1. ●●●● 기출 | 고2 - 2012년 09월 인천 나형 #28

행렬 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 넓이를 $S(M)$이라 하자. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 30 & 20 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 X가 $AX=B$를 만족시킬 때, $\frac{1}{\pi}S(X)$의 값을 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 30 & 20 \end{pmatrix}$에 대하여

$AX=B$이므로 $X=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$

$(10,\ 0)$, $(-10,\ 10)$을 지름의 양 끝점으로 하는

원의 반지름은 $5\sqrt{5}$ $\quad\therefore \frac{1}{\pi}S(X)=125$

2. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 03월 서울 가형 #22

행렬 $A=\begin{pmatrix} m & 0 \\ m-5 & 5 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^n의 모든 성분의 합이 2^{49}이 되도록 하는 두 자연수 $m,\ n$의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$A^2=\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ m^2-5^2 & 5^2 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} m^3 & 0 \\ m^3-5^3 & 5^3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

이므로 $A^n=\begin{pmatrix} m^n & 0 \\ m^n-5^n & 5^n \end{pmatrix}$임을 추론할 수 있다.

따라서 A^n의 모든 성분의 합은 $2m^n=2^{49}$이다.

$\therefore\ m^n=2^{48}$

이때, $m,\ n$은 자연수이므로 n은 $48=2^4\times 3$의 약수이다.

따라서 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$(4+1)(1+1)=10$이다.

3. ●●●● 기출 | 고2 - 2008년 09월 서울 나형 #27

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 $X,\ Y$에 대하여 $X+Y=E$, $XY=O$일 때, 행렬 A를 $A=3X+Y$라 하면 $A^3=aX+Y$이다. a의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)

문제풀이 www.CYGong.com

$X=X(X+Y)=X^2+XY=X^2$ 이므로

$X^3=X^2X=X,\ X^4=X^3X=X^2=X,\ \cdots$

즉, $X^n=X$ (n은 자연수) ⋯ ㉠

마찬가지 방법으로 정리하면

$Y^n=Y$ (n은 자연수) ⋯ ㉡

또한 $X=X(X+Y)=(X+Y)X$

$\therefore\ XY=YX=O$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터

$A^3=(3X+Y)^3$

$\quad=3^3X^3+3\cdot 3X\cdot Y(3X+Y)+Y^3$

$\quad=3^3X+Y$

따라서 $a=27$이다.

4. ●●●● 기출 | 고2 - 2010년 06월 부산 나형 #13

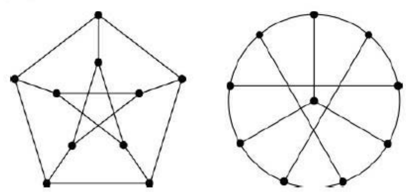
그래프와 행렬에 대하여 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 그래프를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 변의 개수의 2배이다.

ㄴ. 7개 팀이 출전하는 어떤 축구 경기에서 모든 팀이 홀수 번 경기하도록 대진표를 짤 수 있다.

ㄷ. 두 그래프



는 서로 같은 그래프이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. 모든 변은 꼭짓점을 항상 2개씩 가진다. (참)

ㄴ. 각 팀을 꼭짓점으로, 시합을 변으로 생각하면 대진표는 그래프가 된다. 홀수 점의 수가 짝수 개이어야 하므로 7개 팀이 모두 홀수 번 시합하는 것은 불가능하다. (거짓)

ㄷ. 꼭짓점 주위의 변의 수와 연결 상태를 살펴보면 두 그래프는 같다. (참)

5. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 11월 수능 나형 #28

이차정사각행렬 A와 B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O은 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $(A+B)^2=(A-B)^2$이면 $AB=O$이다.
ㄴ. $A^2=E$, $B^2=B$이면 $(ABA)^2=ABA$이다.
ㄷ. $A(A+E)=E$, $AB=-E$이면 $B^2=A+2E$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이라 하면

$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$이므로

$(A+B)^2=(A-B)^2=2E$

그러나 $AB=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\neq O$ (거짓)

ㄴ. $A^2=E$, $B^2=B$이면

$(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$
$=ABEBA=AB^2A=ABA$ (참)

ㄷ. $A(A+E)=E$ 이면 $A^2+A=E$

양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$A^2B+AB=B$

$AB=-E$ 이므로 $-A-E=B$

따라서

$B^2=(-A-E)^2=A^2+2A+E$
$=(A^2+A)+(A+E)=E+A+E$
$=A+2E$ (참)

6. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 06월 모평 나형 #14

행렬 $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$에 대하여 집합 S가

$S=\{A\,|\,A$는 이차정사각행렬이고, $PAP=A\}$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $P\in S$
ㄴ. $A\in S$이고 $B\in S$이면 $AB\in S$이다.
ㄷ. $A\in S$이고 $A^2=O$이면 $A=O$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. (참) $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이므로

$PPP=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ P\in S$

ㄴ. (참) $PAP=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=A$,

$PBP=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=B$이므로

$AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}AB\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ AB\in S$

ㄷ. (참)$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 두면 $A\in S$이므로

$PAP=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=A$

$\therefore\ a=d,\ b=c$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$

또, $O=A^2$이므로

$\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2&2ab\\2ab&a^2+b^2\end{pmatrix}$

$\therefore\ a^2+b^2=0,\ 2ab=0$

$\therefore\ a=b=0$

그러므로 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

7. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 06월 모평 나형 #17

집합 S가 $S=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 집합 S에 속하는 서로 다른 두 행렬 A, B에 대하여

행렬 $A+B$의 성분은 모두 짝수이다.

ㄴ. 집합 S에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 m개의 행렬 A_1, A_2, $\cdots$, A_m을 선택하였을 때,

$$A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$$

가 되도록 하는 m이 존재한다.

ㄷ. 집합 S에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 n개의 행렬 A_1, A_2, $\cdots$, A_n을 선택하였을 때,

행렬 $\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}+A_1+A_2+\cdots+A_n$

의 성분이 모두 짝수가 되도록 하는 n의 최솟값은 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. (거짓)

[반례] $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$이므로

홀수인 성분이 있다.

ㄴ. (참)

$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$이므로

$3\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$

즉, $A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$를 만족하는 m의 값은 12이다.

ㄷ. (참)

행렬 $\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}$의 모든 성분이 홀수이므로

$A_1+A_2+\cdots+A_n$의 모든 성분도 홀수이어야 한다.

이때, $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$이므로 n의 최솟값은 4이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8. ●●●● 기출 | 고2 - 2013년 11월 경기 A형 #20

두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB+B=A,\ ABA-A^2=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

〈보 기〉

ㄱ. $AB=BA$

ㄴ. $A^3B^3=E$

ㄷ. $(A-E)^{30}=-3^{15}E$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. $ABA-A^2=E$에서

$(AB-A)A=E$ ……㉠

$A(BA-A)=E$ 이고 양변에 $AB-A$를 곱하면

$(AB-A)A(BA-A)=AB-A$

$BA-A=AB-A$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $AB-A=-B$ 이므로 ㉠에서 $-BA=E$

$AB=BA$ 이므로

$A^3B^3=(AB)^3=-E$ (거짓)

ㄷ. $AB=-E$ 이므로 $ABA-A^2=E$ 에서

$A^2+A+E=O$ ……㉡

㉡의 양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$\therefore A^3=E$

㉡에서 $A^2=-A-E$이므로

$(A-E)^2=A^2-2A+E=-3A$

$(A-E)^{30}=(-3A)^{15}=-3^{15}E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

9. ●●●● 기출 | 고2 - 2012년 11월 경기 가형 #19

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

〈보 기〉

ㄱ. $A^2=E$이면 $A=E$이다.

