A^3 - A)^2 + E = O$

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. ●●● 기출 | 고2 - 2010년 06월 부산 가형 #27

좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 두 점 $A(1, 2), B(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식을 각각 l_1, l_2 라 하자. 두 접선 l_1, l_2 의 교점의 좌표 (x, y) 는 다음과 같이 행렬을 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

이차정사각행렬 M 의 모든 성분의 합이 k 일 때, $100k$ 의 값을 구하시오.

18. ●●● 기출 | 고3 - 2009년 07월 인천 가형 #17

기울기가 0이 아닌 두 직선 $y = ax + b, y = cx + d$ 에 대하여 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라고 정의할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 행렬 A 의 역행렬이 존재한다.
 ㄴ. 두 직선이 일치하면 행렬 A 의 역행렬이 존재하지 않는다.
 ㄷ. 두 직선이 x 축 위에서 만나면 행렬 A 의 역행렬이 존재하지 않는다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. ●●● 기출 | 고2 - 2006년 09월 서울 나형 #21

어느 스포츠 센터의 회원들은 수영과 요가 중에 한 가지만 배우며 지난달의 전체 회원의 수는 160명이었다. 이번 달은 지난달에 비해 수영을 배우는 회원의 수는 5% 증가하고, 요가를 배우는 회원의 수는 10% 감소하여 전체 회원의 수는 7명이 감소하였다. 지난달에 수영과 요가를 배운 회원의 수를 각각 x , y 라 하면 x , y 사이의 관계는 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ -140 \end{pmatrix}$ 과 같이 행렬을 사용하여 나타낼 수 있다. 두 상수 a , b 에 대하여 $a - b$ 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

20. ●●● 기술 | 고3 - 2008년 09월 모평 가형 #16

다음은 이차정사각행렬 A 와 서로 다른 두 실수 p , q 에 대하여 $A - pE$ 와 $A - qE$ 가 모두 역행렬을 갖지 않으면

$$A^2 - (p+q)A + pqE = O$$

임을 증명한 것이다. (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.)

<증명>

$$B = A - \frac{p+q}{2}E, k = \boxed{\text{(가)}} \text{라 하면}$$

$B - kE = A - pE$ 이고 $B + kE = A - qE$ 이므로 $B - kE$ 와 $B + kE$ 는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하면,

$$k \neq 0 \text{이므로 } a + d = \boxed{\text{(나)}} \text{이고 } ad - bc = -k^2 \text{이다.}$$

그런데 $B^{-1} = \frac{1}{\Delta} \boxed{\text{(다)}}$ 이므로

세 상수 a, b, c 에 대하여 행렬 A 를 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 라 하자. 행렬 A 의 역행렬이 존재하지 않을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. a, b, c 는 이 순서로 등비수열을 이룬다.
ㄴ. $A + E$ 의 역행렬이 존재한다. (단, E 는 단위행렬이다.)
ㄷ. $A^2 = A$ 이면 $a + c = 1$ 이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. ●●● 기술 | 고3 - 2007년 03월 서울 나형 #17

철수는 집에서 5km 떨어진 학교에 갈 때, 처음 x km는 매시 4km의 속력으로 걸어서 가고, 나머지 y km는 매시 8km의 속력으로 뛰어서 간다. 그리고 학교에서 집으로 올 때는 처음 y km는 매시 4km의 속력으로 걸어서 오고, 나머지 x km는 매시 8km의 속력으로 뛰어서 온다. 철수가 학교에서 집으로 올 때 걸리는 시간은 집에서 학교로 갈 때 걸리는 시간보다 15분이 더 걸린다고 한다. 이를 만족하는 x, y 에 대하여 등식

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

가 성립할 때, $p - q$ 의 값은? (단, p, q 는 상수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

