



저작자표시-비영리 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권으로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

석사학위논문

일반계 고등학교 3학년 학생들의
극한 개념에 대한 이해와 적용능력에
관한 실태조사



한국교원대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

이 연 회

2007년 2월

일반계 고등학교 3학년 학생들의
극한 개념에 대한 이해와 적용능력에
관한 실태조사

지도교수 이 기 석·전 평 국

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 논문으로 제출함

한국교원대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

이 연 회

2007년 2월

이 연 회 의

교육학석사(수학교육)학위 논문을 인준함

심사위원장 _____ 인

심 사 위 원 _____ 인

심 사 위 원 _____ 인

한국교원대학교 교육대학원

2007년 2월

목 차

논문요약	iv
I. 서론	1
A. 연구의 필요성 및 목적	1
B. 연구문제	4
C. 용어의 정의	4
D. 연구의 제한점	6
E. 기대되는 효과	7
II. 문헌 연구	8
A. 개념	8
1. 개념	8
2. 개념이미지	10
B. 극한	16
1. 극한	16
2. 선행 연구의 고찰	20
III. 연구 방법 및 절차	25
A. 연구대상	25
B. 연구 방법 및 절차	25
C. 검사도구	25
D. 검사 방법 및 절차	29
1. 예비검사	29
2. 본 검사	30
E. 자료의 처리 및 분석	31
IV. 결과 및 논의	34
A. 결과	34
B. 논의	48
V. 요약, 결론 및 제언	54

A. 요약	54
B. 결론	57
참고 문헌	59
ABSTRACT	63
<부록>극한에 대한 개념 검사지	66



표 목 차

<표 III-1> 개념 검사지의 문항 구성	26
<표 IV-1-1> 문항 1에 대한 빈도수 및 백분율	34
<표 IV-1-2> 문항2에 대한 빈도수 및 백분율	35
<표 IV-1-3> 문항 3에 대한 빈도수 및 백분율	36
<표 IV-1-4> 문항 4에 대한 빈도수 및 백분율	37
<표 IV-1-5> 문항 5의 빈도수 및 백분율	38
<표 IV-2-1> 문항 6에 대한 빈도수 및 백분율	39
<표 IV-2-2> 문항 8에 대한 빈도수 및 백분율	40
<표 IV-2-3> 문항 9에 대한 빈도수 및 백분율	41
<표 IV-2-3 > 문항 7에 대한 빈도수 및 백분율	42
<표 IV-2-4> 문항 10에 대한 빈도수 및 백분율	43
<표 IV-2-5> 문항 11에 대한 빈도수 및 백분율	44
<표 IV-2-6> 문항 12에 대한 빈도수 및 백분율	45
<표 IV-3> 문항 13에 대한 빈도수 및 백분율	46

그 립 목 차

[그림 II-1] 개념 이미지와 개념 정의의 상호작용	12
[그림 II-2] 형식적 개념의 인지적 성장	12
[그림 II-3] 정의와 이미지 사이의 상호작용	12
[그림 II-4] 순수한 형식적 추론	13
[그림 II-5] 직관적 사고를 따르는 연역	13
[그림 II-6] 직관적 반응	13
[그림 III-1] 수열의 극한 개념 이해에 대한 평가 내용	27
[그림 III-2] 함수의 극한 개념의 이해에 대한 평가 내용	28
[그림 III-3] 함수의 극한과 수열의 극한과의 관계 이해에 대한 평가 내용	29
[그림 IV-1] 문항 13에 대한 응답 사례	47

논 문 요 약

일반계 고등학교 3학년 학생들의 극한 개념에 대한 이해와 적용능력에 대한 실태조사

이 연 회

한국교원대학교 교육대학원 수학교육전공
(지도교수 이기석 · 전평국)

본 연구의 목적은 일반계 고등학교 3학년 학생들의 수열의 극한과 함수의 극한 개념에 대해 얼마나 이해하고 있으며, 수열의 극한과 함수의 극한과의 관계를 얼마나 이해하고 있는지를 알아봄으로써 극한 개념 지도에 대한 시사점을 제 공하고자 하는데 있다.

이를 위하여 다음과 같이 연구문제를 설정하였다.

1. 수열의 극한의 개념(정의)을 어느 정도 이해하고 있는가?

(1) 수열의 극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

(2) 수열의 극한에 관한 문제에서 극한 개념을 올바르게 이해하고 있는가?

2. 함수의 극한의 개념(정의)을 어느 정도 이해하고 있는가?

(1) 함수의 극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

(2) 좌극한과 우극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

(3) 함수의 극한에 관한 문제에서 극한 개념을 올바르게 이해하고 있는가?

3. 수열의 극한과 함수의 극한의 관계를 올바르게 이해하고 있는가?

이와 같은 연구문제를 해결하기 위하여 지필검사를 통한 조사연구 방법을 실시하였다. 지필검사는 극한에 대한 개념 검사지로서 연구목적에 맞도록 현행 고등학교 교육과정에 맞추어 총 13문항으로 구성하였다.

연구대상은 연구목적에 맞추어 충남 당진군 소재의 1개교 5학년 136명의 고등학교 자연과정 3학년 학생들을 대상으로 조사 연구하였다.

본 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째로, 수열의 극한의 개념(정의)에 대해 소수의 학생들이 올바른 이미지를 형성하고 있는 것으로 나타났으나 이들조차도 수열의 극한이 수열이 한없이 가까워질 수는 있으나 같아질 수는 없는 것이라는 관념이 학생들의 사고 속에 깊게 자리잡고 있는 것을 볼 수 있었다. 반면 수열의 극한에 관한 문제는 많은 학생들이 옳게 해결하였다. 이러한 것으로 볼 때 학생들이 극한에 대한 개념을 형성하는 데 있어서, 일상생활에서 사용되고 있는 ‘극한’이라는 단어와 극한을 직관적 정의로 표현하는 과정에서 나타나는 ‘한없이 가까워진다’와 같은 언어의 영향을 벗어나는 것이 매우 어렵다는 것을 볼 수 있었다. 따라서 다양한 예를 통해 오개념들을 극복하는 과정이 필요하다고 하겠다.

둘째로, 함수의 극한 개념(정의)에 대해 소수의 학생들이 옳게 진술하고 있었으나 이들 중에는 좌극한(우극한)이 함수의 극한이라고 생각하고 있거나 함수의 극한은 근사값이라고 설명한 표현에 대해서도 옳다고 응답한 학생도 있었다. 따라서 다양한 예를 통해 오개념을 극복하는 과정이 필요하다고 하겠다.

또한 많은 학생들이 함수의 극한과 함수의 연속성을 혼란스러워 함을 볼 수 있었다. 이는 함수의 극한 이후 후속학습인 함수의 연속성이 극한 개념을 바탕

으로 이루어지고 있기 때문에 혼돈이 일어나는 것으로 볼 수 있으며, 이것은 다양한 그래프의 제시를 통해 연속성과는 다른 의미임을 일깨워 주는 과정이 필요하다고 하겠다.

셋째로, 수열의 극한과 함수의 극한 개념을 서로 연관시키지 못하고 있음을 알 수 있었다. 많은 학생들이 함수의 극한이 존재하는지를 좌극한과 우극한을 통해 판단하고 있었으나, 같은 수로 수렴하는 수열을 이용하여 함수의 극한을 알아보았을 때 극한이 다르게 나타나면 함수의 극한이 존재하지 않게 됨을 이해하고 있는 학생은 매우 드물었다. 이는 교과서에 그 과정이 제시되어 있으나 단지 과정으로만 여길 뿐 정확하게 그 의미를 파악하는 과정이 부족하였기 때문으로 본다. 따라서 수열의 극한과 함수의 극한을 연결시켜 생각해 볼 수 있는 기회를 제시해주는 과정이 필요하리라고 본다.



※ 이 논문은 2007년 2월 한국교원대학교 대학원위원회에 제출된 교육학석사(수학교육)학위 논문임.

I. 서 론

A. 연구의 필요성 및 목적

수학문제를 해결한다는 것은 무엇인가? 단순히 수학 교재에 나오는 문제들의 정답을 찾는 것을 말하는가? 제 7차 교육과정에 따르면 수학적 힘의 신장을 위해 수학교육이 필요하다고 말하고 있다. 수학적 힘이란 문제해결력, 창의적 사고력, 논리적 사고력, 비판적 사고력, 문제 해결능력, 의사소통능력, 수학에 대한 자신감과 긍정적인 태도, 수학과 인접 학문과의 관련성 및 수학의 유용성 인식 등을 말한다. 이러한 수학적 힘을 신장시키기 위한 이유로는 지식 기반 정보화 사회인 21세기에 적합한 교육이 단순 기능인의 양성보다는 자기 주동적으로 지적 가치를 창조할 수 있고 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 중점을 두어야 하기 때문이라고 하고 있다(교육부, 1997). 이것은 학생들이 성장하며 실제 부딪치게 될 생활 속의 여러 문제 상황 속에서 좀 더 합리적으로 사고하고 창의적으로 대처하며 논리적으로 대처해 나갈 수 있는 능력을 길러주기 위함일 것이다.

NCTM(1989)의 미적분의 개념적 토대에서는, 미적분의 핵심적 아이디어인 극한 등은 함수의 이해를 깊게 하고 실세계의 현상을 나타내고 그 현상에 대한 의문에 답을 하는 데 있어서 함수의 유용성을 보여주는 데 기여한다고 말하고 있다. 해석학의 이론적 기초가 되는 극한은 제 7차 교육과정에서는 선택형 교육과정에 포함되어 있으나 이미 학생들은 중학교 과정 중에서 순환하는 무한소수를 접함으로써 처음으로 극한을 접하게 된다. 예를 들어 학생들은 $\frac{1}{3}$ 이 $0.3333 \dots$ 이라는 사실을 순환하는 부분의 수가 계속적으로 반복된다는 역동성에 의해 직관적으로 받아들이게 된다. 반면에 $0.3333 \dots$ 이 $\frac{1}{3}$ 이 되는 것을 받아들

이는 것은 혼란스러워 한다. 또한, 학생들은 유리함수의 그래프를 학습하게 되는 과정에서 곡선 위의 점이 한없이 가까워지게 되는 점근선이 존재하게 됨을 알게 된다. 예를 들어 $y = \frac{1}{x}$ 의 함수를 그래프로 시각화하였을 때, x 축과 y 축의 점근선과 그래프가 만나게 되지 않을까하는 의구심이 학생들의 사고 속에서 쉽게 사라지지 않는 것을 볼 수 있다.

고등학교 수학 I의 교사용 지도서를 살펴보면, 극한에 관한 개념은 학생들이 직관적으로 받아들이도록 지도하고 있다면서 이에 따라서 ‘한없이 커진다’ 또는 ‘한없이 가까워진다’와 같이 물리적 직관에 의존하는 표현을 이용하고 있다고 말하고 있다. 우정호(1998)는 극한을 고려할 때, 역동적인 접근 과정의 결과라는 직관적인 관념이 실제로 관찰 가능한 사건인 것처럼 생각하게 되는 심리적인 속박이 존재한다고 하고 있다.

Tall과 Vinner(1981)는 극한과 연속성에 관한 특별한 언급으로서 개념 정의와 개념 이미지라는 용어를 사용하였다. 이는 학생들이 형식적 정의를 접하기 이전의 경험이 그들이 개념에 대해 심적 표상을 형성하는 데 중요한 영향을 끼친다는 것이다. 이것은 실제 학생들이 형식적 정의를 접했을 때 정의를 받아들이는 데 있어 상당한 어려움을 동반한다는 것을 나타낸다. 또한 Davis & Vinner(1986)는 사고의 한 항목으로 남아있는 언어의 영향으로 극한 개념에는 피할 수 없는 오개념이 표면적으로 존재한다고 말하고 있다. 극한 개념은 풍부한 사고를 발달시킬 수 있는 원천이 되지만 그만큼 명확한 사고를 불러오기에는 어려움이 많다는 것을 알려주고 있다.

Courant(1969)는 실수축의 전 구간을 움직이는 연속변수를 다루는 데서 직선 위의 점들은 조밀한 집합을 이루고, 주어진 점 ‘다음’의 점은 없기 때문에, 연속변수가 구간 안의 모든 값을 크기의 순서에 따라 고정된 값에 ‘가까이 가는’ 방법을 말한다는 것은 불가능하다고 말하면서 확실히 연속체에 대한 직관적 관념은 사람의 마음속에서 심리적인 실체를 가지고 있다고 말하고 있다. 예를 들어

제논(Zenon, B. C. 490-429)의 역설은 직관적 생각과 완전히 논리적인 용어로 직관의 과학적 모습을 설명하고자 하는 수학적 언어 사이의 불일치를 나타내는 사례라고 할 수 있다고 말하고 있다.

극한에 대한 오개념과 오류분석에 관한 연구(Bezuidenhout, 2001; Sierpiska, 1987; Vinner, 1991; 노수진, 2000; 한중희, 1997 등)는 학생들이 극한의 개념을 완전하게 이해하는 경우가 매우 드물다는 것을 보여주고 있다. 직관에 호소하는 방법은 함수가 극한에 도달했는가, 한없이 극한이 가까워진다는 말이 도대체 얼마만큼 가까워졌다는 것인가, 가까워진다는 말 속에 들어있는 움직임은 계속해서 움직이는 가 등등으로 인해 극한 개념에 대해 심적 표상을 형성하는 데 있어 혼란스러워하게 만든다. 많은 학생들이 극한의 형식적 정의를 이해하지 못한 채 극한의 문제를 해결하고 극한의 개념을 이해했다고 받아들이고 있다고 하고 있다.

다른 연구로는 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구(박선화, 1998)를 통해, 극한 개념의 세 측면과 극한 개념에 대한 인지적 장애 요소와 이론적 분석을 하였고, Zachariades(2004)는 중등 수학 교사의 극한과 연속성의 개념에 대해 연구를 통해 중등 수학 교사들이 극한 개념을 정확하게 이해하고 있는지 연구하였고, 박수정(2001)은 예비교사와 현직 교사의 극한 개념에 관한 교과 내용적 지식과 교수학적 지식에 관한 연구를 통해 얼마만큼 교사들이 극한의 직관적 개념과 형식적 개념을 이해한 채 학생들을 지도하고 있는가를 연구하였다.

본 연구에서는 학교 수학에서 고도의 추상성으로 인해 고차원적인 사고가 요구되는 극한의 개념에 대해 학생들이 얼마나 이해하고 있는지를 알아보고, 고등학교 학생들의 극한 개념에 대한 실태를 정확히 파악하여 수학과 교수-학습 방법의 개선과 학습 자료의 개발에 필요한 기초 자료를 수집하는 데 활용할 수 있는 도구로서 도움을 주고자 한다.

B. 연구문제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

1. 수열의 극한의 개념(정의)을 어느 정도 이해하고 있는가?