ㄴ. $(A+2B)^2=(A-2B)^2$이면 $AB+BA=O$이다.

ㄷ. $AB=A$, $BA=B$이면 $A^2+B^2=A+B$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $(A+2B)^2=(A-2B)^2$에서

$A^2+2AB+2BA+4B^2=A^2-2AB-2BA+4B^2$

$4AB+4BA=O$

$\therefore AB+BA=O$ (참)

ㄷ. $AB=A$ …… ㉠, $BA=B$ …… ㉡

㉠의 양변 오른쪽에 행렬 A를 곱하면 $ABA=A^2$,

이 식에 ㉡을 대입하면 $A^2=AB=A$이고,

㉡의 양변 오른쪽에 행렬 B를 곱하면 $BAB=B^2$,

이 식에 ㉠을 대입하면 $B^2=BA=B$이다.

$\therefore A^2+B^2=A+B$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

10. ●●●● 기출 | 고2 - 2007년 09월 서울 나형 #29

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&a\\b&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&b-10\\a-10&1\end{pmatrix}$에 대하여 $A+B=O$가 성립한다.

이때, $A^2=kE$를 만족하는 실수 k의 최대값을 구하시오.

(단, a와 b는 실수, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

문제풀이

$A+B=O$이므로

$\begin{pmatrix}1&a\\b&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&b-10\\a-10&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&a+b-10\\a+b-10&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\therefore a+b=10$ …㉠

$\begin{pmatrix}1&a\\b&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\b&-1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1+ab&0\\0&ab+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}$

$\therefore ab+1=k$ …㉡

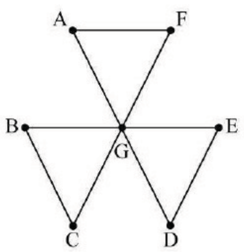
㉠, ㉡에서

$k=ab+1=a(10-a)+1=-(a-5)^2+26$

따라서 k의 최대값은 26이다.

11. ●●●● 기출 | 고2 - 2011년 06월 서울 가형 #26

그림과 같은 그래프가 있다. 이 그래프의 꼭짓점 A에서 꼭짓점 F로 가는 모든 경로의 수를 구하시오.



문제풀이

(i) 변의 개수가 1인 경로 : AF

$\therefore$ 1 (개)

(ii) 변의 개수가 2인 경로 : AGF

$\therefore$ 1 (개)

(iii) 변의 개수가 5인 경로 :

AGBCGF
AGCBGF
AGDEGF
AGEDGF

$\therefore$ 4 (개)

(iv) 변의 개수가 8인 경로 :

AGBCGDEGF
AGCBGDEGF
AGBCGEDGF
AGCBGEDGF
AGDEGBCGF
AGDEGCBGF
AGEDGBCGF

AGEDGCBGF

$\therefore$ 8 (개)

따라서 꼭짓점 A에서 꼭짓점 F로 가는 모든 경로의 수는

$1+1+4+8=14$ (개)

[참고]

(1) 변의 개수가 5인 경로 :

경로 AGP_1P_2GF에서 두 꼭짓점 P_1, P_2를 택하는 경우의 수는

$4\times1=4$ (개)

(2) 변의 개수가 8인 경로 :

경로 $AGP_1P_2GP_3P_4GF$에서 네 꼭짓점 P_1, P_2, P_3, P_4를 택하는 경우의 수는

$4\times1\times2\times1=8$ (개)

12. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 03월 서울 나형 #22

행렬 $A=\begin{pmatrix}m&0\\m-5&5\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^n의 모든 성분의 합이 2^{49}이 되도록 하는 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$A^2 = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ m^2-5^2 & 5^2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} m^3 & 0 \\ m^3-5^3 & 5^3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

이므로 $A^n = \begin{pmatrix} m^n & 0 \\ m^n-5^n & 5^n \end{pmatrix}$ 임을 추론할 수 있다.

따라서 A^n의 모든 성분의 합은 $2m^n = 2^{49}$이다.

$\therefore\ m^n = 2^{48}$

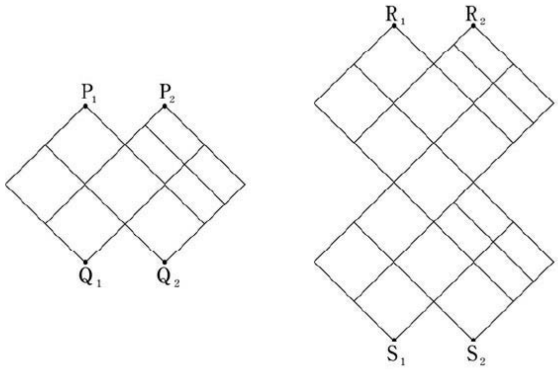
이때, m, n은 자연수이므로 n은 $48 = 2^4 \times 3$의 약수이다.

따라서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$(4+1)(1+1) = 10$이다.

13. ●●●● 기출 | 고3 - 2011년 10월 서울 나형 #20

그림과 같은 두 개의 도로망이 있다.



이차정사각행렬 A의 (i, j)성분 a_{ij} $(i=1, 2, j=1, 2)$를

a_{ij}=(P_i지점에서 도로망을 따라 Q_j지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수)

로 정의하자.

다음 중 R_1지점에서 도로망을 따라 S_2지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수와 같은 것은? (단, 모든 도로는 서로 평행하거나 수직이다.)

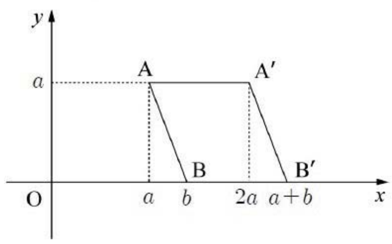
① 행렬 $2A$의 (1, 2)성분
② 행렬 A^2의 (1, 2)성분
③ 행렬 A^2의 (2, 1)성분
④ 행렬 A의 (1, 2)성분과 (2, 2)성분의 곱
⑤ 행렬 A의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 곱

문제풀이 www.CYGong.com

R_1지점에서 도로망을 따라 S_2지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $a_{11}\times a_{12}+a_{12}\times a_{22}$이므로 행렬 A^2의 (1, 2)성분과 같다.

14. ●●●● 기출 | 고2 - 2008년 06월 인천 가형 #10

그림과 같이 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, a)$, $\mathrm{B}(b, 0)$을 각각 x축 방향으로 a만큼 평행이동한 점을 A', B'라 하자. 점 A, A', B, B'의 x좌표들을 성분으로 하는 행렬 M을 $M = \begin{pmatrix} a & 2a \\ b & a+b \end{pmatrix}$라 하고, 이 네 점을 이어서 만든 사각형의 넓이를 $S(M)$이라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$이면 $S(M) = 1$이다.
ㄴ. 양수 k에 대하여 $S(kM) = kS(M)$
ㄷ. 행렬 M의 역행렬이 존재하지 않으면 사각형은 정사각형이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $a=1,\ b=3$이므로

$A(1,\ 1),\ A'(2,\ 1),\ B(3,\ 0),\ B'(4,\ 0)$이다.

