2015학년도 6월 모의평가 수학영역 B형 해설

01

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$$\log_3 4+\log_3 \frac{3}{4}=\log_3\left(4\times\frac{3}{4}\right)=\log_3 3=1$$

답 ①

02

[풀이]

행렬의 합의 정의에서

$$A+E=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

행렬 $A+E$의 모든 성분의 합이 9이므로

$a+6=9$

$\therefore\ a=3$

답 ③

03

[풀이]

삼각함수의 배각공식에 의하여

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

답 ②

04

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3e^{3x}+10$

$\therefore\ f'(0)=13$

답 ⑤

05

[풀이]

삼각함수의 합성의 공식에 의하여

$f(x)=3\sin(x+\alpha)+a$

(단, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$)

함수 $f(x)$가 갖는 값의 범위는

$a-3\le f(x)\le a+3$

함수 $f(x)$의 최댓값이 7이므로

$3+a=7$

$\therefore\ a=4$

답 ④

06

[풀이]

정적분의 치환적분법을 적용하자.

$\ln x=t$로 두면 $\dfrac{1}{x}dx=dt$

$x=e$이면 $t=1$이고, $x=e^3$이면 $t=3$이다.

정적분의 기본정리에 의하여

$$\therefore\ \int_e^{e^3}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^3 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^3=4$$

답 ④

07

[풀이]

$A=\begin{pmatrix}b & c\\ d & e\end{pmatrix}$로 두면

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & c\\ d & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$b=1$, $d=1$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & c\\ d & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2\\1\end{pmatrix}$$

$c=a+2$, $e=1$

즉, $A=\begin{pmatrix}1 & a+2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

주어진 연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖기 위해서는 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$1\times1-(a+2)\times1=0$

$\therefore\ a=-1$

답 ①

08

[풀이]

주어진 등식의 n에 $n-1$을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=2(n-1)+1$$

$=2n-1\ (n\ge2)$

계차수열을 이용하여 일반항을 구하면

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

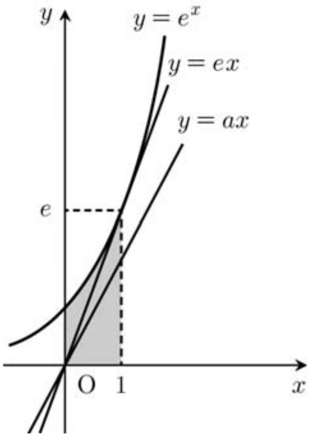
$=15+2n-1=2n+14\ (n\ge2)$

$\therefore\ a_{10}=34$

답 34

09

[풀이]



위의 그림에서 어두운 부분의 넓이가 세 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ e)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 2배가 되면 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e-1 = 2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times a\right)$$

$\therefore\ a=e-1$

답 ③

10

[풀이]

L_A, $D_A=20$, R_A를 주어진 등식에 대입하면

$$(L_A)^2 = 100\times 20^2\times \log_3 R_A$$

$$\frac{(L_A)^2}{100\times 20^2}=\log_3 R_A$$

L_B, $D_B=30$, R_B를 주어진 등식에 대입하면

$$(L_B)^2 = 100\times 30^2\times \log_3 R_B$$

$$\frac{(L_B)^2}{100\times 30^2}=\log_3 R_B$$

위의 두 식을 변변히 빼면

$$\frac{(L_A)^2}{100\times 20^2}-\frac{(L_B)^2}{100\times 30^2}=\log_3 R_A-\log_3 R_B$$

로그의 성질에 의하여

$$\frac{(L_A)^2}{100\times 20^2}-\frac{(L_B)^2}{100\times 30^2}=\log_3 \frac{R_A}{R_B}$$

$L_A=400$, $\dfrac{R_A}{R_B}=27$을 대입하면

$$\frac{400^2}{100\times 20^2}-\frac{(L_B)^2}{100\times 30^2}=\log_3 27$$

정리하면

$$4-\frac{(L_B)^2}{100\times 30^2}=3,\quad \frac{(L_B)^2}{100\times 30^2}=1$$

$\therefore\ L_B=300$

답 ②

11

[풀이]

$$(g^{-1}\circ f)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&a\\b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

양변의 왼쪽에 $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$을 곱하면

$$\begin{pmatrix}2&a\\b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

행렬의 곱셈의 정의에서

$$\begin{pmatrix}2+2a\\b+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$$

행렬의 상등에서

$2+2a=10$, $b+2=3$

$\therefore\ a=4$, $b=1$

답 ⑤

12

[풀이]

주어진 쌍곡선 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

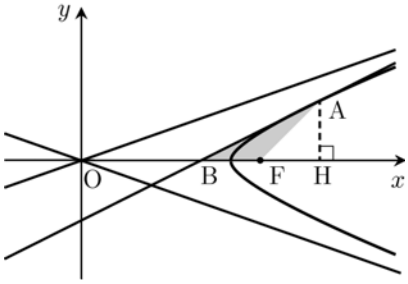
$$\frac{1}{2}x-y=1$$

이 직선의 x절편은 $B(2,\ 0)$이다.