(1) 수열의 극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

(2) 수열의 극한에 관한 문제에서 극한 개념을 올바르게 이해하고 있는가?

2. 함수의 극한의 개념(정의)을 어느 정도 이해하고 있는가?

(1) 함수의 극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

(2) 좌극한과 우극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

(3) 함수의 극한에 관한 문제에서 극한 개념을 올바르게 이해하고 있는가?

3. 수열의 극한과 함수의 극한의 관계를 올바르게 이해하고 있는가?

C. 용어의 정의

1. 극한의 정의(definition of limit)

현재(7차 교육과정) 고등학교에서 정의하고 있는 것을 따른다.

(1) 수열의 극한의 정의

무한수열 $\{a_n\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커지면서 일반항 a_n 의 값이 일정한 수

α 에 한없이 가까워질 때 수열 $\{a_n\}$ 은 α 에 수렴한다고 하며, α 를 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값 또는 극한이라 한다.

(2) 함수의 극한의 정의

함수 $f(x)$ 에서 x 가 a 와 다른 값을 취하면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$ 는 α 에 수렴한다고 하며 α 를 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 극한값 또는 극한이라고 한다.

(3) 함수의 좌극한의 정의

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 작으면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면, α 를 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 좌극한이라고 한다.

(4) 함수의 우극한의 정의

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 크면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 β 에 한없이 가까워지면, β 를 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 우극한이라고 한다.

2. 오개념(misconception)

오개념이란 학생들이 수학에서 사용하고 있는 개념과 그 의미를 다르게 이해하거나 잘못 사용하는 개념이다.

본 연구에서는 수열의 극한, 함수의 극한, 좌극한과 우극한의 정의에 대해 교과서에 제시된 정의와 다르게 이해하고 있는 개념을 오개념이라 한다.

3. 극한에 관한 문제

(1) 수열의 극한에 관한 문제

본 연구에서는 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 에 수열의 극한에 관한 기본 성질을 적용했을 때 $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ 의 꼴로 한정한다.

(2) 함수의 극한에 관한 문제

본 연구에서는 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\}$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 에 함수의 극한에 관한 기본 성질을 적용했을 때 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ 의 꼴로 한정한다.

4. 수열의 극한과 함수의 극한의 관계

본 연구에서는 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ 이면 a 에 수렴하는 임의의 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \alpha$ 이고, 이것의 역도 성립한다는 것을 말한다.

D. 연구의 제한점

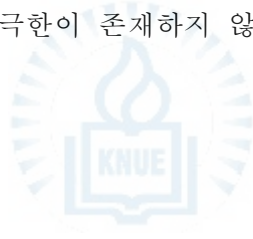
1. 본 연구의 대상은 연구자가 임의로 선정하였기 때문에, 다른 지역의 학생들에게도 동일한 연구 결과가 나올 것이라고 일반화하는데 제한점을 갖는다.
2. 본 연구에서는 학생들이 검사지에 써놓은 답과 풀이과정만을 보고 분석하였으므로 학생들의 세심한 사고과정을 파악하는 데에는 제한점을 갖는다.
3. 정답과 오답의 결과 처리는 수학 교과서(수학I, 수학 II, 서울:(주)지학사)에 표현된 설명에 준하여 처리하였으므로 관점이 다른 교과서에 따르면 해석상의

차이가 있을 수 있다.

E. 기대되는 효과

본 연구를 통해서 다음과 같은 효과를 예상할 수 있다.

1. 극한의 개념에 대하여 학생들의 이해 정도를 살펴봄으로써 극한 개념의 지도에 도움을 줄 수 있다.
2. 극한에 관한 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 극한 개념에 대한 학생들의 이해 정도를 살펴봄으로써 극한 개념 지도에 도움을 줄 수 있다.
3. 수열의 극한과 함수의 극한과의 관계에 대해 학생들이 가지고 있는 이해 정도를 파악함으로써 함수의 극한이 존재하지 않는 경우를 지도하는 데 도움을 줄 수 있다.



II. 문헌 연구

본 연구와 관련된 문헌은 크게 개념과 극한 두 단원으로 나누어 검토하였다.

첫째 단원에서는 개념과 개념이미지에 대해 살펴보고, 둘째 단원에서는 극한에서의 오개념이 발생하는 원인을 살펴보고, 극한에 관한 선행 연구에 대해 알아보하고자 하였다.

A. 개념

1. 개념

개념이란, 인간이 지각하고 경험한 개개의 사상에서 구체적인 특수성을 버리고 공통적인 속성 또는 특성을 기초로 하여 독특한 이름이나 기호로서 분리될 수 있도록 한 덩어리로 묶쳐놓은 총체를 말한다.

사전에서의 개념의 의미를 살펴보면 국어대사전(김민수 외, 1997)에서는 개개의 사물로부터 비본질적인 것을 버리고 본질적인 것만을 추출해 내는 사유의 한 형식, 또는 사물 현상에 대한 일반적인 지식이나 관념을 말한다. 또, 한 국어사전(남영신, 2006)에서는 하나의 사물을 나타내는 여러 관념 속에서 공통적인 요소를 뽑아 종합하여 얻은 하나의 관념 또는 어떤 사물에 대한 대강의 뜻이나 대강의 내용이라고 말하고 있다. 개념은 외연과 내포에 의해 결정된다고 하는데 외연은 그 개념이 적용할 수 있는 전 범위로서 개념의 속성을 가지고 있는 개체의 전부를 의미하고 내포는 그 개념을 구성하고 있는 징표로서 개념을 특징짓는 공통적이고 본질적인 성질 전체를 말한다.

Van Engen(1953)은 성인과 아동의 개념 형성은 다르다고 지적하면서 아동의 개념 형성과정은 지각-추상화-일반화라는 순서를 따르지만 성인의 경우는 반드시 이 순서를 따르는 것은 아니라고 말하고 있다. 새로운 개념을 학습할 때 성

인의 경우에는 단어에 정확한 정의가 부여된다면, 그것들과 실세계와의 관련을 필요로 하는 경우도 있지만, 아동의 경우에는 적당한 감각 경험을 제시해주는 것이 필요하고 특히 추상적인 내용을 교재로 하는 수학교육에 있어서는 이러한 배려가 중요하다고 한다(2001, 정은실). Freudenthal(1978)도 수학적 개념은 귀납적 이해, 즉 여러 가지 보기의 관찰로부터 귀납적으로 획득되는 것이 아니라 ‘전형적인 보기’로부터 그 구조를 파악하여 획득되는 각지에 의해서라고 말하고 있다(우정호, 2000).

수학적 개념에 대해 학습자가 지닌 내적 구성물을 수학적인 개념 표상이라 부른다. 표상은 Werner(1964)에 따르면 구체적인 실체에 연관된 추상적인 개념으로서 어떤 사람의 생각 속에 A라는 실체가 ‘무엇’으로 전환되어 자리 잡혀 있을 때 그 무엇이 표상이라고 말하고 있다. 또 그는 인간을 세상을 적응하게 하는 ‘앎’이란 주변의 사물이나 상황에 대한 자기 자신의 경험을 정리하여 ‘어떤 것’을 ‘무엇’으로 머리 속에 띄우는 표상에 의해서만 가능하다는 것이다(1988, 이종희).

Sfard & Linchevesky(1994)는 대부분의 수학적 개념에는 선천적으로 과정과 대상이라는 이중성이 존재하는데 과정 지향적인 조작적 개념이 먼저 생겨나고 그 후에 그 과정의 구체화를 통해서 구조적 개념인 수학적 대상으로 발전한다고 한다. Sfard(1991)는 수학적 개념이 세 가지 단계를 거쳐서 발전하는데 첫 번째는 내면화의 단계로서 이미 잘 알고 있는 수학적 대상에 대한 몇 가지 조작이 수행되고, 두 번째 단계는 압축 단계로 이미 행한 조작과 과정이 좀 더 다루기 쉬운 단위로 압축되며, 세 번째 실재화의 단계로서 이제까지 다루어오던 무엇인가를 새로운 시각으로 이미 익숙해 있던 것처럼 친숙하게 바라보는 갑작스런 능력이 발동되는 단계이며, 여기서 새로운 실재는 완전히 성숙된 하나의 수학적 대상으로 새롭게 인식된다고 하고 있다(2001, 정은실).

이종희(2002)는 인간의 사고 과정을 거쳐 나온 수학적 결과들은 절대적인 것이 아니라 인간 활동의 다른 결과물처럼 사회적으로 구성되는 것이므로 수학적 오류가 존재하고 그 수학적 오류를 극복하는 것은 수학의 발전을 위해 중요하다

고 하고 있다. 이처럼 수학적 개념을 형성하는 데 피할 수 없는 장애를 인식론적 장애라고 하는데 Hall(1981)의 입장에서 인식론적 장애의 근원은 비공식적인 수준에서 본다면 일상어의 영향에서 찾아볼 수 있으며 일상어는 수학에서의 공식적인 언어와 다르게 쓰이는 경우가 많다고 하며 일상어는 수학에서 설명할 필요가 없는 것처럼 부주의하게 사용되기도 한다. 공식적 수준에서의 인식론적 장애의 근원은 증명을 요구하지 않는 분명한 것으로 생각하는 것을 말하며 수학에 대한 기본적인 확신을 말한다(이종희, 2002).

그리고 장혜원(1997)은 어떤 개념에 대해서는 언어적으로 설명할 수 있을 만큼 분석적인 표상도 있는 반면에 언어로 표현할 수 없는 막연한 이미지를 갖는 개념도 있다고 말하면서 중등 수준에서의 수학 교재나 실제 수업은 정의에 의해 개념을 도입하여 학생으로 하여금 형성하도록 하지만 정의에 대한 인식 없이 주로 어렸을 때 구체물 자체로 인식된 개념이 많아 정의를 배운 후에도 정의를 또렷이 말하지 못하더라도 이미 지니고 있던 이미지만으로 지적 활동을 하는 학생들을 흔히 볼 수 있다고 하고 있다.

2. 개념이미지

Hershkowitz & Vinner (1980)은 개인적인 개념 구조에 대해 개념 정의와 개념 이미지로 소개했다. 후에 Tall & Vinner(1981)은 개념이미지란 주어진 개념과 관련된 모든 성질과 과정 및 심상(그림, 기호, 다이어그램, 그래프 등)들로 이루어진 전체적인 인지구조를 말하며, 개인이 과거의 경험을 통해 쌓아진 것이기 때문에 반드시 논리적일 필요는 없다면서 다음과 같이 언급하고 있다.

우리는 전체적인 인식 구조를 묘사하기 위해 개념 이미지라는 용어를 사용할 것이다. 그것은 개념과 관련되어 있으며, 모든 마음속의 상을 포함하고 성질과 과정을 포함한다. 개념 이미지는 항상 이치에 합당할 필요 없이 발전한다. 우리는 개념 이미지의 한 부분을 상기된 개념 이

미지가 특별한 때에 활동함을 언급할 것이다. 다른 때는 비교적 대립 이미지로 상기될 수도 있을 것이다. 단지 대립되는 관점은 동시에 필요에 의해 상기될 것이다. 그 필요조건은 임의의 실제적인 대립이나 혼돈이 존재한다. 반대로 ‘개념 정의’는 그 개념을 분류화하기 위해 사용된 단어의 형태이다.(Tall, 1992 재인용)

예를 들면, 초등학생이 뿔셈의 원리를 습득하는 과정을 보면, 처음 배우게 되는 뿔셈은 언제나 양의 정수범위에서 연산으로 다루어지게 되어 있기 때문에 학생은 뿔셈을 언제나 처음보다 줄어드는 것으로 관찰하게 된다. 이 때 이러한 관찰은 학생들로 하여금 그의 개념 이미지 일부를 형성하게 되고 나중에 음수의 뿔셈과정을 학습하게 될 때 갈등을 일으키게 만드는 원인이 되기도 한다고 말한다. 좀 더 덧붙여 그들이 언급한 내용을 살펴보면 다음과 같다.

인간의 두뇌가 순수하게 논리적인 것만은 아니다. 두뇌가 작동하는 방식이 복잡하기 때문에 수학의 논리와 모순되는 경우도 있다. 우리에게 통찰력을 제공하는 것이 항상 순수 논리만은 아니며, 실수를 하는 것도 우연만은 아니다. 개념과 관련된 전체적인 인지 구조를 설명하기 위하여 개념 이미지라는 용어를 사용할 것이며, 개념 이미지에는 모든 종류의 경험을 통해 오랜 시간을 거쳐 형성되며, 개개인이 새로운 자극에 부딪히거나 성숙해 감에 따라 변화하게 된다.(중략)

개념 이미지가 발달하는 과정에서 일관성을 항상 유지할 필요는 없으며, 인간의 두뇌가 그렇게 작동하지도 않는다. 감각적인 내용들이 투입되면 어떤 신경 단위들은 자극되고 어떤 것들은 작동되지 않을 것이다. 이러한 식으로 자극이 다르면 활성화되는 개념 이미지의 부분도 달라질 것이며, 반드시 일관성이 유지되면서 개념 이미지가 발달될 필요는 없다 (Tall & Vinner, 1981 재인용).

그러므로 개념은 객관적이지만 개념이미지는 개인의 주관에 개입된 지극히 개인적인 것이라 말할 수 있으며, 개념은 항상 옳은 것이지만 개념 이미지는 올바른 것 일수도 올바르지 않을 수도 있다.

Vinner(1983)는 개념 정의와 개념 이미지라는 아이디어를 다이어그램으로 나

타내기 위해 인지구조 내에 두 종류의 서로 다른 세포가 존재한다고 가정하였다. 하나 또는 두 세포 모두 비어있을 수도 있으며 비록 독립적으로 형성될지라도 두 세포 사이에 상호 작용이 있을 수 있다.



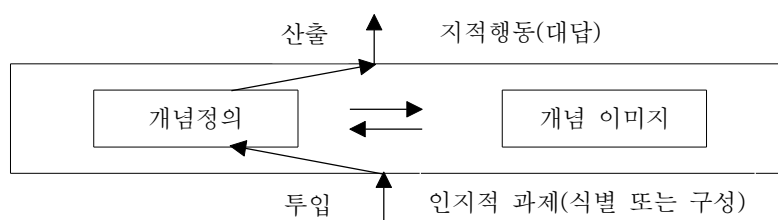
[그림 II-1] 개념 이미지와 개념 정의의 상호작용

위의 그림은 개념 형성의 장기 과정을 설명하고 있다. 하지만 중등 학교나 대학의 많은 교사들은 다음의 <그림 2>와 같이 일방적인 과정에 의해 개념이 형성될 것이라고 생각하는 것 같다. 즉 개념 이미지가 개념 정의에 의해 형성되고 통제될 것이라고 생각한다.