$\therefore S(M)=1$ (참)

ㄴ. $kM=\begin{pmatrix} ka & 2ka \\ kb & k(a+b) \end{pmatrix}$이므로

$S(kM)=(ka)^2=k^2a^2$

$kS(M)=ka^2$

$\therefore S(kM)\neq kS(M)$ (거짓)

ㄷ. 역행렬이 존재하지 않으므로

$a(a+b)-2ab=0$

$a(a-b)=0$, a는 양수이므로 $a=b$이고,

이때의 사각형은 정사각형이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 04월 경기 가형 #10

역행렬이 존재하는 이차정사각행렬 A에 대하여 $A+A^{-1}=O$가 성립할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, A^{-1}는 A의 역행렬, O는 영행렬, n은 자연수이다.)

〈보 기〉

ㄱ. $A^3+(A^{-1})^3=O$

ㄴ. $A^{2n}+(A^{-1})^{2n}=O$

ㄷ. $A^{5n}+(A^{-1})^{5n}=O$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $A^{-1}=-A$이고 $A^2=-E$이므로

$A^3=-A$, $(A^{-1})^3=(-A)^3=A$이다.

따라서, $A^3+(A^{-1})^3=O$ (참)

ㄴ. (반례) $n=2$일 때, $A^4+(A^{-1})^4=2E$ (거짓)

ㄷ. (반례) $n=2$일 때, $A^{10}+(A^{-1})^{10}=-2E$ (거짓)

16. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 09월 모평 가형 #25

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^m=A^n$$

을 만족시키는 40 이하의 두 자연수 $m,\ n\ (m>n)$의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$A=A^1$이라고 하면 $A^1=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2=A^1A^1=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A^1=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A^1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

(단, E는 단위행렬)

$\therefore\ A^1=A^5=A^9=\cdots=A^{37}$,

$A^2=A^6=A^{10}=\cdots=A^{38}$,

$A^3=A^7=A^{11}=\cdots=A^{39}$,

$A^4=A^8=A^{12}=\cdots=A^{40}$

따라서 조건을 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

${}_{10}C_2\times 4=\dfrac{10\times 9}{2}\times 4=180$(개)이다.

17. ●●●● 기출 | 고2 - 2010년 06월 부산 가형 #14

이차정사각행렬 $A,\ B$에 대하여 $C(A,\ B)=AB-BA$라 하자. 정수 k에 대하여 이차정사각행렬의 집합 M_k를

$M_k=\{\,(a_{ij})\mid i=1,\ 2,\ j=1,\ 2$에 대하여 $i-j\neq k$이면 $a_{ij}=0\}$

으로 정의할 때, 옳은 내용만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고 E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $A,\ B\in M_0$이면 $C(A,\ B)=O$이다.

ㄴ. $|k|\geq 2$이면 $M_k=\{O,\ E\}$이다.

ㄷ. $|k|<2$일 때, $A,\ B\in M_k$이면 $C(A,B)=O$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $A, B \in M_0$ 이면 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$ 이므로

$AB=BA$ 이다. $\therefore C(A, B)=O$ (참)

ㄴ. $|k| \geq 2$ 이면 임의의 $i, j=1, 2$ 에 대하여 $i-j \neq k$ 이므로 $a_{ij}=0$ 이다.

즉 $A \in M_k$ 이면 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$ 뿐이다. (거짓)

ㄷ. $|k|<2$ 이면 $k=0, 1, -1$ 이다.

$k=0$ 이면 ㄱ에 의해서 참.

$k=1$ 이면 두 행렬

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $AB=BA$ 이고

$k=-1$ 이면 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $AB=BA$

이다. $\therefore C(A, B)=O$ (참)

18. ●●●● 기출 | 고2 - 2013년 09월 인천 A형 #16

다음은 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+6 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2=E$를 만족시키는 행렬 A의 개수를 구하는 과정이다. (단, a, b, c는 정수이고 E는 단위행렬이다.)

A가 $A^2=E$를 만족시키므로

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & 2b\times(a+3) \\ 2c\times(a+3) & (a+6)^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

(i) $a \neq \boxed{(가)}$ 인 경우

$b=0$ 이고 $c=0$ 이므로 $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & (a+6)^2 \end{pmatrix}$ …… ㉠

이다.

㉠에서 $A^2 \neq E$이므로 주어진 조건에 모순이다.

(ii) $a=\boxed{(가)}$ 인 경우

주어진 조건 $A^2=E$에서 $bc=\boxed{(나)}$이다.

b, c가 정수이므로

$bc=\boxed{(나)}$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)의 개수는 $\boxed{(다)}$이다.

따라서 $A^2=E$를 만족시키는 행렬 A의 개수는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

문제풀이 www.CYGong.com

A가 $A^2=E$를 만족시키므로

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & 2b\times(a+3) \\ 2c\times(a+3) & (a+6)^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

이다.

따라서 $b\times(a+3)=c\times(a+3)=0$ 이다.

(i) $a \neq \boxed{-3}$ 인 경우

$b=0$ 이고 $c=0$ 이므로

$A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & (a+6)^2 \end{pmatrix}$ …… ㉠

이다.

㉠에서 $A^2 \neq E$ 이므로 주어진 조건에 모순이다.

(ii) $a=\boxed{-3}$ 인 경우

주어진 조건 $A^2=E$에서 $bc=\boxed{-8}$이다.

b, c가 정수이고 8의 약수의 개수가 4개이므로 $bc=\boxed{-8}$을 만족시키는 순서쌍 (b, c)의 개수는 $\boxed{8}$이다.

따라서 $A^2=E$를 만족시키는 행렬 A의 개수는 $\boxed{8}$이다.

$\therefore$ $p=-3$, $q=-8$, $r=8$

따라서 $p+q+r=-3$

19. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 03월 서울 가형 #15

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$ 에 대하여 행렬 M_{P} 를 $M_{\mathrm{P}}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 로 정의하자.

임의의 두 점 P, Q 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $M_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{Q}}=M_{\mathrm{R}}$인 점 R 가 존재한다.

ㄴ. $M_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{Q}}=M_{\mathrm{Q}}M_{\mathrm{P}}$

ㄷ. 점 P 가 원점이 아니면 $M_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{S}}=E$인 점 S가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

임의의 두 점을 $\mathrm{P}(a, b)$, $\mathrm{Q}(c, d)$라 하면,

$M_{\mathrm{P}}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $M_{\mathrm{Q}}=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$

ㄱ. $M_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{Q}}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$ 에 대응하는 점 $\mathrm{R}\ (ac-bd,\ ad+bc)$ 가 존재한다. (참)

ㄴ. $M_{\mathrm{Q}}M_{\mathrm{P}}=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$

$\therefore\ M_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{Q}}=M_{\mathrm{Q}}M_{\mathrm{P}}$ (참)

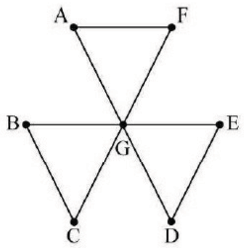
ㄷ. 점 P 가 원점이 아니면 $a^2+b^2\neq 0$ 이므로

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

따라서 $M_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{S}}=E$인 점 $\mathrm{S}\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\ -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$ 가 존재한다. (참)

20. ●●●● 기출 | 고2 - 2011년 06월 서울 나형 #26

그림과 같은 그래프가 있다. 이 그래프의 꼭짓점 A에서 꼭짓점 F로 가는 모든 경로의 수를 구하시오.