쌍곡선의 정의에서

$F(\sqrt{8+1},\ 0)$ 즉, $F(3,\ 0)$이다.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\therefore$ (삼각형 FAB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}$

답 ②

13

[풀이]

수열의 합과 일반항의 관계에서

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=n^2-n-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=2n-2\,(n\geq 2)$

$a_1=\sum_{k=1}^{1}a_k=1^2-1=0$

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=2n-2\,(n\geq 1)$

자연수 k에 대하여

$a_{4k+1}=8k$

시그마의 성질에 의하여

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}8k^2=8\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=8\times\dfrac{10\times 11\times 21}{6}=3080$

답 ④

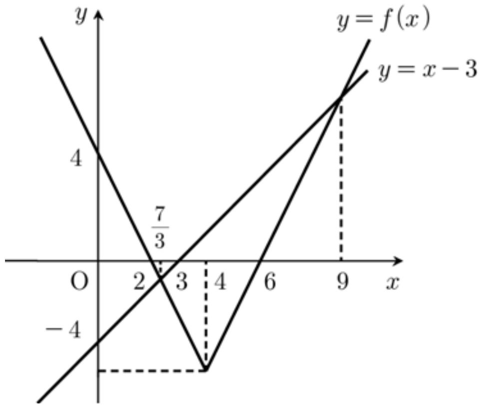
14

[풀이]

분수부등식에 대한 전형적인 풀이를 적용하자.

$\dfrac{x-3}{f(x)}-1\geq 0,\ \dfrac{x-3-f(x)}{f(x)}\geq 0$

$\{x-3-f(x)\}f(x)\geq 0$



(1) $f(x)>0,\ f(x)\leq x-3$인 경우

위의 그림에서 $6<x\leq 9$이다.

$x=7,\ 8,\ 9$

(2) $f(x)<0,\ f(x)\geq x-3$인 경우

위의 그림에서 $2<x\leq\dfrac{7}{3}$이다.

이 범위에서 자연수 x는 없다.

(1), (2)에서 구하는 값은 24이다.

답 ③

15

[풀이]

(부채꼴 $\mathrm{A_1B_1M_1}$의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A_1B_1}}^2\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 세로의 길이를 x라고 두면

$\overline{\mathrm{A_2B_2}}=x,\ \overline{\mathrm{B_2C_2}}=2x$

직각삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$에서 피타고라스의 정리를 적용하면

$\overline{\mathrm{A_2C_2}}=\sqrt{\overline{\mathrm{A_2B_2}}^2+\overline{\mathrm{B_2C_2}}^2}=\sqrt{5}\,x$

그런데

$\overline{\mathrm{A_2C_2}}=\overline{\mathrm{A_1C_2}}-\overline{\mathrm{A_1A_2}}$

$=\overline{\mathrm{A_1D_1}}-\overline{\mathrm{A_1M_1}}=2-1=1$

$\sqrt{5}\,x=1$에서 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

두 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1M_1}$, $\mathrm{A_2B_2M_2}$의 반지름의 길이의 비가 $1:\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로, 그림 R_2에서 새롭게 색칠된 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{\pi}{20}$이다.

2015학년도 6월 모의평가 수학영역 B형 해설

마찬가지의 방법으로 그림 R_n에서 새롭게 색칠된 부채꼴의 넓이를 a_n이라고 하면

$a_{n+1}=\frac{1}{5}a_n$, $a_1=\frac{\pi}{4}$

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

무한등비급수의 공식에서

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{16}\pi$

답 ①

16

[풀이]

ㄱ. (참)

행렬의 곱셈의 정의에서

$A^3=A^2A=(-A)A=-A^2=A$

$(\because A^2=-A)$

ㄴ. (참)

행렬의 연산의 성질에 의하여

$AB^2=A(-A^2+A+E)$

$=A(2A+E)(\because A^2=-A)$

$=2A^2+A=-A$

$B^2A=(-A^2+A+E)A$

$=(2A+E)A(\because A^2=-A)$

$=2A^2+A=-A$

$\therefore\ AB^2=B^2A$

ㄷ. (참)

주어진 두 번째 등식에서

$B^2=-A^2+A+E$

$=2A+E(\because A^2=-A)$

주어진 첫 번째 등식에서

$A^2+A=O,\ 4A^2+4A+E=E$

$(2A+E)^2=E$

역행렬의 정의에서 행렬 $2A+E$의 역행렬이 존재하므로 행렬 B^2의 역행렬이 존재한다.