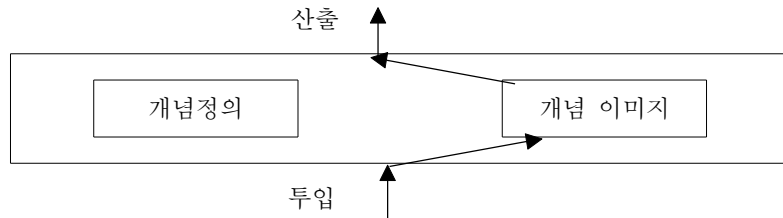


[그림 II-2] 형식적 개념의 인지적 성장

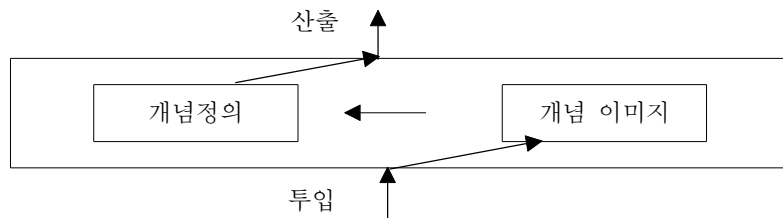
개념 형성 과정 뿐 만 아니라 문제 해결 과정이나 과제 수행 과정도 이와 유사한데 학생이 인지적 과제를 수행할 때의 과정을 다음의 그림 3-5 세 가지 중의 하나라고 생각하는 것 같다.



[그림 II-3] 정의와 이미지 사이의 상호작용

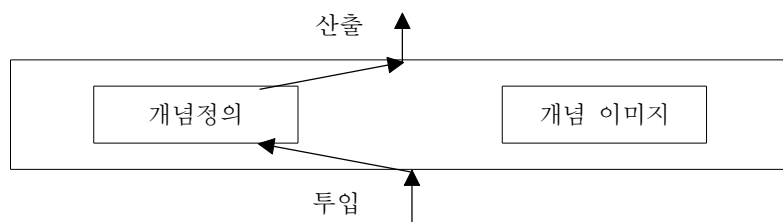


[그림 II-4] 순수한 형식적 추론



[그림 II-5] 직관적 사고를 따르는 연역

위의 과정들은 전문적인 상황에서 문제가 제기되었을 때 개념 정의와 개념 이미지의 연합 체계가 어떻게 반응하더라도 개념 정의를 고려하기 전에는 답을 형식화하기 어렵다고 본다. 하지만 이것은 이상적인 상황일 뿐이다. 실제로 일어나는 과정을 나타내는 더 적절한 모델은 다음과 같다.



[그림 II-6] 직관적 반응

여기서 개념 정의 세포는 비어 있지 않더라도 문제해결 과정 동안 작동하지 않는다. 일상생활에서의 사고 습관이 강하게 남아 있어 형식적 정의를 고려할

필요가 없기 때문에 개념 정의를 사용하려 하지 않는 것이다(박성환, 2001, 재인용). 학생들은 수학적 개념을 받아들여야 하는 상황에서 개념을 순수하게 받아들이는 것이 아니라 개념 이미지에 더 의존하게 된다.

Cornu(1981, Tall, 1992 재인용)는 수학적 활동 안에서 수학적 개념은 그들의 형식적인 정의를 따라서 사용될 뿐만 아니라 정신적인 표현을 통해 다른 사람과의 차이가 생긴다는 것이다. 이러한 개인적인 모델은 임의의 모델(수학을 학습하기 이전과 그것의 원형, 예를 들어 일상의 경험)로 수학적 정의를 방해하는 것으로 바뀌기 때문에 극한 개념에서 여러 가지 오개념이 발생한다고 말하고 있다.

오개념이란 학생들이 수학에서 사용하고 있는 개념과 그 의미를 다르게 이해하거나 잘못 사용하는 개념이다. 오개념은 학습에 장애가 될 뿐만 아니라 올바른 수학적 개념으로 전환하는데 방해가 될 수 있다.

Head(1886)는 오개념의 형성 요인을 다음과 같이 분류하고 있다(권영인, 2001 재인용).

먼저 내적 요인으로서 학습자는 환경에서 오는 정보를 감각, 지각, 기억, 상상, 판단, 추론 등의 인지과정을 통하여 개념으로 형성되는데 이러한 학습자의 인지과정적 특성으로부터 오개념이 형성될 수 있다고 한다. 외적요인의 첫째는 물리적 환경으로서 감각적 경험, 관찰을 통해 문제나 자연 현상을 접하는 것으로 어린 시절부터 쌓여 온 물리적 환경과의 상호작용을 말하며, 둘째로, 사회·문화적 환경은 인적 요인(학생 주변의 가족 등)과 물적 요인(라디오, 영화, TV 등)으로 이것들은 언어를 매개로 하기 때문에 언어를 사용하는 상황에 따른 복잡성으로 인하여 그 의미가 달라짐으로 인해 개념 형성에 영향을 미친다. 셋째로 교육적 환경은 인적 요인(교사, 교우 등)과 물적 요인(교과서, 수업 매체)으로 구성되며 특히 교사의 역할은 학생들의 개념 형성에 막대한 역할을 한다고 한다.

장혜원(1996)에 따르면, 수학적 개념에 대해 학생이 지닌 대부분의 개념이미지는 수학적 정의와의 갈등 요인을 지닌다고 하면서 갈등이 잠재적일 때에는 부적합한 개념 이미지를 지닌 채 아무 문제없이 수학적 정의를 배우기조차한다고 말

하고 있다. 또한, 수학적 정의가 인지적 갈등을 야기시킬 다른 개념 이미지를 의식시키지 못하면, 학생은 잘못되었다는 느낌도 없이 자신의 해석을 고수하면서 스스로 구성한 개념이미지의 강력한 영향 하에서 수학적 정의를 단지 비조작적이거나 여분의 것으로 간주하기 때문에 수학적 정의 자체와 어긋나는 개념 이미지가 형성되어 심각한 잠재적 갈등 요인이 된다고 한다.

또한 Brousseau는 ‘인식론적 장애(epistemological obstacle)’를 통해 어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용하였던 지식으로 학생의 인지구조의 일부가 되었지만 새로운 문제상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해진 지식으로서 이것도 개인의 개념이미지에 따른 장애라 할 수 있겠다(우정호, 2000 재인용).

이남숙(1997)은 개념정의와 개념이미지간의 격차 발생 원인에 관한 고찰의 연구를 통해 개념정의와 개념이미지간의 격차가 발생하는 원인을 세 가지로 제시하고 있다.

첫째, 공식적인 개념정의를 가르치는 교사의 개념이미지로 학생의 개념이미지 형성과정에 교사의 개념이미지가 중요한 영향을 준다는 것을 암시한다.

둘째, 수학 교과서의 내용 또는 수학학습 내용 자체에 내재된 인지갈등요인으로 교과서의 예가 개념이미지를 한정시키거나 수학지식 자체에 잠재적인 갈등요인이 내재되어 있는 경우를 말한다.

셋째, 학생의 인지 발달 단계보다 높은 수준의 개념을 학습하는 경우로 이는 학생의 인지 발달단계보다 높은 수준의 개념정의는 내면화될 때 동화, 조절을 거치지 못하고 그대로 인지구조 안에 남아 있다가 시간이 흐른 후 망각되거나 왜곡되어 잘못된 개념이미지를 형성하게 된다.

김명진(2000)은 예를 들어 함수라는 말을 들었을 때 사람들은 $y = f(x)$ 라는 식을 기억할 수도 있고, 함수의 그래프를 시각화할 수도 있고, 다항함수, 지수함수, 삼각함수 등 특별한 함수들을 생각할 수도 있다면서, 개념이미지란 개인과 관련되며, 개념 이미지는 공통의 경험이나 전형적인 예제들, 수업의 본보기 등에 의해서 형성되므로 학생들이 갖고 있는 개념 이미지는 학문적 준거에 근거하여

엄밀하게 형식적으로 규정된 의미인 개념 정의와 다를 수 있다고 말하고 있다.

이처럼 학생들 개개인은 수학과 같이 엄밀하게 정의된 개념들을 배우더라도 개념 그 자체를 언어로서 표현하면서, 개념들을 쉽게 이해할 수 있도록 돕기 위한 보조 자료들, 개인마다의 사전 경험들 등등의 다양한 환경들이 개념을 이미지로서 받아들면서 올바를 수도 있고 옳지 않을 수도 있는 각자의 개념 이미지를 형성하게 되는 것이다. 따라서 박선화(1993)는 잘못 형성된 개념 이미지는 이후의 더 높은 수준의 학습에 방해물이 될 뿐만 아니라 나아가 수학에 대한 흥미 상실이나 학습 부진으로 연결되는 인지적 장애를 일으킬 수 있으며, 학생들이 개념을 이해하는 데에 어려움을 겪는다는 것은 그들이 그 개념을 자신이 가지고 있는 인지 구조에 동화와 조절의 과정을 거쳐 새로운 개념의 형태를 창출하는데 어려움을 겪는다고 말하고 있다.

B. 극한

1. 극한

극한이 어떤 의미를 내포하고 있는지를 먼저 알아보자. 박교식(2003)은 極은 ‘(맨) 끝, 막 다른데, 절정’을 의미하며, 限은 시간, 공간, 수량, 정도 따위의 끝을 나타내는 말이라고 하면서, 극한은 일상적으로 사용되는 단어로 ‘궁극의 한계’ 또는 ‘사물이 진행하여 도달할 수 있는 최후의 한계나 지점’을 의미한다고 하고 있다. 또한 국어사전을 살펴보면 ‘사물이 더 이상은 나아갈 수 없는 한계, 사물의 끝 당은데’라는 표현을 사용하고 있다. 한계는 제한된 범위라는 표현을 포함하고 있다. 하지만 극한은 제한된 범위와는 또 다르다. 이와 같이 수학적 개념을 단어로 표현함으로써 처음 의도와는 다른 이미지를 불러일으킬 수 있다. 이것은 극한이라는 단어를 어떤 이미지로 묘사한다는 것부터가 쉽지 않은 일이라 하겠다.

고등학교 교육과정 해설서(이강섭 외, 2003)를 살펴보면 다음과 같다.

수열의 극한의 정의는 $\epsilon - N$ 논법과 같은 엄밀한 방법이 있으나, 이런 정의의 도입은 여기서 가능하지 않다. 따라서 수열의 극한의 정의는 구체적인 수열의 그래프와 ‘한없이 가까이 간다’는 표현을 사용하여 직관적으로 이해할 수 있도록 도입한다.

함수의 극한 개념은 수열의 극한 개념과 관련하여 도입하고, 구체적인 예와 그래프를 사용하여 직관적으로 이해하도록 지도한다.

이와 같이 교육과정에서는 학생들이 직관에 의존하여 정의를 배울 수 있도록 단원 지도상의 유의점으로 제시하고 있다. 하지만, 극한의 직관적 정의는 형식적 정의의 의미를 충분히 담아내지 못하기 때문에 왜곡된 이미지를 갖게 된다. 수학의 역사에서 극한의 정의의 변화를 살펴보면 다음과 같다.

극한의 $\epsilon - \delta$ 식의 형식적 정의는 오랜 시간 동안 있어왔던 시행착오를 거친 결과물이며, 직관에 의한 잘못된 이미지를 탈피하기 위해 많은 수학자들이 끊임없이 노력해왔다.

17세기에 뉴턴과 라이프니츠에 의해 미적분학이 발견되면서 이 새로운 도구는 그동안 수학자들을 당혹스럽게 했던 많은 문제에 성공적인 답을 제시해 주었다. 미적분학의 이러한 뛰어난 응용력에 밀려 그 기본-기초를 공고히 해야한다는 생각없이 100여년 동안 형식적인 조작만이 계속되었고 그 결과 많은 불합리한 일들이 발생하게 되었다. 특히, 해석학의 기초에서 이런 불만족스런 일들이 발생하게 되었는데, 해석학의 기초에서 이런 불만족스런 상태를 진정으로 치료하기 위해서는 ‘극한이론’이 필요하다는 것을 1754년에 이르러서야 달랑베르(d’Alembert)가 정확히 지적했다. 그러한 극한 이론에 대한 확실한 전개는 1821년까지 나타나지 않았고 1821년 프랑스 수학자 코시(Cauchy)가 (변하는 양의)극한에 대한 결정적인 개념을 개발하여 받아들일 만한 극한 이론을 전개하였고, 극한 개념을 사용해서 연속성, 미분가능성, 정적분 등을 정의하게 된 것이다. 그 후 해석학의 좀 더 심오한 이해의 필요성을 지적한 바이어슈트라스(Weierstrass)에 의해 무한개념 및 실수 개념과 관련된 장애가 극복되고, 실수 개념이 엄밀하게 정의되면서 극한의 형식적 정의가 완성되었다. 이는 뉴턴이 극한 개념을 미적분학에 처음 도입한 후 약 200년만의 일이다(김용운 외, 1996; 정수연, 2000 재인용).

이렇듯 역사 속에서조차도 극한에 대한 개념을 받아들인다는 것은 결코 쉽지

않은 일이었다. 우정호(2000)는 극한을 고려할 때 역동적인 접근 과정의 결과라는 직관적인 관념이 실제로 관찰 가능한 사건인 것처럼 생각하게 되는 심리적인 속박이 존재한다면 교사와 학생은 극한에 대해 교사는 “ x 가 a 로 향한다”는 은유는 $|f(x) - \alpha|$ 이 원하는 만큼 작을 수 있다는 것을 의미하지만 학생은 ‘향한다’는 은유 가운데에서 실제적인 운동 과정을 보게 되어 서로 다른 방식으로 해석할 수도 있다고 말하고 있다. Davis와 Vinner(1986, Tall, 1992 재인용)는 극한 개념에는 피할 수 없는 오개념이 표면적으로 존재한다고 하면서 그 원인 중의 하나를 사고 속에 남아있는 언어의 영향으로 보고 있다. 단어에는 이들 단어가 그려내는 사고가 존재하고 그것은 예전의 경험이 새로운 개념을 접했을 때 경험에 비추어 마음속에 그려내기 때문에 오개념이 존재할 수밖에 없다고 말하고 있다. 또한, Schwarzenberger & Tall(1977)은 ‘극한’이란 단어 자체에서 일상생활의 함축이 수학적 사고와 일치하지 않는 많은 것들을 갖고 있다. 일상에서의 극한은 ‘속도제한’처럼 지나칠 수도 없고 지나쳐서도 안 되는 것이다. 전문용어는 수학적 의미와는 다른 일상적인 의미를 가지고 있는 ‘tend to’, ‘approach’, ‘get close to’와 같은 문구를 포함한 수학적 극한 과정과 관계가 있다. 예를 들어 이러한 문구들이 수열에서의 극한과 관련되어 사용되어질 때 그들은 항상 수열의 각 항들이 극한과 가까워질 수 없다는 암시를 하게 된다.(Tall, 1992 재인용)

Davis & Vinner(1986)은 극한 개념과 관련된 갈등 요인의 주요 요인 5가지 제시하였다.