문제풀이 www.CYGong.com

(i) 변의 개수가 1인 경로 : AF

$\therefore$ 1 (개)

(ii) 변의 개수가 2인 경로 : AGF

$\therefore$ 1 (개)

(iii) 변의 개수가 5인 경로 :

AGBCGF
AGCBGF
AGDEGF
AGEDGF

$\therefore$ 4 (개)

(iv) 변의 개수가 8인 경로 :

AGBCGDEGF
AGCBGDEGF
AGBCGEDGF
AGCBGEDGF
AGDEGBCGF
AGDEGCBGF
AGEDGBCGF
AGEDGCBGF

$\therefore$ 8 (개)

따라서 꼭짓점 A에서 꼭짓점 F로 가는 모든 경로의 수는

$1+1+4+8=14$ (개)

[참고]

(1) 변의 개수가 5인 경로 :

경로 $\mathrm{AGP_1P_2GF}$에서 두 꼭짓점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$를 택하는 경우의 수는

$4\times1=4$ (개)

(2) 변의 개수가 8인 경로 :

경로 $\mathrm{AGP_1P_2GP_3P_4GF}$에서 네 꼭짓점

$\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$를 택하는 경우의 수는

$4\times1\times2\times1=8$ (개)

21. ●●●● 기출 | 고2 - 2013년 06월 서울 A형 #17

이차정사각행렬 A가 등식 $A^2-2A+E=O$를 만족시킨다. 다음은 n이 2 이상의 자연수일 때, 행렬 A^n을 구하는 과정이다. (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

$A^2-2A+E=O$에서

$A^2-A=A-E$

$A^3-A^2=A(A^2-A)=A(A-E)=A^2-A$

$=A-E$

$A^4-A^3=A(A^3-A^2)=A(A-E)=A^2-A$

$=A-E$

$\vdots$

$A^n-A^{n-1}=A-E$

위 등식들을 변끼리 더하면

$A^n-A=\boxed{(가)}(A-E)$

$\therefore\ A^n=\boxed{(나)}A-\boxed{(가)}E$

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(100)+g(100)$의 값은?

① 191 ② 193 ③ 195 ④ 197 ⑤ 199

문제풀이 www.CYGong.com

$A^2-2A+E=O$에서

$A^2-A=A-E$

$A^3-A^2=A(A^2-A)=A(A-E)=A^2-A$

$=A-E$

$A^4-A^3=A(A^3-A^2)=A(A-E)=A^2-A$

$=A-E$

$\vdots$

$A^n-A^{n-1}=A-E$

위 등식들을 변끼리 더하면

$(A^n-A^{n-1})+(A^{n-1}-A^{n-2})+\cdots+(A^3-A^2)+(A^2-A)$

$=(A-E)+(A-E)+\cdots+(A-E)+(A-E)$

이 식을 정리하면

$A^n-A=\boxed{(n-1)}(A-E)$

$\therefore\ A^n=\boxed{n}A-\boxed{(n-1)}E$

따라서 $f(n)=n-1$, $g(n)=n$이므로

$f(100)+g(100)=99+100=199$

[참고]

$A^2-2A+E=O$에서 $A^2-A=A-E$이므로

$A^n-A^{n-1}=A^{n-2}(A^2-A)=A^{n-2}(A-E)$

$=A^{n-3}(A^2-A)=A^{n-3}(A-E)$

$\vdots$

$=A(A^2-A)=A(A-E)$

$=A^2-A=A-E$

22. ●●●● 기출 | 고2 - 2006년 11월 경기 가형 #19

다음은 자연수 n에 대하여 $A^{n+2}-3A^{n+1}+2A^n=O$을 만족하고 역행렬이 존재하며 단위행렬의 실수배가 아닌 이차정사각행렬 A에 대하여 A^m을 A와 E로 나타내는 과정이다. (단, $m\geq2$인 자연수이고, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

$A^{n+2}-3A^{n+1}+2A^n=O$에서

$A^{n+2}-A^{n+1}=2(A^{n+1}-A^n)$이므로

$A^{n+1}-A^n=\boxed{\text{(가)}}(A-E)$ … ㉠

이 때, ㉠의 n 대신에 $1, 2, 3, \cdots, m-1$을 차례대로 대입하면

$$A^2-A=2(A-E)$$
$$A^3-A^2=2^2(A-E)$$
$$\vdots$$
$$A^m-A^{m-1}=2^{m-1}(A-E)$$

이다.

위 식들의 좌변과 우변을 변변 더하면

$$A^m-A=\left(\boxed{\text{(나)}}\right)(A-E)$$

따라서 $A^m=\left(\boxed{\text{(다)}}\right)A-\left(\boxed{\text{(나)}}\right)E$

위의 과정에서 (가) ~ (다)를 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	2^{n-1}	2^m-1	2^m
②	2^{n-1}	2^m-2	2^m-1
③	2^n	2^m+1	2^m+2
④	2^n	2^m-2	2^m-1
⑤	2^n	2^m-2	2^m

문제풀이

$A^{n+2}-3A^{n+1}+2A^n=O$에서

$A^{n+2}-A^{n+1}=2(A^{n+1}-A^n)$이다. 또한

$n=1$일 때, $A^3-3A^2+2A=O$의 양변에 A^{-1}를 곱하면 $A^2-A=2(A-E)$이므로

$A^{n+1}-A^n=2^n(A-E)$ … ㉠

이때, ㉠의 n 대신에 $1, 2, 3, \cdots, m-1$을 차례대로 대입하면

$$A^2-A=2(A-E)$$
$$A^3-A^2=2^2(A-E)$$
$$\vdots$$
$$A^m-A^{m-1}=2^{m-1}(A-E)$$

이다.

위 식들의 좌변과 우변을 변변 더하면

$$A^m-A=(2^m-2)(A-E)$$

따라서 $A^m=(2^m-1)A-(2^m-2)E$

∴ (가) 2^n (나) 2^m-2 (다) 2^m-1

23. ●●●● 기출 | 고2 - 2011년 06월 서울 나형 #17

그래프 G가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 변의 개수는 7이다.

(나) 모든 변을 빠짐없이 지나는 경로가 존재한다.

그래프 G를 나타내는 행렬이

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & d & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

일 때, $8a+4b+2c+d$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 10 ④ 12 ⑤ 15

문제풀이

그래프 G를 나타내는 행렬의 성질에서

$a=b,\ c=d$ …… ㉠

행렬의 모든 성분의 합은 변의 개수의 2배와 같으므로 조건 (가)에서

$a+b+c+d+12=14$ …… ㉡

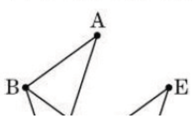
㉠, ㉡에서 $2(a+c)=2$이므로

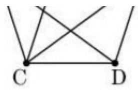
$a+c=1$

그런데 a, c는 0 또는 1의 값을 가지므로 $a=1$, $c=0$ 또는 $a=0$, $c=1$이다.

(ⅰ) $a=1,\ c=0$일 때,

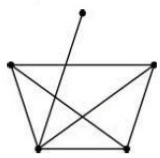
다음과 같이 꼭짓점과 변을 정하면 모든 변을 빠짐없이 지나는 경로 BCABDCED가 존재한다.





(ⅱ) $a=0,\ c=1$일 때,

주어진 행렬이 나타내는 그래프는 조건 (나)를 만족하지 않는다.