행렬 B^2의 역행렬이 존재하므로 행렬 B의 역행렬이 존재한다.

이때, $B^4=E$이므로 역행렬의 정의에서 $B^{-1}=B^3$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

이차정사각행렬 A에 대하여 다음의 명제가 참임을 증명하자.

행렬 A^2의 역행렬이 존재하면 행렬 A의 역행렬이 존재한다.

(증명)

행렬 A^2의 역행렬이 존재하면 역행렬의 정의에서

$A^2B=E,\ BA^2=E$

를 만족시키는 이차정사각행렬 B가 존재한다.

행렬의 곱셈의 정의에서

$A^2B=A(AB)=E$

역행렬의 정의에서

$A^{-1}=AB$

따라서 행렬 A는 역행렬을 갖는다.

17

[풀이]

타원의 정의에서

$\overline{PF}+\overline{PF'}=14$

그런데 $\overline{PF}=9$이므로

$\overline{PF'}=14-\overline{PF}=5$ $\cdots$㉠

주어진 타원의 두 초점을 구하면

$F(\sqrt{49-a},\ 0)$, $F'(-\sqrt{49-a},\ 0)$

$\overline{FF'}=2\sqrt{49-a}$

직각삼각형 FPH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{FP}^2-\overline{HF}^2}=3$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{HF'}=\overline{PF'}-\overline{PH}=2$

직각삼각형 FHF′에서 피타고라스의 정리를 적용하면

$\overline{FF'}^2=\overline{FH}^2+\overline{HF'}^2$

$4(49-a)=72+4$

$\therefore\ a=30$

답 ②

2015학년도 6월 모의평가 수학영역 B형 해설

18

[풀이]

ㄱ. (참)

$x \to 1-0$일 때, $f(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 0$$

$x \to 1+0$일 때, $f(x)$는 1의 값을 가지므로

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) < \lim_{x \to 1+0} f(x)$$

ㄴ. (참)

$t \to \infty$일 때, $\frac{1}{t}$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 수렴한다.

$\frac{1}{t} = x$로 두면

$$\lim_{t \to \infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to +0} f(x) = 1$$

왜냐하면 $x \to +0$일 때, $f(x)$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지기 때문이다.

ㄷ. (거짓)

$x \to 3+0$일 때, $f(x)$는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워진다.

$X = f(x)$로 두면

$X \to 2-0$일 때, $f(X)$는 1의 값을 가진다.

$$\lim_{x \to 3+0} f(f(x)) = 1$$

$x \to 3-0$일 때, $f(x)$는 2보다 큰 값을 가지면서 2에 한없이 가까워진다.

$X = f(x)$로 두면

$X \to 2+0$일 때, $f(X)$는 3보다 작은 값을 가지면서 3에 한없이 가까워진다.

$$\lim_{x \to 3-0} f(f(x)) = 3$$

$\lim_{x \to 3+0} f(f(x)) \neq \lim_{x \to 3-0} f(f(x))$이므로 함수 $f(f(x))$는 $x = 3$에서 연속이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

19

[풀이]

로그의 성질에서

$$\log_b(ax-1) = \log_b a\left(x - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \log_b\left(x - \frac{1}{a}\right) + \log_b a$$

이므로, 함수 $y = \log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼 평행이동시키고, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동시키면 함수 $y = g(x)$의 그래프와 일치한다. 곡선 $y = \log_b x$의 점근선은 y축($x = 0$)이므로 곡선 $y = g(x)$의 점근선은 $x = \frac{1}{a}$이다.

이제 곡선 $y = f(x)$의 x절편을 구하기 위해 다음의 로그방정식을 풀자.

$$\log_a(bx-1) = 0$$

$$\log_a(bx-1) = \log_a 1,\ bx - 1 = 1,\ x = \frac{2}{b}$$

곡선 $y = f(x)$이 x축과 만나는 교점은 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이다.

이상에서 $\frac{2}{b} = \frac{1}{a}$이다. 정리하면

$$b = 2a$$

이 등식을 주어진 조건 $0 < a < 1 < b$에 대입하면

$$0 < a < 1 < 2a$$

정리하면

$$\frac{1}{2} < a < 1$$

따라서 a, b 사이의 관계식은

$$\therefore\ b = 2a\left(\frac{1}{2} < a < 1\right)$$

답 ③

20

[풀이]

조건(가)를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 중복조합의 수에서

$${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28$$

조건(가)를 만족시키면서 조건(나)를 만족시키지 않는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하자.

좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$가 한 직선 위에 있으면

2015학년도 6월 모의평가 수학영역 B형 해설

$\dfrac{b-a}{2-1}=\dfrac{c-b}{3-2}$
정리하면
$2b=a+c$
이를 조건(가)에 대입하면
$b=2,\ a+c=4$
$(a,\ b,\ c)=(0,\ 2,\ 4),\ (1,\ 2,\ 3),$
$(2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1),\ (4,\ 2,\ 0)$
따라서 구하는 경우의 수는 $23(=28-5)$이다.
답 ⑤

21

[풀이]
원 $C: x^2+(y-1)^2=1$의 중심을 A, 원 C와 직선 $l: y=tx$가 만나는 두 점을 각각 O, B라 하자.
직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle \mathrm{OAB}=2\theta$이다.
주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$라 하면
$g(\theta)=$(부채꼴 AOB의 넓이)$-$(삼각형 AOB의 넓이)
$=\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$
이다. $t=\tan\theta$이므로 $g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$이고,
합성함수의 미분법에 의하여
$g'(\theta)=f'(\tan\theta)\times\sec^2\theta$
즉, $g'(\theta)=f'(t)\times\sec^2\theta$
이다.
$t=2$일 때, $\tan\theta=2$이므로
$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \sec^2\theta=5$ $\cdots$㉠
한편 함수 $g(\theta)$의 도함수는
$g'(\theta)=1-\cos 2\theta$
$=2-2\cos^2\theta=\dfrac{8}{5}$ ($\because$ 배각공식) $\cdots$㉡
㉠, ㉡에서
$f'(2)=\dfrac{g'(\theta)}{\sec^2\theta}=\dfrac{8}{25}$
이상에서
$h_1(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta,\ h_2(\theta)=\sec^2\theta,\ a=\dfrac{8}{25}$

$\therefore\ a\times h_1\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{8}{25}$
답 ①

22

[풀이]
함수의 극한에 대한 기본성질에 의하여
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{x}=7\times\lim_{x\to 0}\ln(1+7x)^{\frac{1}{7x}}$
$=7\times\ln e=7$
답 7

23

[풀이]
주어진 식의 일반항은
${}_4\mathrm{C}_r(ax)^{4-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r$ 즉, ${}_4\mathrm{C}_r a^{4-r}x^{4-2r}$
$4-2r=0$ 즉, $r=2$이면 상수항이다.
이를 일반항에 대입하면
${}_4\mathrm{C}_2 a^2=54,\ 6a^2=54$
상수 a가 양수이므로
답 $a=3$

24

[풀이]
일차변환의 성질에서
$f(3X_1+X_2)=3f(X_1)+f(X_2)$
$=3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
행렬의 상등에서 $a=11,\ b=6$
따라서 구하는 값은 17이다.
답 17

25

[풀이]
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하자.
주어진 조건에서 첫째항이 a_3이고, 공비가 $r(>0)$인 등비수열의 무한급수가 수렴하므로
$0<r<1$ $\cdots$㉠
등비수열의 정의에서
$a_1+a_2=a_1+a_1r=20$

2015학년도 6월 모의평가 수학영역 B형 해설

$a_1 = \dfrac{20}{1+r}$ $\cdots$㉡

무한등비급수의 공식에서

$\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n = \frac{a_3}{1-r} = \frac{a_1 r^2}{1-r} = \frac{4}{3}$ $\cdots$㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$$\frac{\frac{20}{1+r} \times r^2}{1-r} = \frac{4}{3}$$

정리하면

$$\frac{20r^2}{1-r^2} = \frac{4}{3}$$

분수식을 정리하면

$16r^2 = 1$

이차방정식을 풀면

$r = \dfrac{1}{4}$ ($\because$ ㉠)

이를 ㉡에 대입하면

$\therefore\ a_1 = 16$

답 16

26

[풀이]

$g'(x) = f'(x)\ln x^4 + f(x)\dfrac{4}{x}$

점 $(e,\ -e)$이 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$f(e) = -e$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선의 기울기를 m_1이라고 하면

$f'(e) = m_1$

점 $(e,\ -4e)$이 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로

$g(e) = -4e$

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선의 기울기를 m_2라고 하면

$g'(e) = m_2$

위의 네 조건을 아래의 식에 대입하면

$g'(e) = f'(e)\ln e^4 + f(e)\dfrac{4}{e}$

$m_2 = 4m_1 - 4$ $\cdots$㉠

그런데 주어진 조건에서

$m_1 m_2 = -1$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$-\dfrac{1}{m_1} = 4m_1 - 4$

$(2m_1 - 1)^2 = 0,\ m_1 = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 100f'(e) = 50$

답 50

27

[풀이]

무리방정식에 대한 전형적인 풀이를 적용하자.