첫째로, 언어적 표현의 영향을 들 수 있다. 예를 들어 극한의 개념에서 ‘ n 이 무한대로 갈 때’와 같은 표현은 은유적 표현이기 때문에 생활 경험 내에서의 움직임에 대한 이미지가 수학적 경험을 형성할 때 영향을 주게 된다.

둘째로, 전수학적(pre-mathematical) 단편 지식의 모임이 수학적 관념의 형성에 영향을 주기 때문이다. 사실상 기초적인 수학적 관념들은 개인의 아동기 초기의 경험이 영향을 미치게 된다.

셋째, 수학외적 요인을 배제한 수학내의 개념 형성은 예를 들어 극한과 같이 복잡한 개념의 개념이미지를 형성하기 위해서는 점진적으로 개념이 형성되어야 하는데 이런 복잡한 개념의 어떤 부분은 다른 부분보다 먼저 적절한 심상을 형성하게 되어 개념이 부분적으로 성숙하지 못한 결과를 드러내게 된다.

넷째, 특정한 예의 영향은 교사가 학습의 초기에 개념의 이해를 돕기 위해 교사가 개념에 적합하다고 인정하는 특정한 예들을 열거하게 되는 데, 그러한 예들이 학생들의 개념 이미지를 형성하는 데 영향을 주게 된다.

마지막으로, 경험의 잘못으로 인한 오개념의 형성을 원인으로 들 수 있는데 이것은 수학 외의 경험, 또는 수학 내의 선행 학습경험을 잘못 이해하여 오개념이 형성될 수도 있다.

우정호(2000)는 우리가 ' x 가 무한대에 접근할 때' 또는 '무한대에서의 함수값'과 같은 표현은 '은유적이다'라고 말하고 있다.

수평선을 응시할 때 우리의 시야에 하나의 점에 도달하는데, 무한히 확장되는 직선이 시작적으로 그 점에 포함되게 된다. 이것이 무한대를 한 점으로 개념화하는 은유의 근거이다. 한 직선의 무한확장은 그 직선의 끝에 있는 위치(점)이다. 그 점을 ' ∞ '라고 한다. 여행자가 한 직선을 따라 무한히 갔을 때 그는 ∞ 점에 더 가깝게 다가간다는 것은 사실적으로는 거짓이지만 은유적으로는 옳다(중략)

흥미있는 것은 함수 f 는 a 에서 정의되지 않는 경우로 $f(x)$ 와 L 의 차이는 x 가 a 에 다가갈 때 소멸할 정도로 작아질 때, 수학자들은 은유적으로 $f(a) = L$ 이라고 말함으로써 함수를 a 로 은유적으로 확장한다. 다시 말하면 f 는 a 에서 정의되지 않을 때 x 가 a 에 다가갈 때 L 을 $f(x)$ 의 극한이라고 하면 $f(a)$ 는 L 이라는 일반적인 극한의 은유를 사용하는 것이다.

이처럼 극한 개념에 대해 많은 잘못된 개념 이미지를 가질 수밖에 없는 원인도 극한 개념에 대한 직관적 정의 뿐 만 아니라 형식적 정의 또한 은유적 표현을 품고 있기 때문이라 할 수 있겠다.

2. 선행 연구의 고찰

Aline Robert(1982)는 학생들의 수열의 극한 개념을 기억하는 여러 모형에 대해 연구를 통해 14-15세의 학생들이 수열의 형식적 정의가 제시되었음에도 불구하고 수열의 개념을 설명하는지 연구했을 때 4가지로 응답을 분류했다.(Tall, 1992 재인용)

1. 단조, 동적 단조(Monotonic and Dynamic monotonic)(12%): 수렴하는 수열은 위로 유계인 증가하는 수열이다. (또는 아래로 유계인 감소하는); 수렴하는 수열은 극한으로 접근하는 증가(또는 감소) 수열이다.

2. 동적(Dynamic)(35%): u_n 은 1에 접근하고 있다.; u_n 으로부터 1까지의 차는 작게 된다.; 값은 더욱 수에 작게 접근한다.

3. 정적(Static)(13%): u_n 은 1에 가까운 구간에 있다.; u_n 은 1의 주변에 모여있다.; u_n 은 1과 같이 밀접하다.

4. 혼합(Mixed)(14%): 위의 것들의 혼합
게다가 4%는 형식적인 정의를 갖고 있고, 5%는 문제를 해결하지 못했고, 나머지는 불완전하거나 u_n 을 1을 따라잡지 못하거나 u_n 은 1보다 아래에 존재한다는 잘못된 진술을 갖고 있다고 밝히고 있다.

Vinner(1981)는 극한에 대한 개념 이미지의 연구에서,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n})$ 를 구하라는 질문과 순환소수 0.9가 1과 같은지 아니면 1보다 작은지 답하고 자신의 답에 대한 이유를 대라고 요구했다. 그 결과 많은 학생들은 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n}) = 2$ 이지만 0.9이라고 주장했으며, “그 수가 1에 무한하게 가까이 접근함에도 불구하고 여전히 1이 아니기 때문에 1보다는 아주 적은 차이로 작다”라고 설명했다. 한 학생은 ‘ $S_n \rightarrow S$ 는 n 이 커짐에 따라 S_n 이 S 에 가까이 가게 되지만 무한할 때까지 실제로 S 에 도달하지는 않는다. 따라서 1에 가까이 가는 과정은 완전하게 1이 되지 않은 채 영원히 계속되기 때문에 순환소수 0.9는 1과 같지 않다’고 응답했다. 그러나

소수 $0.\dot{9}$ 를 분수로 나타내라고 했을 때, 그 학생은 다시 $0.\dot{9} = 1$ 이라고 답했다. 이는 '실제적인' 인식의 갈등을 나타낸 것이다.

Davis와 Vinner(1986)은 극한에 대해 학생들이 일으키는 오개념에 대해 조사하였는데, 조사된 오개념은 다음과 같다.

- 수열은 그것의 극한에 대해 도달해서는 안 된다. 예를 들어 수열 1, 1, 1, 1, ...은 수열의 극한으로 수렴하지 않는다.
- 극한의 의미를 '어딘가로 향해가는'것으로 이해하고 있다.
- 수열의 극한을 수열의 모든 항의 상위 또는 하위의 경계로 생각한다.
- 수열이 마지막 항을 갖는다고 생각한다.
- 수열의 마지막 항들을 무한하게 지나갈 수 있는 것으로 생각한다.
- 함수값과 함수의 극한값을 혼동한다.
- 수열은 알기 쉽고 확실하게 일관된 형태를 가져야만 한다고 생각한다.
- ' n 이 무한에 도달하지 않는다'라는 사실과 '수열이 극한에 도달하는가, 도달하지 않는가'를 혼동한다.

Vinner(1991)는 15명의 고등학생에게 극한 개념을 정의하도록 했을 때 단지 한 명의 학생만이 불완전하지만 수용할 수 있는 개념으로 답하였는데 나머지 학생들의 전형적인 오개념은 다음과 같다.

1. 수열은 '극한에 도달하지 않아야 한다. 따라서 수열 1, 1, 1, ...는 수렴하지 않는다.
2. 수열은 단조 증가하거나 단조 감소해야만 한다. 따라서 $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ 인 수열은 수렴하지 않는다.
3. 극한은 수열의 마지막 항이다. 우리는 무한히 많은 항을 확인한 후에 극한에 도달할 수 있다.

Williams(1991)는 대학 미적분학 과정에서의 학생들에게 고착된 극한 모델에 대해 연구하였는데, 연구를 통해 극한에 대한 학생들이 가지고 있는 극한의 신

념의 유형에 따라 경계로서의 극한, 근사값으로서의 극한, 도달불능으로서의 극한, 동적인 극한, 형식적 극한으로 분류하였다. 이 연구에 의하면, 학생들의 극한에 대한 절차적, 동적 관점은 굉장히 확고하고, 변형시키기 어려우며, 사전 그래프의 제시, 단순한 함수의 그래프에 대한 사전 경험, 개념적으로 단순하게 대입한 값과 규칙에서 벗어난 문제 등 과거의 사전 경험들이 극한 개념 학습에 영향을 준다고 말하고 있다.

Bezuidenhout(1999)는 극한과 연속성에 1학년 학생들의 몇 가지 개념에 대한 연구를 통해 개념을 강조하기 보다는 문제를 푸는 절차적인 관점을 강조하는 교수 학습으로 인하여 여러 가지 오개념이 발생한다고 밝히고 있다.

Zachariades(2004)에서 중등수학 교사의 함수의 극한과 연속성 개념에 대한 이해도와 추론 능력에 대해 연구하였는데 결과는 교사가 이들 개념에 대해 풍부한 이해를 하고 있지 못하다는 것이었다.

국내에서 극한에 관한 연구들을 살펴보면 다음과 같다.

한중희(1997)는 고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구를 통해 대부분의 학생이 극한의 정의를 정확히 이해하고 있지 못하고 있다고 밝히고 있다. 특히 함수의 극한에 대한 오개념의 예를 들면, 다음과 같다.

- 함수의 값이 무한대로 가는 것
- x 가 무한대로 증가할 때의 y 의 값
- x 의 어떤 한 점에 대응하는 y 값에 가까이 가는 값
- 함수값이 팽창하는 상태(커져가는 혹은 작아지는)
- 어떤 일정한 수 α 에 다가가지만 그 수와 같지는 않다

조현정(1997)은 극한에 관련된 학생들의 수학적 신념에 관한 연구를 통해 극한에 대해 85%이상의 학생이 극한에 대해 ‘도달 불가능한 것’, 또는 ‘근사값’이라는 개념이미지를 갖고 있으며, 대부분의 학생들이 학습을 통하여 습득한 극한 개념을 어느 정도 기억하고 있으나 이 개념을 정확하게 이해하지 못한 상태에서

상황에 따라 혼동을 일으키는 것으로 나타났다.

박선화(1998)은 고등학교 학생들이 극한 개념의 이해에 영향을 주는 요인을 인식론적 요인, 교수학적 요인, 심리학적 요인으로 분석하였다. 인식론적 요인으로는 일상어의 영향, 무한 직관의 영향, 수학적 대상의 존재성에 대한 인식의 영향을 교수학적 요인으로는 교과서 및 교육과정의 영향, 수학적 표현의 영향, 제한된 학습의 영향, 교사의 영향, 자신의 학습 경험에 대한 잘못된 해석의 영향을 심리학적 요인으로는 부적절한 일반화나 유추적 사고의 영향, 도구적 이해의 영향, 오개념인 선행 경험의 영향, 논리적으로 일관성 없는 판단의 영향, 인접 개념 사이의 혼돈의 영향, 개념의 일부분에만 주목하는 경향의 영향으로 분석하고 있다.

박임숙(2002)은 극한에 대한 오개념의 발생의 중요한 요인을 현 교육과정에서 채택하고 있는 직관적 정의로 보면서 공업계 학생들을 대상으로 형식적 정의를 사용한 수열의 극한을 지도하였을 때 극한에 대한 오개념 형성이 감소되었다고 보고하고 있다.

노수진(2000)은 고등학생들의 수열의 극한과 급수의 합에 대한 오개념을 알아본 결과 89%에 해당하는 학생들이 올바른 개념을 갖고 있지 못하며, 수열의 극한에 관한 문제를 해결함에 있어서의 오류의 원인은 곡해된 정리나 정의, 오용된 자료, 풀이과정의 생략, 잘못 해석된 언어 및 오류의 애매모호성, 기술적 오류들로 나타났다고 밝히고 있다.

여러 문헌들을 통해 살펴보았듯이 극한에 대한 직관적 정의 속에 포함되어 있는 동적인 은유적 표현이 개인마다의 이미지를 생성시키기 때문에 학생들이 다양한 관념들을 형성하게 되므로 극한에서의 오개념이 형성될 수밖에 없는 상황이기 때문에 먼저 수열과 함수에서의 극한에 대해 학생들이 얼마나 이해하고 있는지 파악해 보는 것이 필요하며 또한 두 극한의 관계를 이해하고 있는지 살펴볼 필요가 있다. 또한 극한에 대한 이해 정도를 파악함으로써 수학 교사들이 극한에 대해 지도하는 과정에서 학생들이 오개념을 최소한 불러일으키지 않도록

도움을 줄 수 있을 것이다.

따라서 고등학교 학생들의 극한 개념에 대한 실태를 정확히 파악하여 수학과 교수-학습 방법의 개선과 학습 자료의 개발에 필요한 기초 자료를 수집하는 데 활용할 수 있는 도구로서 활용할 수 있을 것으로 본다.



III. 연구 방법 및 절차

A. 연구대상

본 연구의 목적인 고등학교 3학년 학생들의 극한 개념에 대한 이해와 적용능력에 관해 알아보기 위해 연구자가 임의로 충남 당진군에 위치한 H 고등학교 3학년 자연계 5개 학급(136명)의 학생들을 대상으로 조사하였다. 당진군은 비평준화 지역으로서 H 고등학교는 많은 학생들이 지역 내 중학교에서 내신 상위에 속했던 학생들이 고입선발고사를 거쳐 진학한 학생들로 구성되어 있다. 그리고 연구대상자(136명) 중 검사지에 60%이상 응답하지 않은 학생(8명)은 분석 대상에서 제외하고 128명만을 대상으로 분석하였다.

B. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 고등학교 3학년 학생들의 극한 개념에 대한 이해와 적용 능력에 관한 실태 조사를 하기 위해 검사 도구를 통한 조사연구 방법을 사용하였다.

C. 검사도구

본 연구에서 실시한 극한에 관한 개념 검사지는 연구의 목적에 맞도록 Williams(1991)가 미적분 과목을 수강하는 대학생들이 가지고 있는 극한 모델에 관한 연구에서 사용했던 설문지와 우리나라의 현행 7차 교육과정 교과서를 참고하여 총 13문항으로 구성하였다. 개발한 검사도구는 1차의 예비검사를 실시한 후, 문항 진술상의 문제점, 난이도, 검사 문항의 수 등을 거친 후에 최종적으로 교사 2인과 전문가 1인에 의해 타당도를 검증받았다. 검사지의 신뢰도는 통계프

로그그램을 통해 Cronbach'α값을 계산한 결과 0.7192이었다.

검사의 내용은 다음과 같이 분류하였다.