따라서 $a=b=1,\ c=d=0$이므로

$8a+4b+2c+d=12$

[참고]

그래프에서 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 홀수인 꼭짓점의 개수가 0 또는 2이면 모든 변을 빠짐없이 지나는 경로가 존재한다.

(ⅰ) $a=1,\ c=0$일 때,

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 2, 3, 4, 3, 2이므로 (나)를 만족한다.

(ⅱ) $a=0,\ c=1$일 때,

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 1, 3, 4, 3, 3이므로 (나)를 만족하지 않는다.

24. ●●●● 기출 | 고2 - 2006년 06월 인천 가형 #16

제 1 문구점의 공책과 연필의 판매단가는 각각 250 원, 150 원 이고, 제 2 문구점의 공책과 연필의 판매단가는 각각 300 원, 100 원이다. 다음 표는 두 문구점의 공책과 연필에 대한 이틀 동안의 판매실적을 나타낸 것이다.

<표1> 제 1 문구점의 판매실적

판매일 \ 종류	공책(권)	연필(자루)
제1일	6	7
제2일	9	4

<표2> 제 2 문구점의 판매실적

판매일 \ 종류	공책(권)	연필(자루)
제1일	7	$x(x-2)$
제2일	x	3

<표1>과 <표2>의 자료로 두 문구점의 매출액을 행렬을 이용하여 비교하려고 한다. 제 1 문구점과 제 2 문구점의 이틀 동안의 매출액이 서로 같게 되는 x에 대하여 제 2 문구점의 제 2 일의 매출액은?

① 1200 원 ② 1800 원 ③ 2400 원
④ 3000 원 ⑤ 3600 원

문제풀이 www.CYGong.com

제 1문구점의 이틀 동안의 매출액

$\begin{pmatrix}6&7\\9&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}250\\150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2550\\2850\end{pmatrix}$

제 2문구점의 이틀 동안의 매출액

$\begin{pmatrix}7&x(x-2)\\x&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300\\100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2100+100x(x-2)\\300x+300\end{pmatrix}$

$100x(x-2)+300x+2400=5400$

$x^2+x-30=0$

$x=-6$ 또는 $x=5$

따라서 $x=5$ ($\because$ $x\geq 2$)

따라서 제 2문구점의 제 2일 매출액은 1800원

25. ●●●● 기출 | 고3 - 2011년 09월 모평 가형 #14

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&1\\a&a\end{pmatrix}$와 이차정사각행렬 B가 다음 조건을 만족시킬 때, 행렬 $A+B$의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 합은?

(가) $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이다.

(나) $AB=2A$이고, $BA=4B$이다.

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

문제풀이 www.CYGong.com

$B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$라 하면 (가)에서

$\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p-q\\r-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore$ $p=q$, $r=s$

$\therefore$ $B=\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}$

이때, (나)에서

$AB=\begin{pmatrix}p+r&p+r\\a(p+r)&a(p+r)\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\a&a\end{pmatrix}$

이므로 $p+r=2$이다.

또,

$BA=\begin{pmatrix}p(1+a)&p(1+a)\\r(1+a)&r(1+a)\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}$

이므로 $1+a=4$ 즉, $a=3$이다.

($\because$ $1+a\neq 4$이면 $p=0$, $r=0$이므로 모순이다.)

따라서 $A+B=\begin{pmatrix}1+p&1+p\\a+r&a+r\end{pmatrix}$의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 합은

$1+p+a+r=1+a+(p+r)$

$=1+3+2=6$

26. ●●●● 기출 | 고3 - 2011년 07월 인천 가형 #26

좌표평면 위의 점 (x, y)를 x축에 대하여 대칭이동시키는 일차변환을 f, 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전이동시키는 일차변환을 g라 하자. 합성변환 h를 $h=f\circ g\circ f$라 할 때, 합성변환 h^{2011}에 의하여 점 (2, 2)가 옮겨지는 점은 (a, b)이다. 이때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, $h^1=h$, $h^{n+1}=h^n\circ h$이다.)

문제풀이 www.CYGong.com

일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

합성변환 h를 나타내는 행렬을 C라 하면

$C=ABA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $C^6=E$이므로

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=C^{2011}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

따라서 $a^2+b^2=8$

27. ●●●● 기출 | 고3 - 2010년 09월 모평 가형 #10

이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 $ABC=E$이고 $ACB=E$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, E는 단위행렬이다.)

보기

ㄱ. $A=E$ 이면 $B=E$ 이다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $A^nB^nC^n=E$ 이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$라고 하면

$A=E$, $ABC=E$, $ACB=E$ 이지만 $B\neq E$ 이다. (거짓)

ㄴ. $ABC=E$ 에서

$C=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$ACB=AB^{-1}A^{-1}B=E$

$B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

$(B^{-1}A^{-1})^{-1}=(A^{-1}B^{-1})^{-1}$

$AB=BA$ (참)

ㄷ. (i) $n=1$일 때 $ABC=E$ 이므로 성립한다.
(ii) $n=k$ 일 때 $A^nB^nC^n=E$가 성립한다고 가정하면

$n=k+1$ 일 때

$A^{n+1}B^{n+1}C^{n+1}$

$=A^nAB^nBC^nC$

$=A^nB^nABC^nC$ (∵ㄴ)

$=A^nB^nC^nABC$ (∵ $(AB)C=C(AB)=E$)

$=E$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 $A^nB^nC^n=E$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

28. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 03월 서울 나형 #29

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}4&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}17&4\\4&1\end{pmatrix}$에 대하여 등식 $(x^2+y^2)A-(x-y)E=B$를 만족시키는 실수 x, y를
$\begin{cases}x=\alpha_1\\y=\beta_1\end{cases}$, $\begin{cases}x=\alpha_2\\y=\beta_2\end{cases}$ 라 하자.
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(\alpha_1, \beta_1)$, $\mathrm{Q}(\alpha_2, \beta_2)$ 사이의 거리는?
(단, E는 단위행렬이다.)

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

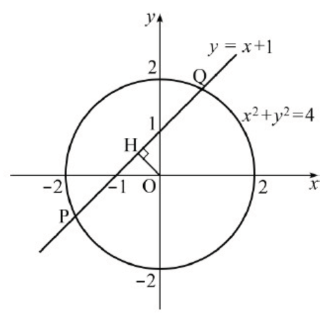
문제풀이

주어진 등식에서

$\begin{pmatrix}4(x^2+y^2)-(x-y) & x^2+y^2\\ x^2+y^2 & -(x-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&4\\4&1\end{pmatrix}$ 이므로

$\begin{cases}x^2+y^2=4\\x-y=-1\end{cases}$

이를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\mathrm{OP}}=2$ 이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{14}$

29. ●●●● 기출 | 고3 - 2010년 03월 서울 나형 #11

이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $A^2=E$, $B^2=E$이면 $(ABA)^2=E$이다.

ㄴ. $A^2=O$, $B^2=O$이면 $AB=O$이다.

ㄷ. $(A+E)^2=O$, $AB=A$이면 $B=E$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$

$=AB^2A=A^2=E$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}$라 하면

$A^2=B^2=O$이지만 $AB\neq O$이다. (거짓)

ㄷ. $A^2+2A+E=O$, 즉 $A(-A-2E)=E$이므로 행렬 A는 역행렬을 갖는다.