23. ●●● 기술 | 고3 - 2008년 09월 모평 나형 #16

$$A^2 - (p+q)A + pqE = (A - pE)(A - qE) = O$$

가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|-----------------|-----|-----|
| ① | $\frac{p-q}{2}$ | 0 | -B |
| ② | $\frac{p+q}{2}$ | 0 | -B |
| ③ | $\frac{p-q}{2}$ | 0 | B |
| ④ | $\frac{p+q}{2}$ | 1 | -B |
| ⑤ | $\frac{p-q}{2}$ | 1 | B |

21. ●●● 기술 | 고3 - 2006년 09월 모평 가형 #15

다음은 이차정사각행렬 A 와 서로 다른 두 실수 p, q 에 대하여 $A - pE$ 와 $A - qE$ 가 모두 역행렬을 갖지 않으면

$$A^2 - (p+q)A + pqE = O$$

임을 증명한 것이다. (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.)

<증명>

$$B = A - \frac{p+q}{2}E, k = \boxed{\text{(가)}} \text{라 하면}$$

$B - kE = A - pE$ 이고 $B + kE = A - qE$ 이므로 $B - kE$ 와 $B + kE$ 는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하면,

$$k \neq 0 \text{이므로 } a + d = \boxed{\text{(나)}} \text{이고 } ad - bc = -k^2 \text{이다.}$$

그런데 $B^{-1} = \frac{1}{k^2} \boxed{\text{(다)}}$ 이므로

$$A^2 - (p+q)A + pqE = (A - pE)(A - qE) = O$$

가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|-----------------|-----|-----|
| ① | $\frac{p-q}{2}$ | 0 | -B |
| ② | $\frac{p+q}{2}$ | 0 | -B |
| ③ | $\frac{p-q}{2}$ | 0 | B |
| ④ | $\frac{p+q}{2}$ | 1 | -B |
| ⑤ | $\frac{p-q}{2}$ | 1 | B |

24. ●●● 기출 | 고3 - 2007년 09월 모평 나형 #15

모든 성분이 양수인 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $L(A)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$L(A) = \begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b \\ \log_2 c & \log_2 d \end{pmatrix}$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때, $L(3A) = 3A$ 이다.
- ㄴ. $L(A) = E$ 를 만족시키는 행렬 A 는 역행렬을 갖는다. (단, E 는 단위행렬이다.)
- ㄷ. $L(A^2) = 2L(A)$ 를 만족시키는 행렬 A 가 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. ●●● 기출 | 고2 - 2009년 11월 경기 나형 #19

그림은 어느 해 3월 달력의 일부분을 나타낸 것이다. 그림에 붉은 실선으로 표시된 직사각형 안에 있는 수 a, b, c, d 를 성분으로 하는 이차정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 연립방정식 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta$ 라 하자. $\alpha - \beta = 1$ 일 때, 그 해의 4월 14일의 요일은?

- ① 월요일 ② 화요일 ③ 수요일 ④ 목요일 ⑤ 금요일

28. ●●● 기출 | 고3 - 2007년 06월 모평 가형 #11

집합 $S = \left\{ M \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M \text{은 이차정사각행렬} \right\}$ 의 두 원소 A, B 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $AB \in S$
- ㄴ. A 의 역행렬 A^{-1} 이 존재하면 $A^{-1} \in S$ 이다.
- ㄷ. $A^2 = A$ 를 만족하는 행렬 A 는 무수히 많다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. ●●● 기출 | 고2 - 2011년 06월 서울 가형 #19

세 이차정사각행렬 A, B, C 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $AB = BC$
- (나) B 의 역행렬이 존재한다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)

<보 기>

- ㄱ. $A = E$ 이면 $C = E$ 이다.
- ㄴ. A 의 역행렬이 존재하면 C 의 역행렬도 존재한다.
- ㄷ. $A^7 B = BC^7$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. ●●● 기출 | 고2 - 2009년 09월 부산 가형 #10

두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 $A^2 = A$ 이고 $B = -A$ 일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $A^3 = A$
- ㄴ. $B^2 = -B$
- ㄷ. $A + 3E$ 는 역행렬을 갖는다. (단, E 는 단위행렬이다.)