<표 III-1> 개념 검사지의 문항 구성

항 목	문 항 내 용	제시형태	문항수
수열의 극한 개념 이해	수열의 극한 개념에 대한 이해	서술형, 선택형	3
	수열의 극한에 관한 문제에서의 이해	선택형, 서술형	2
함수의 극한 개념 이해	함수의 극한 개념에 대한 이해	서술형, 선택형	3
	우극한과 좌극한 개념에 대한 이해	서술형	1
	함수의 극한에 관한 문제에서의 이해	서술형, 선택형	3
수열의 극한과 함수의 극한의 관계 이해	수열의 극한과 함수의 극한의 관계 이해	서술형	1
계			13

개념 검사지의 각 항목에 따른 구체적인 평가 내용은 다음과 같다.

1) 수열의 극한 개념 이해

평가항목	평가내용	문항 번호
수열의 극한 개념에 대한 이해	수열의 극한 정의	1
	· 수열의 극한의 정의를 알고 있는가? · 수열의 한계값으로 이해하는가? · 수열이 도달할 수 없는 값으로 이해하는가? · 수열의 근사값으로 이해하는가? · 수열의 마지막 항으로 이해하는가? · 항이 커져야 한다는 것을 주목하지 않는가?	2
	극한 개념에 대한 선호도	3
수열의 극한에 관한 문제에서의 이해	· $\frac{\infty}{\infty}$ 형태의 수열로 수렴하는 수열 · 진동하여 수렴하지 못하는 수열 · 진동하나 수렴하는 수열 · $\frac{\infty}{\infty}$ 형태의 수열로 발산하는 수열	4
	· $\frac{\infty}{\infty}$ 형태의 수열에서의 극한 · $\infty - \infty$ 형태의 수열에서의 극한	5

[그림 III-1] 수열의 극한 개념 이해에 대한 평가 내용

2) 함수의 극한 개념 이해

평가항목	평가내용	문항 번호
함수의 극한 개념에 대한 이해	함수의 극한의 정의	6
	· 함수의 극한의 정의를 바르게 이해하는가? · x가 a로 가까이 갈 때를 주목하는가? · 좌극한 (우극한)을 함수의 극한으로 이해하는가? · 함수값으로 이해하는가? · 함수가 연속인 경우로 한정하는가? · 근사값으로 이해하는가?	8
	함수의 극한 개념에 대한 선호도	9
우극한과 좌극한 개념에 대한 이해	우극한과 좌극한의 정의	7
함수의 극한에 관한 문제에서의 이해	· $x = 1$에서의 함수의 극한 · $x \rightarrow \infty$일 때의 함수의 극한 · $x \rightarrow -\infty$일 때의 함수의 극한	10
	· $x = 1$에서 연속인 함수의 극한 · $x = 1$에서 불연속이면서 좌극한과 우극한이 다른 함수 · $x = 1$에서 불연속이면서 좌극한과 우극한이 같은 함수	11
	· $\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한 · $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한 · $\infty - \infty$ 꼴의 함수의 극한 · $0 \cdot \infty$ 꼴의 함수의 극한	12

[그림 III-2] 함수의 극한 개념의 이해에 대한 평가 내용

3) 수열의 극한과 함수의 극한의 관계

평가항목	평가내용	문항 번호
수열의 극한과 함수의 극한의 관계 이해	· $f(x) = \sin \frac{1}{x}$의 $x = 0$으로의 극한을 알아보기 위해 0으로 수렴하는 각기 다른 두 수열의 극한 · $x = 0$으로 수렴하는 두 수열에 대한 함수 $f(x)$의 각각의 극한 · $x = 0$에서의 함수 $f(x)$의 극한의 존재성 · 수열의 극한을 통한 함수의 극한의 존재 여부 판단	13

[그림 III-3] 함수의 극한과 수열의 극한과의 관계 이해에 대한 평가 내용

D. 검사 방법 및 절차

1. 예비검사

고등학교 자연계 3학년 학생들을 대상으로 하는 기본 검사 도구의 평가 문항에 대해 검사 실시 시간, 검사 문항의 진술 형태와 난이도, 검사 문항의 수, 검사 실시 상의 유의점 등을 확인하기 위해 실시하였다.

예비검사는 본 검사 대상들의 학력과 비슷한 충청남도 C시 소재에 있는 고등학교 3학년 1개 반(명)을 대상으로 2006년 7월 6일(목요일) 2교시에 수학 교사의 협조 아래 32명의 학생을 대상으로 50분 동안 실시하였다.

예비검사 결과 다음의 문제점을 수정하였다.

· 문항 2의 ②번의 ‘초월할 수 있는’이라는 문장을 학생들이 쉽게 이해하지 못하여 ‘넘어설 수 있는’으로 수정하였다.

· 문항 2의 ⑥번의 현행 고등학교 교과서에서는 형식적 정의를 다루고 있지 않기 때문에 ‘수열이 그것에 가깝게 놓여있는 수’라는 표현을 n 이 무한히 커져야

함에 주목하는지를 보기 위해 직관적 정의에서 ' n 이 커짐에 따라'를 삭제하고 단지 '수열이 한없이 가까워지는 수'로 바꾸었다.

- 문항 8의 ⑤가 ④와 의미가 비슷하여 혼돈을 줄 수 있으므로 삭제하고, 극한이 연속함수인 경우에만 존재할 수 있는 것으로 한정하여 학생들이 이해하고 있는지를 알아보는 문항으로 변경하였다.

- 문항 8의 ⑥에서 '가장 가까운 값'이라는 표현이 '한없이 가까워지는 수'와 혼란을 일으킬 수 있어서 '근사값'으로 바꾸었다.

- 문항 8의 ②가 의미상 ①과 비슷하여 x 가 a 로 가까이 접근함에 주목하는지를 관찰하기 위해 함수의 극한의 정의에서 x 가 a 로 가까이 접근해간다는 표현을 삭제한 표현을 사용하였다.

- 문항 8의 의미가 ①과 ③이 비슷하여 ③에 좌극한 또는 우극한을 함수의 극한으로 잘못 이해하고 있는지를 판별하기 위해 문항을 삽입하였다.

2. 본 검사

예비검사를 실시하여 나온 문제점을 고려하여 수정·보안된 본 검사 도구를 이용하여 2006년 7월 10일(월) 2교시를 이용하여 50분간 연구자와 수학교사 4명의 협조아래 5개 반(136명)을 대상으로 검사를 실시하였다.

1) 검사 실시 시 유의 사항

- (1) 검사 전에 학생들에게 검사의 목적과 답안 작성요령 등에 대해서 자세히 설명하였다. 답지는 별도로 마련하지 않고 문제지에 바로 기입하도록 하였다.

- (2) 검사에 소요되는 시간은 50분으로 하였다.

- (3) 검사 실시 후 답안지를 모두 회수하였다.

- (4) 문제를 풀 때 학생들 간의 토의는 허락하지 않았다.

- (5) 교과서를 참고하지 않도록 했다.
- (6) 일단 작성한 답을 수정할 때에는 답이 아니라는 표시만 하도록 한 후 새로운 답을 쓰게 하고, 작성한 답에 대해 지우지 않도록 하였다.

E. 자료의 처리 및 분석

1. 연구문제 1에 대한 분석

1) 연구문제 1-(1)의 수열의 극한의 개념(정의)에 대한 이해도를 조사하기 위해 다음과 같이 분석하였다.

① 문항 1을 오답, 정답, 무응답 3가지를 대상으로 백분율을 계산하고, 오개념들을 기술하였다.

정답은 교육과정에 명시되어 있는

“무한수열 $\{a_n\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때 일반항 a_n 의 값이 일정한 수 α 로 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$ 은 α 에 수렴한다”

는 것을 기준으로 ‘ n 의 값이 한없이 커질 때’와 ‘수열이 어떠한 수에 한없이 가까워진다’의 두 가지 의미를 모두 담고 있는 것으로 하였다.

② 문항 2에서는 무한수열 $\{a_n\}$ 의 극한에 대한 설명을 6가지 소문항으로 제시하여 학생들에게 ○, ×로 선택하도록 한 후, 정답, 오답, 무응답 3가지를 대상으로 백분율로 나타내었다.

③ 문항 3은 문항 2의 수열의 극한에 관한 6가지 문항 중에서 학생의 생각에 가장 가깝다고 생각되는 1가지를 선택하게 하여 백분율로 계산하였다.

2) 연구문제 1-(2)의 수열의 극한에 관한 문제를 통해서 수열의 극한 개념을 이해하고 있는가를 해결하기 위해 정답, 오답, 무응답 3가지를 대상으로 백분율을 계산하였다.

2. 연구문제 2에 대한 분석

1) 연구문제 2-(1)의 함수의 극한의 개념(정의)에 대한 이해도를 조사하기 위해 다음과 같이 분석하였다.

① 문항 6을 정답, 오답, 무응답 3가지를 대상으로 백분율을 계산하고, 오개념들을 기술하였다.

정답은 7차 교육과정에서 명시되어 있는

“함수 $f(x)$ 에서 x 가 a 와 다른 값을 취하면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$ 는 α 에 수렴한다고 하며 α 를 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 극한값 또는 극한이라고 한다.”

는 것을 기준으로 ‘ x 가 a 에 한없이 가까워질 때’와, ‘ $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면’의 두 가지 의미를 모두 내포하고 있는 것으로 하였다.

② 문항 8에서는 함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 극한에 관한 설명을 6가지 소문항으로 제시하여 학생들에게 ○, ×로 선택하도록 한 후, 정답, 오답, 무응답 3가지를 대상으로 백분율을 계산하였다.

③ 문항 9에서는 문항 8에서 제시된 함수의 극한에 관한 6가지 문항 중에서 학생의 생각에 가장 가깝다고 생각되는 1가지를 선택하게 하여 백분율로 계산하였다.

2) 연구문제 2-(2)의 함수의 좌극한과 우극한의 정의에 대한 이해도를 조사하기 위해 정답, 오답, 무응답 3가지를 대상으로 백분율을 계산하고 오개념들을 기술하였다.

정답은 7차 교육과정에 명시되어 있는

“함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 작으면서(크면서) a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면, α 를 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 좌극한(우극한)이라고 한다.”

는 것을 기준으로 하여 ' x 의 값이 a 보다 작으면서(크면서) a 에 한없이 가까워질 때'와 ' $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면'의 의미를 모두 포함하고 있는 것으로 하였다.

3) 연구문제 2-(3)의 함수의 극한에 관한 문제를 통해서 정의를 이해하고 있는가를 해결하기 위해 정답, 오답, 무응답 3가지를 대상으로 백분율을 계산하였다.

3. 연구문제 3에 대한 분석

수열의 극한을 이용하여 함수의 극한을 이해할 수 있는지 알아보기 위해 정답, 오답, 무응답 3가지를 대상으로 백분율을 계산하였다.

다음의 결과에 대한 분석은 연구자가 학생의 응답만을 보고 분석하였으므로 결과의 해석에서 지필 상에 나타나는 결과와 학생들의 실제 표현에는 차이가 있을 수 있으며, 현행 교육과정이 개념에 대해 직관적으로 지도할 것을 권장하고 있기 때문에 학생들에게 엄밀한 개념 이해를 요구하도록 한 검사지가 학생들에게 혼돈을 불러일으킬 수도 있다. 결과 분석 시 검사지의 구어체 문장과 수학적 문장과의 차이가 있음을 인정해야 한다. 또한, 정답과 오답의 결과 처리는 수학 교과서(수학I, 수학 II, 서울:(주)지학사)에 표현된 설명에 준하여 처리하였으므로 관점이 다른 교과서에 따르면 해석상의 차이가 있을 수 있다.

IV. 결과 및 논의

A. 결과

1. 연구문제 1

수열의 극한의 개념(정의)을 어느 정도 이해할 수 있는가?

1-(1) 수열의 극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

1) 문항 1에 대한 분석

7차 교육과정에 명시된 수열의 극한 개념을 옳게 이해하고 있는 학생은 19.53%이며, 오답율이 54.69%로 나타났다.

<표 IV-1-1> 문항 1에 대한 빈도수 및 백분율

문항	정답율	오답율	무응답	계
무한수열 $\{a_n\}$ 의 극한값(또는 극한)의 정의를 쓰시오.	19.53% (25명)	54.69% (70명)	25.78% (33명)	100% (128명)

수열의 극한 개념에 대해 오개념들을 살펴보면 다음과 같다.

· 무한수열 a_n 에서 ‘ n 이 한없이 커져간다는 것’을 간과한 채 단지 ‘수열이 어느 일정한 값에 한없이 가까워지는 것’이라고 표현한 학생은 14.8%(19명)이었다.

소수의 표현으로는

· 무한수열의 항이 무한히 계속 이어져 나갈 때의 가장 끝값 - 2.35%(3명)

· a_n 이 어떤 수에 수렴하거나 무한대로 발산하는 것 - 2.35%(3명)

등이 있었고, 기타로서 n 이 어느 점을 향하여 끝없이 다가갈 때의 그 점에서

의 함수값(연속일 때), 수열이 커질 때 도달하는 값, 수열이 가까워지지만 같아질 수는 없는 수 등이 있었다.

2) 문항 2에 대한 분석

<표 IV-1-2> 문항2에 대한 빈도수 및 백분율

문항	다음은 무한수열 $\{a_n\}$ 의 극한에 대한 설명이다. 참(○)인지 거짓(×)인지 말하시오.	정답률	오답률	무응답	계
①	수열의 극한은 n 이 커짐에 따라 수열이 가깝게 접근해 가는 수이다.	78.91% (101명)	20.31% (26명)	0.78% (1명)	100% (128명)
②	수열의 극한은 수열이 넘어설 수 없는 수이다.	53.91% (69명)	44.53% (57명)	1.56% (2명)	
③	수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지지만 같아질 수는 없는 수이다.	20.31% (26명)	79.69% (102명)	0	
④	수열의 극한은 수열의 근사값이다.	33.59% (43명)	66.41% (85명)	0	
⑤	수열의 극한은 수열의 마지막항의 값이다.	89.06% (114명)	10.16% (13명)	0.78% (1명)	
⑥	수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지는 수이다.	13.28% (17명)	86.72% (111명)	0	

문항 1에서 정의를 나타내도록 한 후 좀 더 자세히 학생들이 극한을 이해하고 있는지 알아보기 위해 ○, ×의 선택형의 질문에서 표 IV-1-2에 나타난 것과 같이 교육과정에 제시된 수열의 극한 개념에 대해서는 78.91%의 학생들이 올바르게 대답하고 있음을 볼 수 있다. 하지만 수열의 극한을 수열의 한계로 인식하고 있는 학생이 44.53%나 되었으며, 수열 $1, 1, 1, \dots$ 과 같이 수열의 극한이 수열의 항과 같아질 수 있음을 인식하는 학생은 20.31%에 불과하였다. 또한 수열의 극한을 근사값이 아님을 인식한 학생은 33.59%, 수열의 마지막 항으로 인식하지

않은 학생은 89.06%였으며, 무한수열 $\{a_n\}$ 의 자연수 n 이 점점 커져가야 함을 명확하게 인식하고 있는 학생은 13.28%로 나타났다. 그러나 6개의 문항에 대해 모두 옳게 답한 학생은 1명으로 나타났다.