$AB=A$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $B=E$ (참)

30. ●●●● 기출 | 고2 - 2006년 11월 경기 나형 #28

행렬 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$에 대하여

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$일 때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오. (단, $A^{n+1}=A^nA$)

문제풀이 www.CYGong.com

$A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$A^2=AA=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\-3&-2\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}n+1&n\\-n&-n+1\end{pmatrix}$

따라서 A^n의 성분의 합은 항상 2이다.

$A+A^2+\cdots+A^{100}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$에서

$\therefore\ a+b+c+d=2\times100=200$

31. ●●●● 기출 | 고2 - 2012년 11월 경기 나형 #13

이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

(가) $A^2-2A+E=O$

(나) $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

문제풀이 www.CYGong.com

$A^2-2A+E=O$에서 $A^2=2A-E$이고,

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=(2A-E)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

따라서 $a=0$, $b=4$이므로 $a+b=4$

32. ●●●● 기출 | 고2 - 2013년 11월 경기 B형 #21

두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB+B=A,\ ABA-A^2=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, E는 단위행렬이다.)

〈 보 기 〉

ㄱ. $AB=BA$

ㄴ. $A^3+B^3=E$

ㄷ. $(B+E)^{30}=-3^{15}E$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $ABA-A^2=E$에서

$(AB-A)A=E$ ……㉠

$A(BA-A)=E$이고 양변에 $AB-A$를 곱하면

$(AB-A)A(BA-A)=AB-A$

$BA-A=AB-A$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $AB-A=-B$이므로 ㉠에서 $-BA=E$이다.

즉, $AB=BA=-E$

$ABA-A^2=-A-A^2=E$이므로

$A^2+A+E=O$에서 $A^3=E$

$B^3=A^3B^3=(AB)^3=(-E)^3=-E$

$\therefore A^3+B^3=O$ (거짓)

ㄷ. $AB=A-B=-E$에서 $B=A+E$

$(B+E)^2=(A+2E)^2=A^2+4A+4E$

$=(4A^2+4A+4E)-3A^2=-3A^2$

$\therefore (B+E)^{30}=(-3A^2)^{15}=-3^{15}E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

33. ●●●● 기출 | 고3 - 2008년 10월 서울 나형 #09

집합 P를

$$P=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. 집합 $\{X \mid X^2=E,\ X\in P\}$의 원소의 개수는 2이다.

ㄴ. $X\in P$이면 $X^3=X$이다.

ㄷ. 집합 P는 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. 두 행렬만 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2=E$이다. (참)

ㄴ. $X\in P$이면 $X^2=E$ 또는 $X^2=X$이므로 항상

$X^3=X$가 성립한다. (참)

ㄷ. (반례) $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\notin P$ (거짓)

34. ●●●● 기출 | 고2 - 2007년 11월 경기 가형 #28

두 행렬의 곱

$\begin{pmatrix}n-1 & 9-3n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n^2-4n+4\\n-1\end{pmatrix}$의 성분이 소수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 합을 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

$\begin{pmatrix}n-1 & 9-3n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n^2-4n+4\\n-1\end{pmatrix}$

$=(n-1)(n-2)^2-3(n-1)(n-3)$

$=(n-1)(n^2-7n+13)$

$(n-1)(n^2-7n+13)$이 소수가 되려면

$n-1=1$이고 $n^2-7n+13$은 소수이거나

$n^2-7n+13=1$이고 $n-1$은 소수이어야 한다.

따라서 $n=2,\ 3,\ 4$이고,

이때의 성분은 각각 3, 2, 3이다.

$\therefore$ 모든 n의 합은 9이다.

35. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 04월 경기 A형 #16

두 이차정사각행렬 A, B가

$$B^2=B-E,\ A^2+B=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

〈 보 기 〉

ㄱ. 행렬 B가 역행렬을 갖는다.

ㄴ. $AB=BA$

ㄷ. $A^{12}=E$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. $B^2=B-E$에서 $B-B^2=E$

$B(E-B)=(E-B)B=E$이므로 $B^{-1}=E-B$

∴ 행렬 B가 역행렬을 갖는다. (참)

ㄴ. $A^2+B=E$에서 $B=E-A^2$이므로

$AB=A-A^3$이고 $BA=A-A^3$이다.

∴ $AB=BA$ (참)

ㄷ. $A^2=E-B$, $B^2=B-E$에서

$A^4=(E-B)^2=E-2B+B^2$

$=E-2B+B-E=-B$

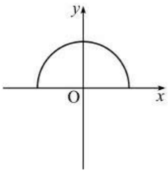
$A^6=A^4A^2=B^2-B=-E$

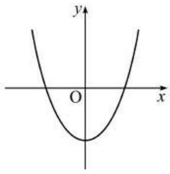
∴ $A^{12}=(A^6)^2=E$ (참)

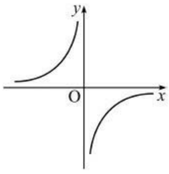
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

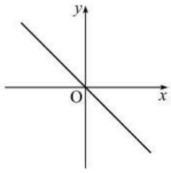
36. ●●●● 기출 | 고2 - 2006년 09월 서울 가형 #11

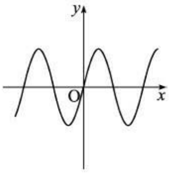
이차정사각행렬 A에 대하여 실수 p, q가 등식 $A\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 좌표평면 위의 점 $(p,\ q)$를 행렬 A의 고정점이라 하자. 다음 그래프 중에서 행렬 $\begin{pmatrix}-1&2\\4&-3\end{pmatrix}$의 고정점이 나타내는 도형과 만나지 않는 것은?

①


②


③


④


⑤


문제풀이

$\begin{pmatrix}-1&2\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}-p+2q\\4p-3q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$이므로 $p=q$이다.

따라서 행렬 A의 고정점 $(p,\ q)$가 나타내는 도형은 직선 $y=x$이다. 보기에서 직선 $y=x$와 만나지 않는 것은 ③이다.

37. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 04월 경기 가형 #24

이차 정사각행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=(i+2j\text{의 양의 약수의 개수})$$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, $i=1,\ 2$, $j=1,\ 2$)

문제풀이

$a_{11}=(3\text{의 양의 약수의 개수})=2$

$a_{12}=(5\text{의 양의 약수의 개수})=2$

$a_{21}=(4\text{의 양의 약수의 개수})=3$

$a_{22}=(6\text{의 양의 약수의 개수})=4$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}2&2\\3&4\end{pmatrix}$이므로 성분의 합은 11

38. ●●●● 기출 | 고3 - 2007년 04월 경기 가형 #16

이차정사각행렬 A, B에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬, X^{-1}는 X의 역행렬이다.)

〈 보 기 〉

ㄱ. $A^3=O$이면 $A^2=O$이다.

ㄴ. $A+B=E$이면 $AB=BA$이다.