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

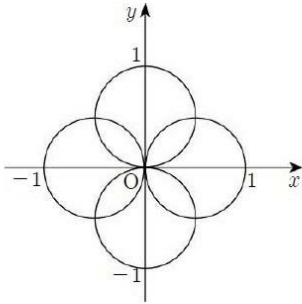
29. ●●● 기출 | 고2 - 2009년 11월 경기 나형 #29

행렬 $\begin{pmatrix} m-7 & 5 \\ 5 & m-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 가 역행렬을 갖지 않도록 하는 모든 실수 m 의 값의 합을 구하시오.

30. ●●● 기출 | 고2 - 2009년 09월 부산 나형 #12

반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 4개의 원이 그림과 같이 놓여 있다.

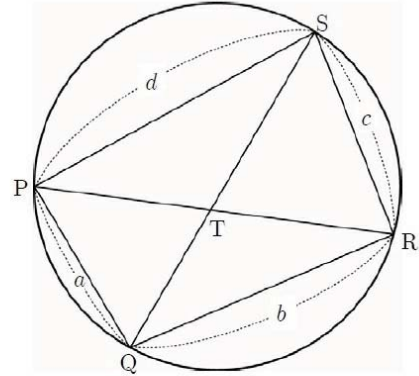
주어진 4개의 원과 원 $(x-1)^2 + y^2 = k$ ($k=1, 2, 3, 4$)의 서로 다른 교점의 개수를 a_k 라 하자. 이 때, $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}$ 을 만족시키는 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값은?



- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

31. ●●● 기출 | 고2 - 2010년 11월 경기 가형 #15

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 PQRS의 두 대각선 PR과 QS가 만나는 점을 T라 하고, $\overline{PQ}=a$, $\overline{QR}=b$, $\overline{RS}=c$, $\overline{SP}=d$ 라 하자. 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



< 보 기 >

ㄱ. $\triangle PQS$ 와 $\triangle QRS$ 의 넓이가 같다.
 ㄴ. $\overline{PT} = \overline{RT}$
 ㄷ. $\triangle PQT$, $\triangle QRT$, $\triangle RST$, $\triangle SPT$ 의 넓이를 각각 M_1, M_2, M_3, M_4 라 할 때, 행렬 $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ 의 역행렬은 존재하지 않는다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

32. ●●● 기출 | 고3 - 2009년 07월 인천 나형 #17

기울기가 0이 아닌 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$ 에 대하여 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라고 정의할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

- ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 행렬 A 의 역행렬이 존재한다.
 ㄴ. 두 직선이 일치하면 행렬 A 의 역행렬이 존재하지 않는다.
 ㄷ. 두 직선이 x 축 위에서 만나면 행렬 A 의 역행렬이 존재하지 않는다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33. ●●● 기출 | 고2 - 2012년 05월 모평 가형 #15

두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 = A - E, \quad (AB)^2 = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)

< 보 기 >

- ㄱ. A 와 B 는 모두 역행렬을 가진다.
 ㄴ. $BAB = -A^2$
 ㄷ. $B^2AB^2 = A^2 + B^2$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. ●●● 기출 | 고2 - 2008년 11월 경기 나형 #27

집합 $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 2, x, y \text{는 실수}\}$ 의 임의의 원소 (a, b) 에 대하여 행렬 $P = \begin{pmatrix} 1 & m \\ a+3 & b+3 \end{pmatrix}$ 이 역행렬 P^{-1} 를 갖지 않을 때, m 의 최댓값을 구하시오. (단, m 은 실수이다.)