$\sqrt{g(x)} - f(x) = \sqrt{g(x) - \{f(x)\}^2}$

이때, 다음의 두 부등식이 성립해야 한다.

$g(x) \ge 0,\ g(x) \ge \{f(x)\}^2$

연립부등식을 풀면 $\dfrac{3}{2} \le x \le 3$ $\cdots(*)$

양변을 제곱하여 정리하면

$f(x)\{f(x) - \sqrt{g(x)}\} = 0$

$f(x) = 0$ 또는 $f(x) = \sqrt{g(x)}$

(1) $f(x) = 0$인 경우

$-x + 2 = 0$에서 $x = 2$

이 실근은 $(*)$의 범위에 속하므로 주어진 무리방정식의 실근이다.

(2) $f(x) = \sqrt{g(x)}$인 경우

$-x + 2 = \sqrt{\dfrac{1}{2}(x-1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2x^2 - 9x + 9 = 0$

$(2x-3)(x-3) = 0,\ x = \dfrac{3}{2}$

이 실근은 $(*)$의 범위에 속하므로 주어진 무리방정식의 실근이다.

(1), (2)에서 주어진 무리방정식의 실근은 2, $\dfrac{3}{2}$이다.

$\therefore\ 10a = 35$

답 35

28

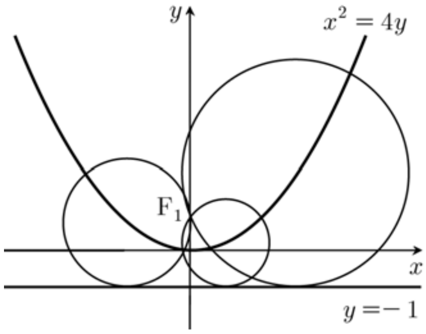
[풀이]

$x^2 = 4 \times 1 \times y$에서 C_1의 준선은 $y = -1$이고,

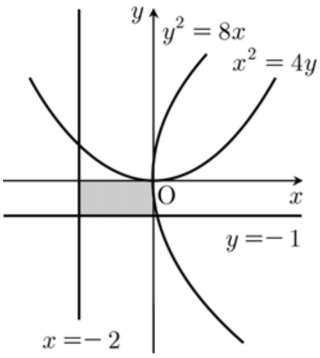
$y^2 = 4 \times 2 \times x$에서 C_2의 준선은 $x = -2$이다.

조건(가)를 만족시키는 포물선 C_1 위의 점 C를

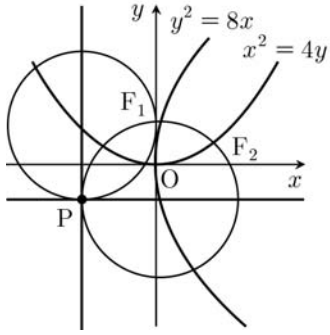
중심으로 하는 원의 반지름은 $\overline{CF_1}$이다. 포물선의 정의에서 점 C에서 C_1의 준선 $y=-1$까지의 거리는 선분 $\overline{CF_1}$의 길이와 같다. 이때, 점 C를 중심으로 하는 원은 직선 $y=-1$에 접한다.



위의 그림에서 조건(가)를 만족시키는 포물선 C_1 위의 점을 중심으로 하는 원들은 준선 $y=-1$에 접한다. 이때, 이 원들은 부등식의 영역 $y \geq -1$에 포함된다.
마찬가지로 조건(가)를 만족시키는 포물선 C_2 위의 점을 중심으로 하는 원들은 부등식의 영역 $x \geq -2$에 포함된다.
따라서 조건(가), 조건(나)를 만족시키는 두 원의 교점 P는 연립부등식의 영역 $\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ -1 \leq y < 0 \end{cases}$에 속한다.



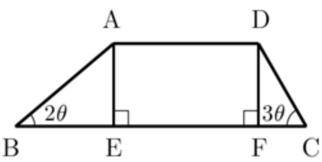
연립부등식의 영역 $\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ -1 \leq y < 0 \end{cases}$에 속하는 점 중에서 원점에서 거리가 가장 먼 점은 $(-2,\ -1)$이다.
만약 점 P가 $(-2,\ -1)$ 위에 온다면 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.