ㄷ. $AB=A+B$이면 $(A-E)^{-1}=B-E$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. $A^3=O$이면 A는 역행렬이 존재하지 않고 $A^2=kA$ (k는 상수) 이므로 $A^3=kA^2=O$

따라서 $A^2=O$이다. (참)

ㄴ. $B=E-A$ 이면 $A(E-A)=A-A^2=(E-A)A$ 이므로 $AB=BA$ (참)

ㄷ. $AB=A+B$이면 $AB-A-B=O$ 이고 $AB-A-B+E=(A-E)(B-E)=E$이므로 $(A-E)^{-1}=B-E$ (참)

39. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 03월 서울 가형 #11

이차정사각행렬 A, B에 대하여 등식

$$A+B=3E,\ AB=4B$$

가 성립할 때, 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A=4E$

ㄴ. $B^2+B=O$

ㄷ. $A^2-B^2=3(A-B)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이

ㄱ. (반례) $A=3E$, $B=O$일 때,

$A+B=3E$, $AB=4B$이지만 $A\neq 4E$ (거짓)

ㄴ. $A+B=3E$이고 $AB=4B$이므로

$(A+B)B=3EB$, $AB+B^2=3B$, $4B+B^2=3B$

$\therefore B^2+B=O$ (참)

ㄷ. $A+B=3E$에서 $B=3E-A$

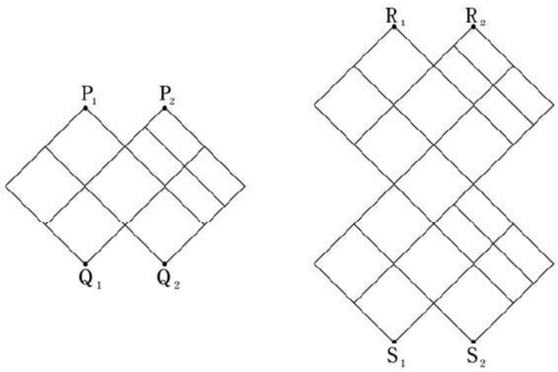
$AB=A(3E-A)=3A-A^2=(3E-A)A=BA$

$\therefore A^2-B^2=(A+B)(A-B)=3E(A-B)=3(A-B)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

40. ●●●● 기출 | 고3 - 2011년 10월 서울 가형 #20

그림과 같은 두 개의 도로망이 있다.



이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 $a_{ij}\ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$를

$a_{ij}=$(P_i지점에서 도로망을 따라 Q_j지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수)

로 정의하자.

다음 중 R_1지점에서 도로망을 따라 S_2지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수와 같은 것은? (단, 모든 도로는 서로 평행하거나 수직이다.)

① 행렬 $2A$의 $(1,\ 2)$성분
② 행렬 A^2의 $(1,\ 2)$성분
③ 행렬 A^2의 $(2,\ 1)$성분
④ 행렬 A의 $(1,\ 2)$성분과 $(2,\ 2)$성분의 곱
⑤ 행렬 A의 $(1,\ 2)$성분과 $(2,\ 1)$성분의 곱

문제풀이

R_1지점에서 도로망을 따라 S_2지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $a_{11}\times a_{12}+a_{12}\times a_{22}$이므로 행렬 A^2의 $(1,\ 2)$성분과 같다.

41. ●●●● 기출 | 고3 - 2006년 03월 서울 나형 #17

두 약국 P, Q에서 판매하는 혈압약과 관절염약의 1갑의 가격은 <표1>과 같고, 갑, 을 두 환자가 매월 구입해야 하는 혈압약과 관절염약의 수량은 <표2>와 같다.

(단위: 원)

	혈압약	관절염약
P 약국	30,000	10,000
Q 약국	20,000	20,000

<표1>

(단위: 갑)

	갑	을
혈압약	1	2
관절염약	1	3

<표2>

갑이 x개월, 을이 y개월 동안 혈압약과 관절염약을 P 약국에서 구입하면 갑과 을의 약값의 합은 600,000 원이고, Q 약국에서 구입하면 갑과 을의 약값의 합은 640,000 원이다.
행렬을 이용하여 $x,\ y$의 값을 구하는 과정에서 다음 등식을 얻었다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} a & -9 \\ -4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 64 \end{pmatrix}$$

두 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

문제풀이

<표1>을 행렬로 나타내면

$A=\begin{pmatrix} 30000 & 10000 \\ 20000 & 20000 \end{pmatrix}=10000\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

이고, <표2>를 행렬로 나타내면 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$이다.

그러므로 갑과 을이 P약국과 Q약국에서 1개월간 구입한 약값은 $AB=10000\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=10000\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$이다.

따라서 $10000\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 600000 \\ 640000 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60 \\ 64 \end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 64 \end{pmatrix}$

$\therefore a=10,\ b=4$

$\therefore a+b=10+4=14$

42. ●●●● 기출 | 고2 - 2010년 06월 부산 나형 #26

이차정사각행렬 $A,\ B$와 실수 k에 대하여

$$A+kB=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ A+B=E,\ B^2=B$$

가 성립할 때, $10k$의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)

문제풀이

$A+kB=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A+B=E$을 연립하면

$(k-1)B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 이다.

$(k-1)^2B^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=3(k-1)B$

이고, $B^2=B$이므로 $(k-1)^2B=3(k-1)B$ 이다.

$B\neq O,\ k\neq 1$ 이므로 $k=4$ 이다. $\therefore 10k=40$

43. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 04월 경기 A형 #28

두 이차정사각행렬 $A,\ B$의 $(i,\ j)$성분을 각각 $a_{ij},\ b_{ij}$라 할 때,

$$a_{ij}+a_{ji}=0,\ b_{ij}-b_{ji}=0\ (i=1,2,\ j=1,2)$$

이 성립한다.

두 행렬 $A,\ B$가 $2A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$를 만족시킬 때,

행렬 A^2-B의 $(2,\ 2)$성분을 구하시오.

문제풀이

$a_{ij}+a_{ji}=0$에서 $a_{ij}=-a_{ji}$ 이므로

$a_{11}=0,\ a_{12}=-a_{21},\ a_{22}=0$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$

$b_{ij}-b_{ji}=0$에서 $b_{ij}=b_{ji}$이므로 $b_{12}=b_{21}$

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$

$2A-B=2\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -b_{11} & 2a_{12}-b_{12} \\ -2a_{12}-b_{12} & -b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$-b_{11}=1$에서 $b_{11}=-1$, $-b_{22}=4$에서 $b_{22}=-4$

$2a_{12}-b_{12}=2$ …… ㉠, $-2a_{12}-b_{12}=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a_{12}=1,\ b_{12}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$A^2-B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2-B의 $(2,\ 2)$성분은 3

44. ●●●● 기출 | 고2 - 2010년 09월 인천 나형 #26

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}와 행렬 B의 (i, j) 성분 b_{ij}가 각각 $a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=-b_{ji}$를 만족한다. $A+B=\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$일 때, $a_{21}+a_{22}$의 값을 구하시오.

문제풀이

$a_{ij}=a_{ji}$ 이므로 $a_{12}=a_{21}$

$b_{ij}=-b_{ji}$ 이므로 $b_{11}=b_{22}=0$, $b_{21}=-b_{12}$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ -b_{12} & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}+b_{12} \\ a_{21}-b_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$a_{22}=7$, $a_{21}=7$ $\therefore a_{21}+a_{22}=14$

45. ●●●● 기출 | 고3 - 2013년 06월 모평 A형 #29

이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^3=E$
(나) $A-E$의 역행렬이 존재한다.

행렬 $(A-E)^{60}$의 모든 성분의 합이 $2^a\times 3^b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이고, E는 단위행렬이다.)

