2015학년도 6월 모의평가 수학영역 A형 해설

01

[풀이]

지수법칙에 의하여

$3\times 8^{\frac{2}{3}}=3\times(2^3)^{\frac{2}{3}}=3\times 2^{3\times\frac{2}{3}}=3\times 2^2=12$

답 ①

02

[풀이]

행렬의 덧셈과 실수배의 정의에서

$2A+B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

행렬 $2A+B$의 모든 성분의 합은 9이다.

답 ④

03

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=2+1=3$

답 ③

04

[풀이]

주어진 그래프의 서로 다른 변의 개수가 4이므로 주어진 그래프를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 $8(=2\times 4)$이다.

답 ②

05

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\log_8 2+\log_8 4=\log_8 2\times 4=\log_8 8=1$

답 ①

06

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_3=a_1+2d=2+2d=10$

d에 대한 일차방정식을 풀면

$d=4$

$\therefore\ a_5=a_1+4d=2+4\times 4=18$

답 ⑤

07

[풀이]

함수 $y=2x+5$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1)$과 구간 $(1,\ \infty)$에서 연속이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(2x+5)=7$

$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}(2x+5)=7$

$x=1$에서의 함수 $f(x)$의 극한값은

$\lim_{x\to 1}f(x)=7$

$x=1$에서의 함수 $f(x)$의 함숫값은

$f(1)=a$

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\therefore\ a=7$

답 ②

08

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=a_1 3^{n-1}=3^n(n\geq 1)$

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{7}{3^n}\right)=3-0=3$

답 ③

09

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x+4$

미분계수의 정의에서

$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}$

$=\frac{1}{2}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}f'(1)=3$

답 ③

2015학년도 6월 모의평가 수학영역 A형 해설

10

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)}=4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=4\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{4n}{n+1}=\frac{15}{4}$$

n에 대한 분수식을 풀면

$\therefore\ n=15$

답 ⑤

11

[풀이]

주어진 등식을 정리하면

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2-k&0\\0&4-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

이 연립방정식이 무수히 많은 해를 갖기 위해서는 행렬 $\begin{pmatrix}2-k&0\\0&4-k\end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않아야 한다.

$(2-k)(4-k)-0\times0=0$

즉, $(k-2)(k-4)=0$

k에 대한 이차방정식을 풀면

$k=2,\ 4$

따라서 구하는 값은 6이다.

답 ④

12

[풀이1]

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}2^2&0\\0&4^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2^3&0\\0&4^3\end{pmatrix}$$

$\vdots$

에서 다음과 같이 추론할 수 있다. (증명은 수학적 귀납법으로 한다.)

$$A^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&4^n\end{pmatrix}(n\geq1)$$

이를 주어진 등식에 대입하면

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times2^n\\4^n\end{pmatrix}$$

행렬의 상등의 정의에서

$x_n=3\times2^n,\ y_n=4^{n+1}$

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(x_n)^2}{y_n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times4^n}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{9}{1+0}=9$$

답 ④

[풀이2]

주어진 등식에 $n=1$을 대입하면

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

행렬의 곱셈에 대한 정의에서

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n+1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=AA^n\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_n\\4y_n\end{pmatrix}$$

수열 $\{x_n\}$의 귀납적 정의는

$x_1=6,\ x_{n+1}=2x_n$

수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 6이고, 공비가 2인 등비수열이므로, 일반항은

$x_n=3\times2^n$

수열 $\{y_n\}$의 귀납적 정의는

$y_1=4,\ y_{n+1}=4y_n$

수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 4이고, 공비가 4인 등비수열이므로, 일반항은

$y_n=4^{n+1}$

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(x_n)^2}{y_n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times4^n}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{9}{1+0}=9$$

답 ④

2015학년도 6월 모의평가 수학영역 A형 해설

13

[풀이]

$x \to -1-0$일 때, 함수 $f(x)$는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워진다.

$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 2$

$x \to 1+0$일 때, 함수 $f(x)$는 3보다 작은 값을 가지면서 3에 한없이 가까워진다.