이때, 두 원의 방정식은 다음과 같다.
$(x+2)^2+(y-1)^2=4$
$\left(x-\dfrac{1}{8}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{289}{8}$
따라서 $\overline{OP}^{\,2}$의 최댓값은 5이다.
답 5

29

[풀이1]
두 점 A, D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자.
그리고 $\overline{AE}=\overline{DF}=h(\theta)$로 두자.



직각삼각형 ABE에서
$\dfrac{\overline{EA}}{\overline{BE}}=\tan 2\theta$이므로 $\overline{BE}=\dfrac{h(\theta)}{\tan 2\theta}$
직각삼각형 DCF에서
$\dfrac{\overline{FD}}{\overline{CF}}=\tan 3\theta$이므로 $\overline{CF}=\dfrac{h(\theta)}{\tan 3\theta}$
두 선분 AD, EF의 길이는 $\sin\theta$로 같으므로
$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{FC}$
$2\sin\theta=\dfrac{h(\theta)}{\tan 2\theta}+\sin\theta+\dfrac{h(\theta)}{\tan 3\theta}$
정리하면
$h(\theta)=\dfrac{\sin\theta\tan 2\theta\tan 3\theta}{\tan 3\theta+\tan 2\theta}$
$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AE}$
$=\dfrac{3\sin^2\theta\tan 2\theta\tan 3\theta}{2(\tan 3\theta+\tan 2\theta)}$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{3\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{2\theta^3(\tan3\theta+\tan2\theta)}$$

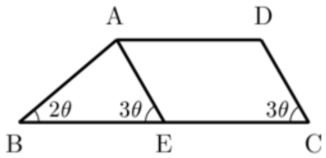
$$=\lim_{\theta\to+0}3\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{\tan2\theta}{2\theta}\frac{1}{1+\frac{2}{3}\frac{\tan2\theta}{2\theta}\frac{3\theta}{\tan3\theta}}$$

$$=3\times1^2\times1\times\frac{1}{1+\frac{2}{3}\times1\times1}=\frac{9}{5}$$

답 14

[풀이2]

점 A를 지나고 직선 CD에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 E라고 하자.



삼각형 ABE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AE}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{BE}}{\sin(\pi-5\theta)}$$

그리고

$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{AD}=\sin\theta$

이를 위의 등식에 대입하면

$$\overline{AE}=\frac{\sin2\theta\sin\theta}{\sin5\theta}$$

(평행사변형 AECD의 넓이)

$=\overline{AE}\times\overline{EC}\times\sin(\pi-3\theta)$

$$=\frac{\sin2\theta\sin^2\theta\sin3\theta}{\sin5\theta}$$

(삼각형ABE의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{EB}\times\sin3\theta$$

$$=\frac{\sin2\theta\sin^2\theta\sin3\theta}{2\sin5\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{3\sin2\theta\sin^2\theta\sin3\theta}{2\sin5\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{3\sin2\theta\sin^2\theta\sin3\theta}{2\theta^3\sin5\theta}$$

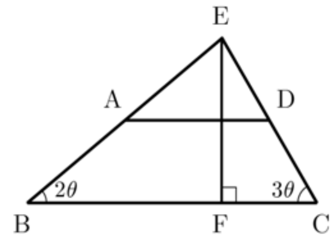
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{9}{5}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{\sin2\theta}{2\theta}\frac{\sin3\theta}{3\theta}\frac{1}{\frac{\sin5\theta}{5\theta}}$$

$$=\frac{9}{5}\times1^2\times1\times1\times\frac{1}{1}=\frac{9}{5}$$

답 14

[풀이3]

두 직선 BA, CD의 교점을 E, 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 F라고 하자.



두 닮은 삼각형 EAD, EBC의 대응되는 각 변의 길이의 비는 1 : 2이다.

우선 삼각형 EBC의 넓이를 구하기 위하여 $\overline{EF}=h(\theta)$라고 두자.

직각삼각형 EBF에서

$\dfrac{\overline{FE}}{\overline{BF}}=\tan2\theta$이므로 $\overline{BF}=\dfrac{h(\theta)}{\tan2\theta}$

직각삼각형 ECF에서

$\dfrac{\overline{FE}}{\overline{CF}}=\tan3\theta$이므로 $\overline{CF}=\dfrac{h(\theta)}{\tan3\theta}$

$\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{FC}$

$$2\sin\theta=\frac{h(\theta)}{\tan2\theta}+\frac{h(\theta)}{\tan3\theta}$$

정리하면

$$h(\theta)=\frac{2\sin\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\tan3\theta+\tan2\theta}$$

(삼각형 EBC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EF}$

$$=\frac{2\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\tan3\theta+\tan2\theta}$$