문제풀이

조건 (가)에서

$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)=O$

이고 조건 (나)에서 $A-E$의 역행렬이 존재하므로

$(A-E)^{-1}(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^2+A+E=O$

$\therefore A^2=-A-E$

따라서,

$(A-E)^2$
$=A^2-2A+E$
$=(-A-E)-2A+E$
$=-3A$

이므로

$(A-E)^6=(-3A)^3$
$=-27A^3$
$=-27E$

$\therefore (A-E)^{60}=(-27E)^{10}$
$=27^{10}E$
$=27^{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 27^{10} & 0 \\ 0 & 27^{10} \end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $(A-E)^{60}$의 모든 성분의 합은

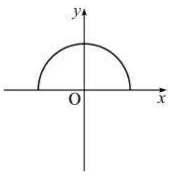
$27^{10}+27^{10}=2\times 27^{10}$
$=2\times(3^3)^{10}$
$=2\times 3^{30}$

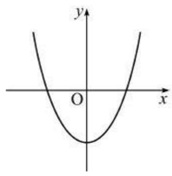
$\therefore a=1$, $b=30$

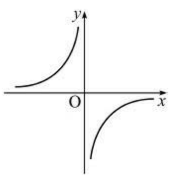
$\therefore a+b=31$

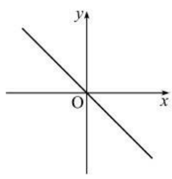
46. ●●●● 기출 | 고2 - 2006년 09월 서울 나형 #11

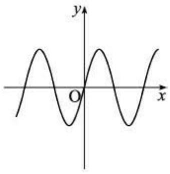
이차정사각행렬 A에 대하여 실수 p, q가 등식 $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 좌표평면 위의 점 (p, q)를 행렬 A의 고정점이라 하자. 다음 그래프 중에서 행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$의 고정점이 나타내는 도형과 만나지 않는 것은?

①


②


③


④


⑤


문제풀이

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} -p+2q \\ 4p-3q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$이므로 $p=q$이다.

따라서 행렬 A의 고정점 (p, q)가 나타내는 도형은 직선 $y=x$이다. 보기에서 직선 $y=x$와 만나지 않는 것은 ③이다.

47. ●●●● 기출 | 고3 - 2009년 06월 모평 가형 #17

집합 S가 $S=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 집합 S에 속하는 서로 다른 두 행렬 A, B에 대하여
행렬 $A+B$의 성분은 모두 짝수이다.

ㄴ. 집합 S에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 m개의 행렬 A_1, A_2, $\cdots$, A_m을 선택하였을 때,
$$A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$$
가 되도록 하는 m이 존재한다.

ㄷ. 집합 S에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 n개의 행렬 A_1, A_2, $\cdots$, A_n을 선택하였을 때,
행렬 $\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}+A_1+A_2+\cdots+A_n$
의 성분이 모두 짝수가 되도록 하는 n의 최솟값은 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. (거짓)
[반례] $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$이므로
홀수인 성분이 있다.

ㄴ. (참)
$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$이므로
$3\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$
$=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$
즉, $A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$를 만족하는 m의 값은 12이다.

ㄷ. (참)
행렬 $\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}$의 모든 성분이 홀수이므로
$A_1+A_2+\cdots+A_n$의 모든 성분도 홀수이어야 한다.
이때, $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$이므로 n의 최솟값은 4이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

48. ●●●● 기출 | 고3 - 2007년 04월 경기 나형 #12

이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합
$$S=\left\{X \,\middle|\, X=\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix},\ x,\ y\text{는 자연수}\right\}$$
에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?

〈보 기〉

ㄱ. 집합 S는 곱셈에 대하여 닫혀있다.
ㄴ. 집합 S에 대하여 곱셈에 대한 교환법칙이 성립한다.
ㄷ. $A\in S$이고 A의 모든 성분의 합이 3이면 A^n의 모든 성분의 합은
$n+2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제풀이 www.CYGong.com

ㄱ. a, b, c, d를 자연수라 하면
$\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c\\0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&c+ad\\0&bd\end{pmatrix}\in S$ (참)

ㄴ. $\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c\\0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&c+ad\\0&bd\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}1&c\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a+bc\\0&bd\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. 주어진 조건에서 x, y는 자연수이고
성분의 합이 3이므로 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$이다.
$A^n=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$, 모든 성분의 합은 $n+2$ (참)

49. ●●●● 기출 | 고2 - 2013년 06월 서울 B형 #17

이차정사각행렬 A가 등식 $A^2-3A+2E=O$를 만족시킨다. 다음은 n이 2 이상의 자연수일 때, 행렬 A^n을 구하는 과정이다. (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

$A^2-3A+2E=O$에서
$A^2-A=2(A-E)$
$A^3-A^2=A(A^2-A)=2A(A-E)=2(A^2-A)$
$\qquad=4(A-E)$
$A^4-A^3=A(A^3-A^2)=4A(A-E)=4(A^2-A)$
$\qquad=8(A-E)$
$\vdots$
$A^n-A^{n-1}=\boxed{(가)}(A-E)$
위 등식들을 변끼리 더하면
$A^n-A=\boxed{(나)}(A-E)$
$\therefore\ A^n=\boxed{(나)}(A-E)+A$

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(9)+g(9)$의 값은?

① 754 ② 758 ③ 762 ④ 766 ⑤ 770

문제풀이 www.CYGong.com

$A^2-3A+2E=O$에서

$A^2-A=2(A-E)$

$A^3-A^2=A(A^2-A)=2A(A-E)=2(A^2-A)$

$=4(A-E)$

$=2^2(A-E)$

$A^4-A^3=A(A^3-A^2)=4A(A-E)=4(A^2-A)$

$=8(A-E)$

$=2^3(A-E)$

$\vdots$

$A^n-A^{n-1}=\boxed{2^{n-1}}(A-E)$

위 등식들을 변끼리 더하면 좌변은

$(A^2-A)+(A^3-A^2)+(A^4-A^3)+\cdots+(A^n-A^{n-1})$

$=A^n-A$

이고, 우변은

$(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})(A-E)$

$=\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}(A-E)$

$=(2^n-2)(A-E)$

이다. 그러므로

$A^n-A=\boxed{(2^n-2)}(A-E)$

$\therefore\ A^n=\boxed{(2^n-2)}(A-E)+A$

$f(n)=2^{n-1},\ g(n)=2^n-2$

$\therefore\ f(9)+g(9)=2^8+2^9-2$

$=766$

50. ●●●● 기출 | 고3 - 2010년 03월 서울 나형 #24

행렬 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$에 대하여 자연수 $m,\ n$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^m=A^n$

(나) $m,\ n$은 100 이하의 서로 다른 자연수이다.

$|m-n|$의 최댓값을 p, 최솟값을 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

문제풀이 www.CYGong.com

행렬 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$에서 $A^3=-E$이므로 $A^6=E$이다.

따라서 다음 등식이 성립한다.

$A=A^7=A^{13}=\cdots=A^{97}$

$A^2=A^8=A^{14}=\cdots=A^{98}$

$A^3=A^9=A^{15}=\cdots=A^{99}$

$A^4=A^{10}=A^{16}=\cdots=A^{100}$

$A^5=A^{11}=A^{17}=\cdots=A^{95}$

$A^6=A^{12}=A^{18}=\cdots=A^{96}$

즉, $A^m=A^n$이 성립하려면 $|m-n|$의 값이 6의 배수가 되어야 한다.

따라서 $|m-n|$의 최댓값은 96, 최솟값은 6이다.

$\therefore\ p+q=96+6=102$