$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 3$

$\therefore \lim_{x \to -1-0} f(x) + \lim_{x \to 1+0} f(x) = 5$

답 ⑤

14

[풀이]

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라고 하면

$v(t) = x'(t)$이므로

$v(t) = -2t+4$

$v(a) = -2a+4 = 0$에서

$\therefore a = 2$

답 ②

15

[풀이]

$D = 20$, $R = 81$을 주어진 등식에 대입하면

$L^2 = 100 \times 20^2 \times \log_3 81$

$= 100 \times 20^2 \times \log_3 3^4$

$= 100 \times 20^2 \times 4 = 20^4$

L이 양수이므로

$\therefore L = 400$

답 ①

16

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$

$f'(x) = 0$에서 $x = 2, 4$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(2) = 20 + a = 10$

$\therefore a = -10$

답 ②

17

[풀이]

주어진 식에 의하여

$$2a_{n+1} = 3a_n - \frac{6(n+1)-4}{(n+1)!}$$

이다.

$$2a_{n+1} - \frac{4}{(n+1)!} = 3a_n - 3 \times \frac{2}{n!}$$

이므로, $b_n = a_n - \frac{2}{n!}$라 하면

$2b_{n+1} = 3b_n$

이다. $b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n$이고 $b_1 = 1$이므로

$\left(\because b_1 = a_1 - \frac{2}{1!} = 1\right)$

$$b_n = b_1\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

이다. 그러므로 $a_n = \frac{2}{n!} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 이다.

함수 $f(n)$, $g(n)$은 다음과 같다.

$$f(n) = \frac{2}{n!},\ g(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore f(3) \times g(3) = \frac{2}{3!} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

답 ④

18

[풀이]

(부채꼴 $A_1B_1M_1$의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times \overline{A_1B_1}^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 세로의 길이를 x라고 두면

$\overline{A_2B_2} = x$, $\overline{B_2C_2} = 2x$

직각삼각형 $A_2B_2C_2$에서 피타고라스의 정리를 적용하면

$$\overline{A_2C_2} = \sqrt{\overline{A_2B_2}^2 + \overline{B_2C_2}^2} = \sqrt{5}\,x$$

그런데

$\overline{\mathrm{A_2C_2}}=\overline{\mathrm{A_1C_2}}-\overline{\mathrm{A_1A_2}}$

$=\overline{\mathrm{A_1D_1}}-\overline{\mathrm{A_1M_1}}=2-1=1$

$\sqrt{5}x=1$에서 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

두 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1M_1}$, $\mathrm{A_2B_2M_2}$의 반지름의 길이의 비가 $1:\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로, 그림 R_2에서 새롭게 색칠된 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{\pi}{20}$이다.

마찬가지의 방법으로 그림 R_n에서 새롭게 색칠된 부채꼴의 넓이를 a_n이라고 하면

$a_{n+1}=\dfrac{1}{5}a_n$, $a_1=\dfrac{\pi}{4}$

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ $(n\geq 1)$

무한등비급수의 공식에서

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$

$=\dfrac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{16}\pi$

답 ①

19

[풀이]

ㄱ. (참)

행렬의 곱셈의 정의에서

$A^3=A^2A=(-A)A=-A^2=A$

$(\because A^2=-A)$

ㄴ. (참)

행렬의 연산의 성질에 의하여

$AB^2=A(-A^2+A+E)$

$=A(2A+E)(\because A^2=-A)$

$=2A^2+A=-A$

$B^2A=(-A^2+A+E)A$

$=(2A+E)A(\because A^2=-A)$

$=2A^2+A=-A$

$\therefore\ AB^2=B^2A$

ㄷ. (참)

주어진 두 번째 등식에서

$B^2=-A^2+A+E$

$=2A+E(\because A^2=-A)$

주어진 첫 번째 등식에서

$A^2+A=O$, $4A^2+4A+E=E$

$(2A+E)^2=E$

역행렬의 정의에서 행렬 $2A+E$의 역행렬이 존재하므로 행렬 B^2의 역행렬이 존재한다.

행렬 B^2의 역행렬이 존재하므로 행렬 B의 역행렬이 존재한다.

이때, $B^4=E$이므로 역행렬의 정의에서 $B^{-1}=B^3$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

이차정사각행렬 A에 대하여 다음의 명제가 참임을 증명하자.

행렬 A^2의 역행렬이 존재하면 행렬 A의 역행렬이 존재한다.

(증명)

행렬 A^2의 역행렬이 존재하면 역행렬의 정의에서

$A^2B=E$, $BA^2=E$

를 만족시키는 이차정사각행렬 B가 존재한다.