3) 문항 3에 대한 분석

여러 가지 수열의 극한에 관한 설명들 중에서 학생들의 생각에 좀 더 가까운 설명이 무엇인지 알아보기 위해 선호도를 조사해 본 결과 교과서에서 제시하는 직관적 개념인 ①번이 33.59%인 반면에 수열의 극한이 수열의 항과는 같아질 수 없는 것으로 인식하고 있는 학생들이 35.16%로 더 높게 나타났다. 또한 25.78%의 학생들이 ‘무한수열 $\{a_n\}$ 의 n 이 커짐에 따라’를 간과하고 있는 것으로 나타났다.

<표 IV-1-3> 문항 3에 대한 빈도수 및 백분율

	①	②	③	④	⑤	⑥	무응답	계
선호도	33.59% (43명)	0.78% (1명)	35.16% (45명)	1.56% (2명)	2.35% (3명)	25.78% (33명)	0.78% (1명)	100% (128명)

4) 위의 세 문항의 결과를 종합하여 분석하였을 때 문항1에 대해 옳은 대답을 한 학생들 25명 중 문항 3에서 문항 2의 ①을 일관되게 선택한 학생은 40%(10명)이었다. 하지만 이들 학생은 모두 문항 2의 ③ 수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지지만 같아질 수는 없는 수라는 표현을 옳은 표현이라고 대답하였으며, 또한 ④의 ‘수열의 극한은 수열의 근사값이다’라는 표현에 대해서도 7명이 옳다고 응답하였다.

그리고, 문항 1에 대해 옳은 답을 한 25명 중 32%(8명)은 문항 2의 ③ 표현을 수열의 극한에 대한 자신의 생각과 가장 근접한 표현이라고 응답하였으며 이들

도 ‘수열의 극한은 수열의 근사값이다’라는 표현에 6명의 학생이 ‘옳다’라고 대답하였다.

(2) 수열의 극한에 관한 문제에서 극한 개념을 올바르게 이해하고 있는가?

1) 문항 4에 대한 분석

<표 IV-1-4> 문항 4에 대한 빈도수 및 백분율

문항	다음은 무한수열의 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고, 그 이유를 자세히 쓰시오.	정답율	오답율	무응답	계
①	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$	89.06% (114명)	7.03% (9명)	3.91% (5명)	100% (128명)
②	1, (-1), 1, (-1), ...	94.53% (121명)	4.69% (6명)	0.78% (1명)	
③	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, (-\frac{1}{2})^{n-1}$	82.03% (105명)	16.41% (16명)	1.56% (2명)	
④	$\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$	78.91% (101명)	15.63% (20명)	5.46% (7명)	

<표 IV-1-4>는 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열의 극한이 존재하는 경우는 89.06%, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열의 극한이 발산하는 경우는 78.91%이며, 음수와 양수가 교대로 나타나는 수열이 극한이 존재하지 않는 경우는 94.53%, 음수와 양수가 번갈아 나타나는 수열이 극한이 존재하는 경우 82.03%로 모든 문제에서 매우 높은 정답율을 보였다.

소수의 학생들 중에서 ①에 대해 ‘분모가 1씩 증가, 분자도 1씩 증가하므로 수가 점점 작아지기 때문에’라고 답하였고, ④에 대해서 극한이 ∞ 로 존재한다고 대답하기도 하였다.

각 문항에 대한 대표적인 오류들을 살펴보면 다음과 같다.

- 문항 ① - 갈수록 커진다. - 2.35%(3명)

- 문항 ② - n 의 값이 아무리 증가해도 그 수는 짝수이거나 홀수이기 때문에 극한의 값은 1이거나 -1에 가까워진다. - 1.56%(2명)
- 문항 ③ - 양수와 음수가 번갈아 나오기 때문에 - 3.13%(4명)

2) 문항 5에 대한 분석

일반항의 형태로 주어진 수열에서 수열의 극한이 존재하는지 묻는 문제로 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 나타난 문제에서는 96.88%로 대부분의 학생들이 옳게 답하였으나 $\infty - \infty$ 꼴로 나타난 문제에서는 76.57%로 정답율이 다소 떨어지는 것을 볼 수 있다.

<표 IV-1-5> 문항 5의 빈도수 및 백분율

문항	다음은 무한수열의 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고, 그 이유를 자세히 쓰시오.	정답율	오답율	무응답	계
①	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1}$	96.88% (124명)	2.34% (3명)	0.78% (1명)	100%
②	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	76.57% (98명)	21.09% (27명)	2.34% (3명)	(128명)

3) 문항 4와 문항 5의 분석 결과 수열의 극한에 관한 문제를 해결함에 있어서는 거의 대다수의 학생들이 옳은 답을 하였다.

2. 연구문제 2

함수의 극한의 개념(정의)을 어느 정도 이해할 수 있는가?

2-(1) 함수의 극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

1) 문항 6에 대한 분석

7차 교육과정에 명시된 함수의 극한 개념을 옳게 이해하고 있는 학생은 7.03%이며, 오답율이 64.06%로 나타났다

<표 IV-2-1> 문항 6에 대한 빈도수 및 백분율

문항	정답율	오답율	무응답	계
함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한값(또는 극한)의 정의를 쓰시오.	7.03% (9명)	64.06% (82명)	28.91% (37명)	100% (128명)

함수의 극한 개념에 대해 오개념들을 살펴보면 다음과 같다.

- x 가 a 에 가까워질 때의 $f(x)$ 의 값 - 7.81%(10명)
- x 가 a 일 때 $f(x)$ 가 한없이 a 로 다가가는 함수값 - 31.3(4명)
- $f(a)$ 가 존재하고, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이며, 좌극한과 우극한이 같을 때 - 3.91%(5명)

- x 에 a 를 대입했을 때 한없이 가까워지는 수 - 1.56%(2명)

- x 가 a 로 한없이 가까워질 때의 $f(a)$ 의 값 - 1.56%(2명)

또한 많은 학생들이 정의를 쓰는 문항에 대해 극한이 존재할 필요충분조건인 ‘좌극한과 우극한이 같다’ - 12.5%(16명)는 표현으로 나타내었다. 기타로서 x 가 a 에 한없이 가까이 접근할 때 $f(x)$ 가 한없이 가까이 $f(a)$ 에 접근하는 것,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $f(x)$ 가 a 에 가까워질 때의 극값 등이 있었다.

2) 문항 8에 대한 분석

<표 IV-2-2> 문항 8에 대한 빈도수 및 백분율

문항	다음은 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한에 대한 설명이다. 참(○)인지 거짓(×)인지 말하시오.	정답률	오답률	무응답	계
①	함수의 극한은 x 가 a 에 한없이 가까워질 때 함수 $f(x)$ 가 한없이 가까이 접근해가는 수이다.	88.28% (113명)	11.72% (15명)	0	100% (128명)
②	함수의 극한은 함수 $f(x)$ 가 가까이 접근해가는 수이다.	42.19% (54명)	57.03% (73명)	0.78% (1명)	
③	함수의 극한은 x 가 a 의 작은(또는 큰)값에서 가까워질 때 함수 $f(x)$ 가 일정한 수에 가까워지는 수이다.	20.31% (26명)	79.69% (102명)	0	
④	함수의 극한은 함수 $f(x)$ 에 a 를 대입하면 나타나는 수이다.	73.44% (94명)	25.78% (33명)	0.78% (1명)	
⑤	함수의 극한은 함수 $f(x)$ 가 연속일 때 $f(x)$ 가 한없이 가까이 접근해가는 수이다.	31.25% (40명)	68.75% (88명)	0	
⑥	함수의 극한은 x 가 a 로 갈 때 함수 $f(x)$ 의 근사값이다.	36.72% (47명)	62.50% (80명)	0.78% (1명)	

함수의 극한 개념에 대해 얼마나 이해하고 있는지를 좀 더 알아보고 위해, 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한에 대한 설명을 ○, ×의 선택형으로 질문을 한 결과, 교과서의 직관적 정의에 대해서는 88.28%가 옳다고 답하였다. 하지만, 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서라고 명시하였음에도 불구하고 x 가 a 로 접근해 간다는 사실을 간과한 학생들이 57.03%로 과반수가 넘었으며, 우극한이나 좌극한이 함수의 극한이 아님을 옳게 대답한 학생은 20.31%에 불과하였다. 또한, 함수의 극한을 함수값으로 잘못 인식한 학생도 73.44%나 되었으며, 함수의 극한이 존재하려면 연속함수로 제한되어야 된다고 생각한 학생도 68.75%, 수열의 극한과 마찬가지로 근사값으로 인식하고 있는 학생도 62.50%로 나타났다.

그러나 모든 문항에 옳게 대답한 학생은 1명에 불과하였다.

3) 문항 9에 대한 분석

<표 IV-2-3> 문항 9에 대한 빈도수 및 백분율

	①	②	③	④	⑤	⑥	무응답	계
선호도	27.34% (35명)	2.34% (3명)	30.47% (39명)	4.69% (6명)	30.47% (39명)	3.91% (5명)	0.78% (1명)	100% (128명)

여러 가지 함수의 극한에 관한 설명들 중에서 학생들의 생각에 좀 더 가까운 설명이 무엇인지 알아보기 위해 선호도를 조사해 본 결과 27.34%만이 직관적 정의를 옳게 이해하고 있는 반면 30.47%의 학생들이 우극한이나 좌극한에 대한 생각을 좀 더 깊이 갖고 있거나 연속함수로 함수를 제한하여 생각하는 것으로 나타났다.

4) 위의 세 문항의 분석 결과를 종합적으로 보았을 때, 문항 6의 함수의 극한의 정의를 올바르게 정의한 학생 9명 중에서 문항 9에서 문항 8의 ①을 일관되게 선택한 학생은 33.3%(3명)이었다. 하지만 이들 학생은 모두 문항 2의 ③ 함수의 극한을 좌극한(우극한)으로 표현한 설명이 옳은 것이라고 모두 응답하였으며, 함수의 극한이 x 가 어느 점으로 접근하고 있는지 알 수 없는 표현인 단지 함수가 접근해 가는 수라는 표현과 함수를 연속성으로 제약하여 함수의 극한을 표현한 설명 또한, 근사값이라고 설명한 표현에 대해서도 3명 중 2명이 옳다고 응답하였다.

그리고, 위의 9명 중 3명은 문항 9에서 자신의 생각과 가장 근접한 표현을 함수가 연속일 때로 함수의 극한을 제한한 설명을 선택하였고, 3명은 좌극한(우극한)을 설명한 표현을 선택하였다.

함수의 극한의 정의를 바르게 쓰지는 못했지만 문항 9에서 함수의 극한에 대

한 직관적 정의를 자신의 생각과 비슷하다고 응답한 학생도 26명(20.3%)나 되었다.

(2) 좌극한과 우극한의 정의(정의)를 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

1) 문항 7에 대한 분석

<표 IV-2-3 > 문항 7에 대한 빈도수 및 백분율

문항	정답율	오답율	무응답	계
(1) $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 좌극한의 정의를 쓰시오.	7.81%	60.16%	32.03%	100%
(2) $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 우극한의 정의를 쓰시오.	(10명)	(77명)	(41명)	(128명)

함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서의 좌극한과 우극한의 정의를 올바르게 나타낸 학생은 7.81%에 불과하였고, 32.03%의 학생이 무응답하거나, 기호로만 나타내어 옳게 이해하지 못한 학생이 60.16%나 되었다.

$x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 좌극한에 대한 오개념들을 살펴보면 다음과 같다.

· 좌측(음의 방향)으로부터 x 의 값이 a 에 가까워질 때의 $f(a)$ 값 - 3.91%(5명)

· $x=a$ 보다 작은 수(왼쪽)에서 a 로 가까워질 때의 $f(x)$ 의 값 - 7.03%(9명)

· $f(x)$ 가 a 값에 왼쪽에서 가까워질 때의 극값 - 1.56%(2명)

· 왼쪽에서 a 로 수렴하는 값 - 1.56%(2명)

· x 가 좌측에서 a 로 접근해가는 수 1.56%(2명)

· $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ - 1.56%(2명)

기타로는, 왼쪽에서 오른쪽으로 다가오는 수이므로 a 보다 약간 작은 수가 된다 등이 있었다.

그리고 $x = a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 우극한에 대한 오개념들은 $x = a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 좌극한에 대한 오개념들과 같은 형태로 답하였기 때문에 따로 기술하지 않았다.

(3) 함수의 극한에 관한 문제에서 극한 개념을 올바르게 이해하고 있는가?

1) 문항 10에 대한 분석

$x = a$ 에서 함수의 극한이 존재하는지를 알아보는 문제에서는 92.97%가 옳게 답하였고, 수열의 극한과 같이 x 가 무한대로 가까이 갈 때의 함수의 극한에 대해서는 82.81%의 학생이, x 가 $-\infty$ 로 가까이 갈 때의 함수의 극한에 대해서는 78.13%의 학생이 옳게 답하였다.

<표 IV-2-4> 문항 10에 대한 빈도수 및 백분율

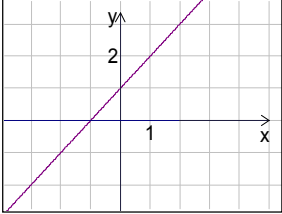
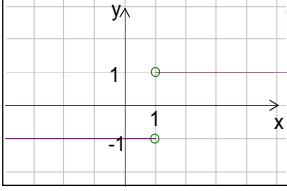
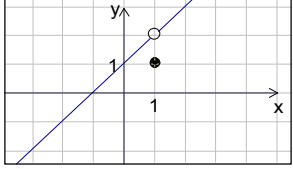
문항	다음은 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고, 그 이유를 자세히 쓰시오.	정답율	오답율	무응답	계
①	$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)$	92.97% (119명)	3.91% (5명)	3.12% (4명)	100% (128명)
②	$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 5)$	82.81% (106명)	11.72% (15명)	5.47% (7명)	
③	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{3}{x} - 2)$	78.13% (100명)	15.62% (20명)	6.25% (8명)	

2) 문항 11에 대한 분석

연속함수에 대해서는 87.50%가 정답을 말하였고, 불연속이면서 좌극한과 우극한이 다르게 나타난 문제에 대해서는 85.94%가 정답을 말하였으나 불연속이면

서 좌극한과 우극한이 같게 나타나는 문제에 대해서는 62.50%로 다소 다른 문제에 비해 정답율이 낮게 나타났다.