35. ●●● 기출 | 고2 - 2011년 09월 인천 가형 #20

세 이차정사각행렬 A, B, C 와 단위행렬 E 에 대하여 $ABC = E$ 가 성립할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A^{-1} = BC$
 ㄴ. $BCA = CAB$
 ㄷ. 행렬 B 의 역행렬이 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36. 기출 | 고3 - 2014년 03월 서울 A형 #19

두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 = BA + E, (A - B + 2E)(A - B - 2E) = O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. A 의 역행렬이 존재한다.
 ㄴ. $A^2 + B^2 = 2AB + 4E$
 ㄷ. A 의 모든 성분의 합이 2이면 B 의 모든 성분의 합은 -6 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 기출 | 고2 - 2013년 06월 서울 A형 #28

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 행렬 A 의 역행렬이 존재하면 $(ABA^{-1})^2 = AB^2A^{-1}$ 이다.
 ㄴ. 행렬 A 의 역행렬이 존재하면 행렬 A^2 의 역행렬도 존재한다.
 ㄷ. 행렬 AB 의 역행렬이 존재하지 않으면 행렬 A 의 역행렬도 존재하지 않는다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

40. 기출 | 고3 - 2011년 11월 수능 나형 #15

두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 + B = 3E, A^4 + B^2 = 7E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $AB = BA$
 ㄴ. $B^{-1} = A^2$
 ㄷ. $A^6 + B^3 = 18E$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 9^{-a} \\ 27 & 3^b \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않도록 음이 아닌 두 실수 a, b 의 값을 정할 때, 점 (a, b) 가 나타내는 도형의 길이를 l 이라 하자. $4l^2$ 의 값을 구하시오.

38. 기출 | 고2 - 2006년 09월 서울 나형 #19

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 전체의 집합을 M 이라 할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $(2, 4) \in M$
 ㄴ. $(a, b) \in M$ 이면 $(-a, -b) \in M$ 이다.
 ㄷ. $(a, b) \in M, (c, d) \in M$ 이면 $(a+c, b+d) \in M$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39. 기출 | 고3 - 2012년 04월 경기 나형 #14

41. 기출 | 고3 - 2010년 03월 서울 나형 #14

두 이차정사각행렬 A, B 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^2 = 2A + E$
 (나) $AB = 2E$
 (다) 행렬 A 의 모든 성분의 합은 7이다.

행렬 B 의 모든 성분의 합은? (단, E 는 단위행렬이다.)

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

42. 기출 | 고2 - 2012년 09월 인천 나형 #15

0이 아닌 실수 k 와 두 이차정사각행렬 A, B 가
 $A^2 + A + E = O, B^{-1} = A + kE$ 을 만족시킬 때
 $(A^2 B^2)^{-1} = (\square(가))A + (1 - 2k)E$ 임을 증명하는 과정이다.
 (단, E 는 단위행렬이고 O 는 영행렬이다.)

<증명>

$$A^2 + A + E = O \text{에서}$$

$$A^{-1} = \square(나)(A + E)$$

$$B^{-1} = A + kE \text{이므로}$$

$$(A + kE)B = E = B(A + kE) \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } AB = BA$$

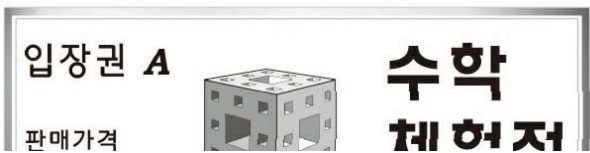
$$\begin{aligned} (A^2 B^2)^{-1} &= (A^{-1})^2 (B^{-1})^2 = (A^{-1} B^{-1})^2 \\ &= \{kA + \square(다)E\}^2 \\ &= \square(가)A + (1 - 2k)E \end{aligned}$$

위 증명에서 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$ 라 하고
 (나)에 알맞은 값을 p 라 할 때, $f(p) \times g(p)$ 의 값은?

- ① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

43. 기술 | 고3 - 2013년 04월 경기 A형 #17

그림은 어느 고등학교의 수학 동아리에서 만든 두 종류의 수학체험전 입장권이다.



어느 회사에서 두 종류의 제품 P, Q를 생산하고 있다. P, Q를 각각 한 개씩 생산할 때 사용되는 금과 은의 양은 다음과 같다.