행렬의 곱셈의 정의에서

$A^2B=A(AB)=E$

역행렬의 정의에서

$A^{-1}=AB$

따라서 행렬 A는 역행렬을 갖는다.

20

[풀이]

로그의 성질에서

$\log_b(ax-1)=\log_b a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)$

$=\log_b\left(x-\dfrac{1}{a}\right)+\log_b a$

이므로, 함수 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{a}$만큼 평행이동시키고, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다. 곡선 $y=\log_b x$의 점근선은 y

축$(x=0)$이므로 곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $x=\frac{1}{a}$이다.
이제 곡선 $y=f(x)$의 x절편을 구하기 위해 다음의 로그방정식을 풀자.
$\log_a(bx-1)=0$
$\log_a(bx-1)=\log_a 1$, $bx-1=1$, $x=\frac{2}{b}$
곡선 $y=f(x)$이 x축과 만나는 교점은 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이다.
이상에서 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}$이다. 정리하면
$b=2a$
이 등식을 주어진 조건 $0<a<1<b$에 대입하면
$0<a<1<2a$
정리하면
$\frac{1}{2}<a<1$
따라서 a, b 사이의 관계식은
$\therefore\ b=2a\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$
답 ③

21

[풀이]
다항함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
연속함수의 정의에서
$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$
즉, $\lim_{x\to1}g(x)=0(\because(가))$
조건 (나)에서 $n=1$이면
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
함수의 극한에 대한 기본성질에 의하여
$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}$
$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to1}g(x)=0\times0=0$
다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
연속함수의 정의에서
$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$
즉, $f(1)=0$ …㉠
조건 (나)에서 $n=2$이면
$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
$g(2)=a$(a는 상수)라 두고, 마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 함숫값을 구하면
$f(2)=0$ …㉡
이제 함수 $f(x)$, $g(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.
$f(x)=(x-1)(x-2)(x+b)(\because$ ㉠, ㉡$)$
$g(x)=(x-1)(x^2+cx+d)(\because$ 조건(가)$)$
조건 (나)에서 $n=1$이면
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x+b)}{x^2+cx+d}=\frac{-1-b}{1+c+d}$
$=0$
분수식을 풀면 $b=-1$이므로
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x-1)^2(x-2)$
조건 (나)에서 $n=3$이면
$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}=\frac{2}{9+3c+d}$
$=2$
분수식을 풀면 $3c+d=-8$ …㉢
조건 (나)에서 $n=4$이면
$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}=\frac{6}{16+4c+d}$
$=6$
분수식을 풀면 $4c+d=-15$ …㉣
㉢, ㉣을 연립하면
$c=-7$, $d=13$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$
$\therefore\ g(5)=12$
답 ⑤

22

[풀이]
수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

2015학년도 6월 모의평가 수학영역 A형 해설

답 3

23

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x+1$

$\therefore\ f'(10)=21$

답 21

24

[풀이]

함수 $f(x)$이 밑이 1보다 크므로, 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $8(=2^3)$을 갖는다.

즉, $a=8$

함수 $g(x)$이 밑이 1보다 작으므로, 함수 $g(x)$는 감소함수이다.

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $4\left(=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)$을 갖는다.

즉, $b=4$

$\therefore\ ab=32$

답 32

25

[풀이]

수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 두자.

$$b_n=a_n-\frac{5n}{n+1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{5n}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+\frac{1}{n}}=0+\frac{5}{1+0}=5$$

답 5

26

[풀이]

주어진 등식의 n에 $n-1$을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=2(n-1)+1=2n-1(\quad n\geq 2)$$

계차수열을 이용하여 일반항을 구하면

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$=15+2n-1=2n+14(n\geq 2)$

$\therefore\ a_{10}=34$

답 34

27

[풀이]

함수 $y=-x^3+2x$의 도함수는

$y'=-3x^2+2$

주어진 함수의 $x=1$에서의 미분계수가 -1이므로, 주어진 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

접선의 방정식은

$y=-(x-1)+1$ 즉, $y=-x+2$

이 직선이 점 $(-10,\ a)$를 지나므로

$\therefore\ a=10+2=12$

답 12

28

[풀이]

조건(나)에서 $n=1$이면

$(x_2,\ y_2)=(x_1,\ (y_1-3)^2)=(1,\ 4)$

조건(나)에서 $n=2$이면

$(x_3,\ y_3)=((x_2-3)^2,\ y_2)=(4,\ 4)$

조건(나)에서 $n=3$이면

$(x_4,\ y_4)=(x_3,\ (y_3-3)^2)=(4,\ 1)$

조건(나)에서 $n=4$이면

$(x_5,\ y_5)=((x_4-3)^2,\ y_4)=(1,\ 1)$

$\vdots$

다음과 같이 추론할 수 있다.