삼각형 EAD의 넓이는 삼각형 EBC의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$배이므로, 사다리꼴 ABCD의 넓이는 삼각형 EBC의 넓이의 $\dfrac{3}{4}$배이다.

$$S(\theta)=\frac{3\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{2(\tan3\theta+\tan2\theta)}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{3\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{2\theta^3(\tan3\theta+\tan2\theta)}$$

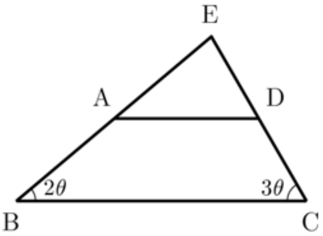
$$=\lim_{\theta\to+0}3\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{\tan2\theta}{2\theta}\frac{1}{1+\frac{2}{3}\frac{\tan2\theta}{2\theta}\frac{3\theta}{\tan3\theta}}$$

$$=3\times1^2\times1\times\frac{1}{1+\frac{2}{3}\times1\times1}=\frac{9}{5}$$

답 14

[풀이4]

두 직선 BA, CD의 교점을 E라고 하자.



삼각형 EBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{EB}}{\sin3\theta}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-5\theta)}$$

즉, $\overline{EB}=\dfrac{2\sin3\theta\sin\theta}{\sin5\theta}$

$$\frac{\overline{EC}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-5\theta)}$$

즉, $\overline{EC}=\dfrac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin5\theta}$

(삼각형 EBC의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{EB}\times\overline{EC}\times\sin(\pi-5\theta)$$

$$=\frac{2\sin2\theta\sin^2\theta\sin3\theta}{\sin5\theta}$$

삼각형 EAD의 넓이는 삼각형 EBC의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$배이므로, 사다리꼴 ABCD의 넓이는 삼각형 EBC의 넓이의 $\dfrac{3}{4}$배이다.

$$S(\theta)=\frac{3\sin2\theta\sin^2\theta\sin3\theta}{2\sin5\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{3\sin2\theta\sin^2\theta\sin3\theta}{2\theta^3\sin5\theta}$$

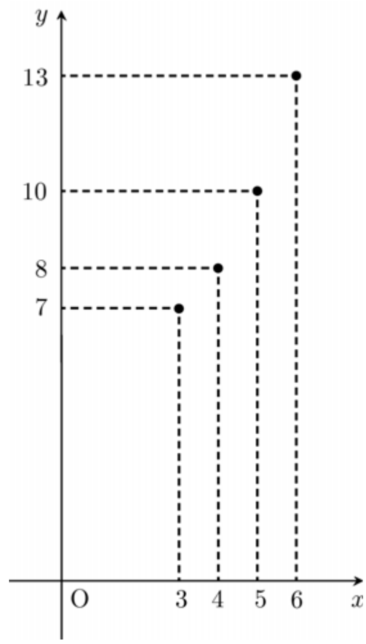
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{9}{5}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{\sin2\theta}{2\theta}\,\frac{\sin3\theta}{3\theta}\,\frac{1}{\frac{\sin5\theta}{5\theta}}$$

$$=\frac{9}{5}\times1^2\times1\times1\times\frac{1}{1}=\frac{9}{5}$$

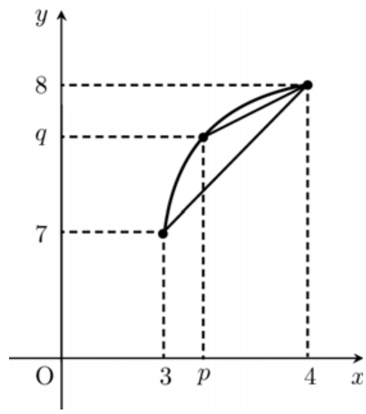
답 14

[풀이]

조건(나)에서 $n=0$, $n=1$을 대입하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 네 점 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$, $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$을 지난다.



구간 $[3,\ 4]$에 속하는 임의의 실수 p에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 부등식의 영역 $y>x+4$를 만족하는 점 $(p,\ q)$를 지난다고 하자.