<표 IV-2-5> 문항 11에 대한 빈도수 및 백분율

문항	다음 그래프를 보고 $x=1$ 에서의 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고 그 이유를 자세히 쓰시오.	정답율	오답율	무응답	계
①	 $f(x) = x + 1$	87.50% (112명)	9.38% (12명)	3.12% (4명)	
②	$g(x) = \frac{ x-1 }{x-1}$ 	85.94% (110명)	10.16% (13명)	3.90% (5명)	100% (128명)
③	$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ 	62.50% (80명)	27.34% (35명)	10.16% (13명)	

문항 11에 나타난 오개념들을 살펴보면 다음과 같다.

①에 대해서는 x 가 1로 접근하는 점에 주목하지 못하고 x 에 따라 $f(x)$ 값이

달라지기 때문에 존재하지 않는다고 대답하였다.

②에 대해서는 $x = 1$ 에서 함수값이 존재하지 않기 때문이라고 극한이 존재하지 않는 이유를 밝혔다.

③에 대해서는 $x = 1$ 에서 1이라는 함수값을 갖지만 좌극한과 우극한이 1이 아니기 때문에 존재하지 않는다고 말하거나 좌극한 · 우극한의 값과는 다른 또 다른 값이 존재하기 때문에 어떤 걸 선택해야 할지 모른다고 답한 학생도 있었다. 또 연속이 아니기 때문에 극한이 존재하지 않는다고 답한 학생도 있었다.

3) 문항 12에 대한 분석

$\frac{0}{0}$ 꼴의 문제에서는 91.41%가 $\infty - \infty$ 꼴에서의 문제에서는 84.38%가 정답을 말하였으나, 수렴하는 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에 대해서는 정답율이 68.75%로 다소 낮게 나타났으며, $0 \cdot \infty$ 꼴에 대해서는 73.44%가 옳게 대답한 것으로 나타났다.

<표 IV-2-6> 문항 12에 대한 빈도수 및 백분율

문항	다음은 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고, 그 이유를 자세히 쓰시오.	정답율	오답율	무응답	계
①	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$	91.41% (117명)	4.69% (6명)	3.90% (5명)	100% (128명)
②	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{2x^2 + 1}$	68.75% (88명)	25.78% (33명)	5.47% (7명)	
③	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$	84.38% (108명)	7.81% (10명)	7.81% (10명)	
④	$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)(1 - \frac{1}{x^2 - 4})$	73.44% (94명)	10.94% (14명)	15.62% (20명)	

4) 문항 10, 11, 12를 분석한 결과 함수의 극한에 관한 문제들에 대해서는 매우 높은 정답율을 나타내었다.

3. 연구문제 3

수열의 극한과 함수의 극한의 관계를 올바르게 이해하고 있는가?

1) 문항 13에 대한 분석

①에 대해서는 46.88%의 학생들이 정답을 말하였으나 0으로 수렴하는 서로 다른 수열을 함수에 대입하여 함수의 극한을 구하라고 한 문제에서는 26.56%만이 정답을 말하였고, 함수의 $x=0$ 에서의 극한의 존재성에 대해 묻는 문제에서는 23.44%가 옳게 말하였다. 하지만 위의 문항들의 관련성을 묻는 문제에서는 3.91%만이 옳게 답하였고 69.53%에 해당하는 학생이 응답하지 않았다.

<표 IV-3>문항 13에 대한 빈도수 및 백분율

문항	다음은 함수 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 의 $x=0$ 에서의 극한을 알아보기 위한 것이다. 두 수열 $\{a_n\} = \{\frac{1}{2n\pi}\}$ $\{b_n\} = \{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\}$ 이라 할 때 다음 물음에 답하시오.	정답율	오답율	무응답	계
①	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 을 각각 구하시오	46.88% (60명)	13.28% (17명)	39.84% (51명)	100% (128명)
②	$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ 을 각각 구하시오..	26.56% (34명)	27.34% (35명)	46.10% (51명)	
③	함수 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 극한이 존재하는지 말하시오.	23.44% (30명)	21.88% (28명)	54.68% (70명)	
④	위의 문제 (1)-(3)을 통해 알 수 있는 것은 무엇입니까?	3.91% (5명)	26.56% (34명)	69.53% (89명)	

위의 문항들에 대해 많은 학생들이 무응답 하였고, 문항들에 대해서 제각각으로 인식하고 있는 학생들이 대부분이었으며, 문항 ②의 극한값을 구하는 문제를 해결하지 못하거나, 해결하였더라도 그 극한이 0과 1로 나타났을 때 단지 극한

으로만 이해할 뿐 이었다.

문항 13에 대한 학생들의 응답으로써 다음과 같은 사례들이 있다.

문항13	사례 1	사례 2	사례 3	사례 4
(1)에 대한 응답	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$
(2)에 대한 응답	$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi)$ $= 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2})$ $= 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 1$	$f(a_n) = \sin 2n\pi$ $f(b_n)$ $= \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2})$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi)$ $= 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2})$ $= 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 1$ $\sin$ 은 주기함수이 다.
(3)에 대한 응답	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 극값 이 0이 되는데 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 1$ 로 각각 극한값이 존재하므로 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서 극 한값은 존재한다.	극한 존재한다	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{0}$ $= \sin \infty$ 존재하지 않음	$\sin \frac{1}{0}$ 은 존재 안 할걸요, $-1 \leq$ 값이 사이니 까 ≤ 1
(4)에 대한 응답	분모가 0으로 가도 극 값은 존재하는 경우가 있다.	$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 은 극한값 존재함	$\sin$ 은 주기함수이다.	$f(x)$ 에서 x 가 같 은 곳으로 향하더 라도 $f(x)$ 가 향하 는 값은 달라질 수 있어요 나만 그런가!

[그림 IV-1] 문항 13에 대한 응답 사례

많은 학생들이 위의 문제에서 하는 과정이 무엇을 의미하고 있는지 파악하지

못하고 있었다. ④에 대한 그 예들은 다음과 같다.

- $\sin$ 은 기함수이다. - 3.12%(4명)
- 주기함수의 수렴 존재 여부 -0.78%(1명)
- 좌극한값과 우극한값이 같지 않으면 극한값이 존재하지 않는다.-0.78%(1명)
- $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 는 $x = 0$ 일 때 극한값이 존재한다. -0.78%(1명)
- $\sin x$ 가 무한대로 가면 수렴하지 않는다. -0.78%(1명)

위의 응답의 사례에서 보이는 것처럼 소수의 학생들이 문항 ②까지 해결하였더라도 앞의 문항을 관련지어 문항 ③을 해결하지 못하였고 더불어 위의 문항을 푸는 과정이 무엇을 의미하는지 깨닫지 못하는 경우가 대다수였다. ' $f(x)$ 에서 x 가 같은 곳을 향하더라도 $f(x)$ 가 향하는 값은 달라질 수 있다'는 표현을 통하여, 0으로 수렴하는 서로 수열에 대하여 함수의 극한이 다르게 나타나면 그 점에서의 극한이 존재하지 않는다는 의미를 비슷하게 지적한 학생은 1명이었으나 사례3에서 보이는 것처럼 이 학생도 문항 ①, ②를 통해 문항③을 해결하고 있지 않다. 또한 4명은 함수 $y = \sin \frac{1}{x}$ 이 $x = 0$ 에서 극한이 존재하지 않는다고 답하였다.

B. 논의

본 연구의 목적은 고등학교 자연계 3학년 학생들의 극한 개념에 대해 얼마나 이해하고 있는지 알아보고자 하였다. 이를 해결하기 위해 실시한 검사 분석 결과를 선행연구와 관련지어 차례로 논의해 보고자 한다.

1. 수열의 극한 개념 이해 정도

Vinner(1991)는 수열의 극한 개념을 학생들에게 정의하도록 요구했을 때 수열

은 극한에 도달하지 않거나 수열의 극한이 수열의 마지막 항이라는 등의 오개념을 나타내고 있다고 말하고 있다.

본 연구에서도 수열의 극한 개념에 대한 이해도를 알아보기로 구성한 개념 검사지를 통해 19.53%(25명)의 학생들만이 옳게 서술할 수 있었다. 이것은 노수진(2000)의 연구에서 수열의 극한에 관한 정의에 대해 많은 학생들이 이해하고 있지 못함을 보여준 것과도 일치한다.

수열의 극한 개념에 대한 학생들의 이해에 대해 자세히 알아보기 위해, 수열의 극한 개념에 대한 설명 중에서 79.69%(102명)의 학생들이 수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지지만 수열과는 같아질 수는 없는 수라고 인식하고 있음을 볼 수 있었다. 수열의 극한에 관한 설명들 중에서 학생들 자신의 생각에 가장 가깝다고 생각되는 문항을 선택하도록 했을 때에도 수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지지만 수열과는 같아질 수 없다는 문항을 자신의 생각과 가장 가깝다고 생각하는 학생이 가장 많았다. 박선화(1998)의 연구에서는 수열의 극한을 수열이 한없이 가까워지지만 수열과는 같아질 수 없다고 답한 학생들을 인터뷰하는 과정에서 수열 $3, 3, 3, \dots$ 을 제시했을 때 학생들이 자신의 판단을 바꾸었다는 결과를 밝혔는데 이는 같은 항으로 이루어진 수열을 학생들에게 직접적으로 제시하여 수열의 극한을 질문했을 때와 수열의 극한에 대한 설명으로 질문했을 때와는 다르게 대답하고 있음을 알 수 있었다. 이것은 학생들이 극한 개념을 처음 접하였을 때 위와 같이 같은 항으로 이루어진 수열의 극한도 다루고 있으나 많은 수열의 극한에 관한 예제들이 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 과 같이 수열이 일정한 수로 접근하지만 수열과는 같아지지 않는 것들을 경험함으로써 생긴 개념이미지로 파악된다. 또한 직관적으로 쉽게 극한 개념을 받아들일 수 있도록 그래프로 나타내는 과정을 통해 극한을 점근선적인 의미로 받아들이고 있을 것으로 생각된다. 더불어 Davis와 Vinner(1986)가 극한 개념에는 피할 수 없는 오개념이 표면적으로 존재한다고 말하면서 그 하나를 언어의 영향으로 지목했는데 직관적 정의에

포함되어 있는 “한없이 가깝게 접근해 간다.”는 언어적 표현이 학생들로 하여금 같은 방향으로 이루어진 수열의 극한은 수열과 같아짐을 알고 있으면서도 그것은 배제한 채 학생들의 생각 속에서는 수열이 수열의 극한과는 같아질 수 없다는 개념이미지를 만들어 내고 있다고 볼 수 있다.

그리고 대부분의 학생들이 무한수열 $\{a_n\}$ 의 극한에 대한 직관적 정의에서의 ‘ n 이 커짐에 따라서’에 주목하고 있지 않음을 발견할 수 있었다. 이는 암묵적으로 학생들의 개념 이미지 속에서 무한수열 $\{a_n\}$ 의 ‘ n 이 커짐에 따라서’는 당연한 것으로 받아들이고 간과함으로써 생긴 결과라고 생각된다. 단지 n 이 커져가는 것은 생각 속에서 이미 이루어지고 있기 때문에 표현할 필요가 없는 것으로 학생들이 느끼는 것이라고 볼 수 있다.

또한 수열의 극한에 대한 설명 중 전 문항에 대해 옳게 답한 학생은 1명으로 나타났는데 그만큼 수열의 극한 개념을 이해하는 것이 학생들에게는 쉽지 않다는 것을 보여주고 있다.

반면, 수열의 극한에 관한 문제를 통해 극한을 구하는 문제에서는 모든 문항들에 대해 76% 이상의 높은 정답율을 기록하고 있는데 이것은 학생들이 개념보다는 문제를 해결하는 방법에 더 많은 시간을 할애하고 있으며, 문제를 해결하는 방법을 익히는 데 더 높은 비중을 두고 있다고 볼 수 있다. 그리고 수열의 극한을 알아보는 것이 언어적 설명으로 받아들이는 것보다는 직관적인 문제를 통해 알아보는 것을 더 쉽게 받아들이는 것이라고 볼 수 있다.

2. 함수의 극한 개념 이해 정도

한종희(1997)는 함수의 극한에 대한 오개념을 알아보기 위한 연구에서 함수의 극한에 대한 정의를 옳게 답하고 있는 학생이 많지 않음을 보여주고 있다. 이는 이번 연구를 통하여 함수의 극한에 대한 개념을 옳게 정의하고 있는 학생이

7.03%(9명)에 불과한 것과 별반 다르지 않음을 살펴볼 수 있었다. 그리고 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한이 존재할 필요충분조건인 ‘함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 좌극한과 우극한이 같다’를 함수의 극한 개념으로 정의하고 있는 학생들이 많았는데 이것은 함수의 극한에 대한 정의를 학습한 후에 여러 가지 함수들의 예에서 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한을 알아보는 문제를 해결할 때에 주로 사용하기 때문일 것으로 본다. 또한 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 연속성의 정의를 함수의 극한으로 잘못 이해하고 있는 학생이 많았는데 이것은 후속학습의 영향이라고 볼 수 있겠다.

함수의 극한 개념에 대한 학생들의 이해를 좀 더 살펴보기 위해, 함수의 극한에 대한 설명 중에서 교과서에 제시되어 있는 함수의 극한에 대한 직관적 정의를 바르게 받아들이고 있었으나 반면, 함수의 좌극한이나 또는 우극한을 함수의 극한으로 잘못 이해하고 있는 학생도 매우 많았고 함수의 극한이 연속함수일 경우에 한하여 존재하는 것으로 이해하고 있는 학생도 매우 높은 비율로 나타남을 볼 수 있었다. 반면 함수의 그래프를 통해 함수의 극한이 존재하는지를 알아보고자 한 문항에서는 함수의 좌극한이나 우극한을 함수의 극한으로 받아들이지 않고 모두 높은 이해도를 보이고 있는 것으로 보아 학생들이 예를 통해 그래프를 같이 보면서 함수의 극한을 이해하는 것과 언어를 심상으로 이해하는 것과는 상당한 차이가 있는 것으로 볼 수 있겠다. 이것은 Davis & Vinner(1986)이 오개념을 일으키는 주요 원인 중에서 학생의 심상 발달에는 여러 단계가 있을 것이며 그 곳에서 일부 표상은 적절히 성숙해지겠지만 그렇지 못한 부분도 있다고 밝히고 있는데, 학생들이 함수의 좌극한이나 우극한이 함수의 극한이 되는 것은 아니며 항상 연속함수에서만 함수의 극한이 존재하는 것이 아님을 알고 있으면서도 언어적 설명으로 나타났을 때 바르지 않게 대답하는 것은 수학적 개념이 부족해서라기보다는 언어에 대한 일부 표상에서의 성숙의 문제라고 볼 수 있겠다. 그리고 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한을 함수 $f(x)$ 의 근사값이라고 답한

학생이 과반수를 넘는 것은, 수열의 극한에서 밝힌 것과 마찬가지로 함수의 극한의 직관적 정의에서 “한없이 가까워지면”이라는 표현으로부터 오는 언어의 영향에 의한 잘못된 개념 이미지가 만들어진 것이라 할 수 있겠다. 또한 함수의 극한에 관한 설명을 통해 학생들이 함수의 극한에 대해 옳게 이해하고 있는지 알아보려고 한 문항에서 모두 옳게 답한 학생이 1명인 것으로 나타나 함수의 극한 개념에 대해 명확한 극한 개념을 갖는다는 것이 쉽지 않음을 보여주고 있다.