$(x_{4k-3},\ y_{4k-3})=(1,\ 1)$

$(x_{4k-2},\ y_{4k-2})=(1,\ 4)$

$(x_{4k-1},\ y_{4k-1})=(4,\ 4)$

$(x_{4k},\ y_{4k})=(4,\ 1)$

2015학년도 6월 모의평가 수학영역 A형 해설

(단, k는 자연수)

$2015 = 4 \times 504 - 1$이므로

$\therefore \ (x_{2015},\ y_{2015}) = (4,\ 4)$

따라서 구하는 값은 8이다.

답 8

29

[풀이]

$g(x) = f(x) - x^3$으로 두면, $f(x)$가 다항함수이므로 $g(x)$는 다항함수이다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^2} = -11$$

만약 $g(x)$가 1차함수이거나 상수함수라면 $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^2}$는 0에 수렴하고, $g(x)$가 3차 이상의 함수라면 $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^2}$는 발산한다. 따라서 $g(x)$는 2차함수이다.

이제 $g(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$으로 두자.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

이를 주어진 첫 번째 식에 대입하면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) = a + 0 + 0 = a = -11$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = x^3 - 11x^2 + bx + c$

함수의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(x)}{x-1} \times (x-1) \right\}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} \times \lim_{x \to 1} (x-1)$$

$= -9 \times 0 = 0$

다항함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 연속이므로

$f(1) = -10 + b + c = 0$ $\cdots$ ㉠

다항함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 미분가능하므로 미분계수의 정의에서

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = -9$$

즉, $f'(1) = 9$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 3x^2 - 22x + b$

$f'(1) = -19 + b = -9$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$b = 10,\ c = 0$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = x^3 - 11x^2 + 10x$

함수의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x \to \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{11}{x} + 10 \right)$$

$= 0 - 0 + 10 = 10$

답 10

30

[풀이]

조건(가)에서 주어진 a, b의 범위를 다음과 같이 세 가지의 경우로 나누어 생각하자.

(1) $1 \le a \le b < 10$인 경우

$\log a$의 지표는 0이므로 $\log a = f(a)$

$\log b$의 지표는 0이므로 $\log b = f(b)$

조건(나)에 대입하면

$\log b - \log a \le \log a - \log b$

정리하면

$\log b \le \log a$

로그부등식을 풀면

$b \le a$

즉, $a = b$이다.

$(a,\ b) = (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (9,\ 9)$

순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 9이다.

(2) $1 \le a < 10 \le b \le 20$인 경우

$\log a$의 지표는 0이므로 $\log a = f(a)$

$\log b$의 지표는 1이므로 $\log b = 1 + f(b)$

조건(나)에 대입하면

$\log b - \log a \le \log a + 1 - \log b$

정리하면

$\log b^2 \le \log 10a^2$

로그부등식을 풀면

$b^2 \le 10a^2$

$a = 1,\ 2,\ 3$이면 b는 존재하지 않는다.

$a = 4$이면 $b = 10,\ 11,\ 12$

$a = 5$이면 $b = 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15$

$a = 6$이면 $b = 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18$

$a = 7,\ 8,\ 9$이면 $b = 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,$

16, 17, 18, 19, 20
순서쌍 (a, b)의 개수는 48이다.
(3) $10 \leq a \leq b \leq 20$인 경우
$\log a$의 지표는 1이므로 $\log a = 1 + f(a)$
$\log b$의 지표는 1이므로 $\log b = 1 + f(b)$
조건(나)에 대입하면
$\log b - \log a \leq -1 + \log a + 1 - \log b$
정리하면
$\log b \leq \log a$
로그부등식을 풀면
$b \leq a$
즉, $a = b$이다.
$(a, b) = (10, 10), (11, 11), \cdots, (20, 20)$
순서쌍 (a, b)의 개수는 11이다.
(1), (2), (3)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 71 이다.
답 71