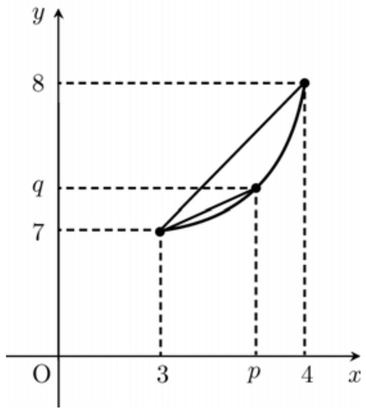
함수 $y=f(x)$는 구간 $[p,\ 4]$에서 연속이고, 구간 $(p,\ 4)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에서

$$\frac{f(4)-f(p)}{4-p}=f'(r)$$

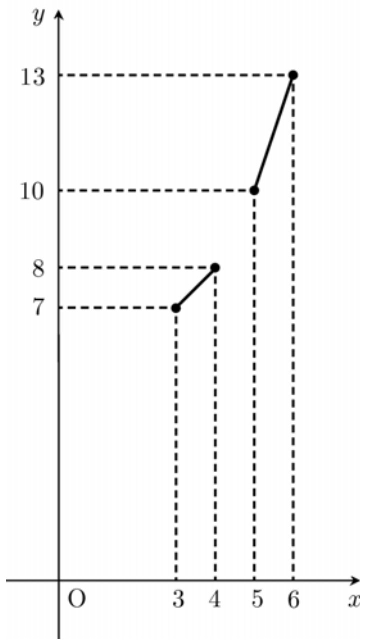
을 만족시키는 실수 r이 구간 $(p,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $\dfrac{f(4)-f(p)}{4-p}=\dfrac{8-q}{4-p}<\dfrac{4-p}{4-p}=1$이므로

$f'(r)$의 값은 1보다 작다.
이는 조건(가)에 모순이다.
마찬가지의 방법으로 구간 $[3,\ 4]$에 속하는 임의의 실수 p에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 부등식의 영역 $y<x+4$를 만족하는 점 $(p,\ q)$를 지난다고 할 때, 조건(가)에 모순임을 보일 수 있다.



따라서 구간 $[3,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x+4$이다.
마찬가지의 이유로 구간 $[5,\ 6]$에서 함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=3x-5$이다.



조건(다)에서 구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이차함수의 일부이므로, 이제 구간 $[3,\ 6]$에서 함수 $y=f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & (3\le x\le 4) \\ ax^2+bx+c & (4<x<5) \\ 3x-5 & (5\le x\le 6)\end{cases}$$

(단, $a\neq 0$)
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.
함수 $f(x)$가 $x=4$에서 미분가능하면, 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

$f(4)=4+4=8$

$\lim\limits_{x\to 4-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 4-0}(x+4)=8$

$\lim\limits_{x\to 4+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 4+0}(ax^2+bx+c)$

$=16a+4b+c$

함수의 연속의 정의에서 $x=4$에서의 함수 $f(x)$의 극한값이 존재해야 하므로

$16a+4b+c=8$ $\cdots$ ㉠

마찬가지 방법으로 $x=5$에서의 함수 $f(x)$의 극한값이 존재해야 하므로

$25a+5b+c=10$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$b=-9a+2,\ c=20a$ $\cdots$ ㉢

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4-0}\frac{x+4-8}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4-0}\frac{x-4}{x-4}=1$$

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4+0}\frac{ax^2+bx+c-8}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4+0}\frac{(x-4)(ax-5a+2)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4+0}(ax-5a+2)=-a+2$$

미분가능성의 정의에서

$-a+2=1$에서 $a=1$

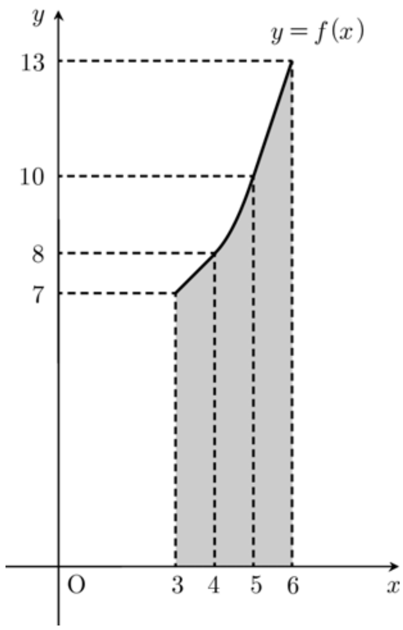
이를 ㉢에 대입하면

$b=-7,\ c=20$

함수 $f(x)$의 방정식은 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & (3\le x\le 4) \\ x^2-7x+20 & (4<x<5) \\ 3x+1 & (5\le x\le 6)\end{cases}$$

2015학년도 6월 모의평가 수학영역 B형 해설



$a=\int_{3}^{6} f(x)dx$

$=\int_{3}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{6} f(x)dx$

$=\frac{7+8}{2}\times 1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+20x\right]_4^5+$

$\frac{10+13}{2}\times 1$

$=\frac{15}{2}+\frac{53}{6}+\frac{23}{2}=\frac{167}{6}$

$\therefore\ 6a=167$

답 167

[참고]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.