(단위: g)

제품 \ 소재	금	은
P	4	1
Q	2	3

이 회사에서 금 130g과 은 145g을 모두 사용하여 P, Q를 각각 x 개, y 개 만들었다. 이때, 등식 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \end{pmatrix}$ 가 성립한다. 두 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

- ① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

45. 기술 | 고2 - 2012년 06월 서울 나형 #27

행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A + E$ 의 역행렬은 $A + 2E$ 이다.

(나) $(A + 3E) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$a^2 + d^2$ 의 값을 구하시오. (단, E 는 단위행렬이다.)

46. 기술 | 고2 - 2013년 06월 서울 A형 #21

1000원 세미인
 입장권의 판매금액의 일부는 불우 이웃 돕기 성금으로 사용됩니다.

입장권 B 수학 체험전
 판매가격 500원
 입장권의 판매금액의 일부는 불우 이웃 돕기 성금으로 사용됩니다.

수학동아리에서는 입장권 A를 x 매, 입장권 B를 y 매로 총 500매를 만들어 이를 모두 판매하였다.

이 동아리에서는 입장권 A의 한 매당 판매가격의 70%, 입장권 B의 한 매당 판매가격의 40%를 적립한 총 금액 250000원을 불우 이웃 돕기 성금으로 내었다.

x 와 y 의 값을 구하는 식을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

이때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

44. 기술 | 고2 - 2012년 06월 서울 나형 #18

x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ b & a-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 가 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 두 상수 a, b 에 대하여 원점 O와 점 $P(a, b)$ 를 지나는 직선의 기울기의 최댓값은?

- ① $4 - 2\sqrt{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $2 - \sqrt{3}$
 ④ $\sqrt{3} - 1$ ⑤ 1

47. 기술 | 고3 - 2008년 11월 수능 나형 #12

집합 U 를

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \text{는 } 1 \text{이 아닌 양수} \right\}$$

라 하자. U 의 부분집합 S 를

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \log_a d = \log_b c, a \neq b, bc \neq 1 \right\}$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 이면 $A \in S$ 이다.

ㄴ. $A \in U$ 이고 A 가 역행렬을 가지면 $A \in S$ 이다.

ㄷ. $A \in S$ 이면 A 는 역행렬을 가진다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

48. 기술 | 고2 - 2013년 06월 서울 A형 #14

행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 과 실수 x 에 대한 두 조건 p, q 가 다음과 같다.

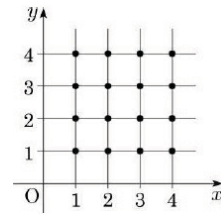
$p: x > a$
 $q: \text{행렬 } A - xE \text{ 의 역행렬이 존재한다.}$

p 는 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a 의 최솟값은?
 (단, E 는 단위행렬이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

49. ●●● 기술 | 고2 - 2011년 06월 서울 나형 #29

그림은 좌표평면에 직선 $x=m$ ($m=1, 2, 3, 4$) 과 직선 $y=n$ ($n=1, 2, 3, 4$) 의 교점을 나타낸 것이다.



16개의 교점 중 서로 다른 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 차례로 택하여 두 점의 x, y 좌표를 성분으로 하는 행렬 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ 를 만든다.

예를 들어 차례로 택한 두 점의 좌표가 각각 $(1, 3), (2, 4)$ 이면 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 가 만들어지고, 차례로 택한 두 점의 좌표가 각각 $(2, 4), (1, 3)$ 이면 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 이 만들어진다.

이와 같이 위의 16개의 교점 중 서로 다른 두 점을 차례로 택하여 만든 행렬 중에서 역행렬을 갖지 않는 것의 개수를 구하시오.

50. ●●● 기술 | 고3 - 2006년 06월 모평 나형 #12

이차정사각행렬 A 는 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $A^3 + E = O$
 (나) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, O 는 영행렬이고 E 는 단위행렬이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

(주)에듀프레스 || www.CYGong.com