함수 $f(x)$ 가 특정한 $x=a$ 에서 불연속이면서 극한이 존재하는 그래프를 제시한 문항에서 ‘함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 불연속이기 때문에 함수가 $x=a$ 에서 극한이 존재하지 않는다’라든가 ‘극값’ 등으로 표현한 학생들의 응답은 함수의 극한 이후에 배우는 함수의 연속성이나 미분 개념이 극한 개념에 혼돈을 일으킬 수 있다. 이는 Tall & Vinner(1981)이 개념 이미지는 그 개념과 관련된 모든 종류의 경험을 통해서 여러 해에 걸쳐 형성되며, 개인이 새로운 자극을 만날 때나 성숙해짐에 따라서 변화한다고 한 것과 같이 학생들의 사전 경험뿐만 아니라 후에 나오는 새로운 개념들이 극한 개념에 영향을 미침으로써 혼돈을 가져오고 있는 것으로 보인다.

함수의 극한에 관한 문제에서는 매우 높은 정답율을 보이고 있는데 이것도 수열에서의 극한에서의 극한에 관한 문제에서 높은 정답율을 보인 것과 일치하는데 학생들이 극한에 대한 개념보다는 극한 문제를 해결하는 방법을 습득하는 데 더 많은 시간을 할애하고 있기 때문으로 보인다.

3. 수열의 극한과 함수의 극한과의 관계

수열의 극한과 함수의 극한을 모두 배운 후 두 관계를 알아보려고 하였으나 대부분의 학생들이 수열의 극한과 함수의 극한을 별개로 생각하고 있는 것으로 나타났다.

예를 들어 위의 분석과정에서의 사례 2에서처럼 0으로 수렴하는 각각의 수열에 대해 함수의 극한을 계산한 후 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 극한이 존재하는지 질문했을 때 두 수열에 대한 함수의 극한이 다름에도 불구하고 극한이 존재한다고 응답하고 있다. 많은 학생들이 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한의 존재성 여부를 판단할 때 좌극한과 우극한이 같은지를 알아본 후 판단하기 때문에 같은 값 a 로 수렴하는 서로 다른 수열을 통하여 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한이 존재하는지를 판단하는 것이 받아들이지 못하는 것으로 보인다. 또한 좌극한과 우극한의 정의를 쓰는 문항에서도 그 수보다 작은 또는 큰의 표현보다 왼쪽에서 오른쪽에서라는 방향으로 답한 학생들이 많아 좌, 우라고 하는 의미가 고착되어 수열의 극한을 통해 함수의 극한을 판단하는 것을 이해하고 있지 못하는 것으로 파악된다.

또한 사례 3의 학생의 응답은 “ $f(x)$ 에서 x 가 같은 곳으로 향하더라도 $f(x)$ 가 향하는 값은 달라질 수 있어요.”와 같이 함수 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 극한을 0으로 수렴하는 서로 다른 수열을 이용하여 함수의 극한을 구한다는 생각을 어렵게 하고 있는 것으로 보이나 문항 ③에서 “ $\sin \frac{1}{0}$ 은 존재 안할걸요, $-1 \leq$ 값이 사이니까 ≤ 1 ”로 응답한 것으로 보아 수열의 극한을 이용하여 함수의 극한을 구하는 것에 대해 정확하게 파악하고 있지 않은 것으로 보인다.

고등학교 교육과정에서는 극한을 수열의 극한은 수학 I에서 함수의 극한은 수학 II에서 학습하고 있으며 함수의 연속성을 학습하기 이전에 수열의 극한을 이용한 함수의 극한을 판단하는 과정이 담겨 있기 때문에 교사의 입장에서는 학생들이 수열의 극한과 함수의 극한을 총체적으로 마음에 받아들일 것으로 생각하고 있으나 학생들은 수열의 극한과 함수의 극한에 대해 각각 별개로 생각하고 있는 것으로 판단된다.

V. 요약, 결론 및 제언

A. 요약

본 연구는 고등학교 자연계 3학년 학생들의 수열의 극한과 함수의 극한 개념에 대해 얼마나 이해하고 있으며 수열의 극한과 함수의 극한의 관계를 얼마나 이해하고 있는지를 알아봄으로써 극한 개념을 지도에 대한 시사점을 찾고자 위함이었다. 본 연구를 위하여 다음과 같이 연구문제를 설정하였다.

1. 수열의 극한의 개념(정의)을 어느 정도 이해하고 있는가?

(1) 수열의 극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

(2) 수열의 극한에 관한 문제에서 극한 개념을 올바르게 이해하고 있는가?

2. 함수의 극한의 개념(정의)을 어느 정도 이해하고 있는가?

(1) 함수의 극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

(2) 좌극한과 우극한의 개념(정의)을 올바르게 이해하고 있는가?

만일 이해하지 못하고 있다면, 학생들이 범하는 오개념은 무엇인가?

(3) 함수의 극한에 관한 문제에서 극한 개념을 올바르게 이해하고 있는가?

3. 수열의 극한과 함수의 극한의 관계를 올바르게 이해하고 있는가?

이와 같은 연구문제를 지필검사를 통한 조사연구방법을 실시하였다. 지필검사는 극한에 대한 개념 검사지로서 연구의 목적에 맞도록 Williams(1991)가 대학생들이 가지고 있는 극한 모델에 관한 연구에서 사용된 설문지를 참고하여 전문

가와 수학 교사들의 자문을 얻어 연구자가 현행 고등학교 교육과정에 맞추어 구성하였다.

본 연구는 충청남도 당진군 소재의 1개교 5학년 (136명)의 고등학교 자연과정 3학년 학생들을 연구자가 임의로 선정하여 조사 연구하였다.

본 연구를 통하여 얻은 결과는 다음과 같다.

1. 연구문제 1

교과서에서 제시하고 있는 수열의 극한의 정의에 토대를 둔 개념을 정확하게 진술한 학생은 분석 대상자 128명 중 25명으로 19.53%였으며 선택형 문항으로 다시 재질문을 던졌을 때 모든 문항에 옳게 답한 학생은 1명에 불과하였다. 선택형 문항에서 학생들이 자신이 가지고 있는 개념과 가깝다고 느끼는 문항을 선택하도록 했을 때 직관적 정의를 바르게 선택한 학생은 33.59%로 나타났으며, 가까이 가기는 하지만 만날 수는 없는 한계값으로 잘못 인식하고 있는 학생도 35.16%이었다. 이는 수열의 극한에 대해 바른 개념을 갖고 있는 학생이 매우 드물다는 것을 볼 수 있었다.

또한 위의 수열의 극한의 정의를 옳게 진술했던 25명 중 10명만이 수열의 극한에 대한 직관적 정의를 자신이 생각하는 극한에 대한 개념과 가깝다고 응답하였으나 이들 모두 수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지지만 같아질 수는 없는 수라는 질문에 대해 옳다고 대답하였다. 이는 Schwarzenberger & Tall(1977)가 ‘극한’이란 단어 자체에서 일상생활의 함축이 수학적 사고와 일치하지 않는 많은 것들을 갖고 있다면서 일상에서의 극한은 ‘속도제한’처럼 지나칠 수도 없고 지나쳐서도 안 되는 것이라고 언급했던 것과 같이 ‘극한’이라는 단어 자체에서 주는 일상생활에서의 의미가 학생들의 사고 속에 복합적으로 작용한 결과라고 볼 수 있을 것이다.

2. 연구문제 2

함수의 극한의 정의를 교과서에 제시된 것을 토대로 정확하게 진술하고 있는 학생은 7.03%형이었으며, 선택형 문항으로 다시 질문했을 때 모든 질문에 옳게 대답한 학생은 1명에 불과하였다. 선택형 문항에서 학생들이 자신이 가지고 있는 개념과 가깝다고 느끼는 문항을 선택하도록 했을 때 직관적 개념에 대해 바르게 인식하고 있는 학생은 27.34%로 나타났으며, 우극한이나 좌극한을 극한으로 이해하고 있거나 극한을 연속함수로 제한하여 인식하고 있는 학생도 30.47%나 되었다. 이는 함수의 극한에 대해 바른 개념을 갖고 있는 학생이 매우 드물다는 것을 볼 수 있었다.

함수의 극한에 대한 정의를 옳게 진술했던 9명의 학생들 중 3명만이 극한에 대한 직관적 정의를 자신의 극한에 대한 생각과 가장 가깝다고 하였고, 3명은 좌극한(우극한)의 설명을, 3명은 연속함수로 제한하였을 때 함수가 한없이 가까이 접근해가는 수라는 설명을 극한에 대한 자신의 생각과 가장 가깝다고 선택하였다.

3. 연구문제 3

같은 곳으로 수렴하는 서로 다른 수열을 통해 함수의 극한의 존재성을 얼마나 인식하고 있는지 알아보고자 하였으나 단지 3.91%(5명)만이 옳게 답하였고 대다수가 그 과정마다의 연결을 이해하지 못하였고 각기 다른 것으로 인식하거나 무응답이 69.53%나 되었다. 이것은 수열의 극한과 함수의 극한과의 관계를 대다수의 학생들이 깨닫지 못함을 볼 수 있었다.

대다수의 학생들이 문제 상황에서 극한을 묻는 문제에서는 옳게 답하였으나 실제 극한의 정의를 옳게 말하였음에도 불구하고 선택형에서 한계값으로 인식하거나 근사값으로 인식하기도 하였다. 또한 함수의 극한에 대해서도 함수의 극한에 대한 개념을 옳게 진술하였으나 극한 개념에 대해 우극한이나 좌극한을 극한으로 인식하거나 함수의 근사값으로 이해하고 있는 것도 볼 수 있었다.

그리고 대다수의 학생들이 수열의 극한과 함수의 극한의 연결성을 인식하지 못한 채 서로 각기 다른 것으로 이해하고 있는 것을 볼 수 있었다.

B. 결론

본 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째로, 수열의 극한의 개념(정의)에 대해 소수의 학생들이 올바른 이미지를 형성하고 있는 것으로 나타났으나 이들조차도 수열의 극한이 수열이 한없이 가까워질 수는 있으나 같아질 수는 없는 것이라는 관념이 학생들의 사고 속에 깊게 자리잡고 있는 것을 볼 수 있었다. 반면 수열의 극한에 관한 문제는 많은 학생들이 옳게 해결하였다. 이러한 것으로 볼 때 학생들이 극한에 대한 개념을 형성하는 데 있어서, 일상생활에서 사용되고 있는 ‘극한’이라는 단어와 극한을 직관적 정의로 표현하는 과정에서 나타나는 ‘한없이 가까워진다’와 같은 언어의 영향을 벗어나는 것이 매우 어렵다는 것을 볼 수 있었다. 따라서 다양한 예를 통해 오개념들을 극복하는 과정이 필요하다고 하겠다.

둘째로, 함수의 극한 개념(정의)에 대해 소수의 학생들이 옳게 진술하고 있었으나 이들 중에는 좌극한(우극한)이 함수의 극한이라고 생각하고 있거나 함수의 극한은 근사값이라고 설명한 표현에 대해서도 옳다고 응답한 학생도 있었다. 따라서 다양한 예를 통해 오개념을 극복하는 과정이 필요하다고 하겠다.

또한 많은 학생들이 함수의 극한과 함수의 연속성을 혼란스러워 함을 볼 수 있었다. 이는 함수의 극한 이후 후속학습인 함수의 연속성이 극한 개념을 바탕으로 이루어지고 있기 때문에 혼돈이 일어나는 것으로 볼 수 있으며, 이것은 다양한 그래프의 제시를 통해 연속성과는 다른 의미임을 일깨워 주는 과정이 필요하다고 하겠다.

셋째로, 수열의 극한과 함수의 극한 개념을 서로 연관시키지 못하고 있음을 알 수 있었다. 많은 학생들이 함수의 극한이 존재하는지를 좌극한과 우극한을 통해

판단하고 있었으나, 같은 수로 수렴하는 수열에 대해서 함수의 극한을 알아보았을 때 다르게 나타나면 함수의 극한이 존재하지 않음을 이해하고 있는 학생은 매우 드물었다. 이는 교과서에 그 과정이 제시되어 있으나 단지 과정으로만 여길 뿐 정확하게 그 의미를 파악하는 과정이 부족하였기 때문으로 본다. 따라서 수열의 극한과 함수의 극한을 연결시켜 생각해 볼 수 있는 기회를 제시해주는 과정이 필요하리라고 본다.

본 논문의 연구결과를 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째로, 본 연구는 고등학교 3학년 자연계 학생들을 대상으로 극한 개념의 이해에 대한 실태조사를 하였다. 학생들이 개념에 대해 매우 취약함이 나타나므로 극한 이외의 다른 개념에 대해서도 이해가 어떠한지 조사해 볼 필요가 있다고 본다.

둘째로, 본 연구는 수열의 극한과 함수의 극한과의 관계에 대한 실태조사를 하였다. 이러한 실태를 바탕으로 두 극한과의 관계에 대한 이해도를 높일 수 있는 교수법의 고안이 필요하다고 하겠다.

참 고 문 헌

- 교육부 (1998). 고등학교 교육과정 해설 -수학-.교육부.
- 권영인 (2001). 고등학교 2학년을 대상으로 한 극한에 대한 오개념 및 오류에 관한 연구. 중등교육연구 제13집. pp.159-203.
- 김명진 (2000). 중학교 2학년 학생들의 함수 개념에 대한 실태 조사. 한국교원대학교 석사학위 논문.
- 김민수, 고영근, 임홍빈, 이승재 (1997). 국어대사전. 서울: 금성출판사.
- 남영신 (2006). 한 국어사전. 서울: 성안당.
- 노수진 (2000). 고등학교 학생들의 수열의 극한과 급수의 합에 대한 오개념과 오류분석에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.
- 박교식 (2003). 고등학교 수학용어 다시보기. 서울: 수학사랑.
- 박선화 (1993). 개념학습에서 발생하는 인지적 갈등 요인에 대한 고찰-개념 정의와 개념이미지의 관계를 중심으로-. 대한수학교육학회 논문집. 제3권, 제1호.
- _____ (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 박사학위 논문.
- 박성환 (2001). 중학교 2학년 학생들의 기하 개념 이미지에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.
- 박수정 (2002). 예비교사와 현직교사의 극한에 관한 교과 내용적 지식과 교수학적 지식. 이화여자대학교 석사학위 논문.
- 박임숙 (2002). 고등학교 수열의 극한 개념의 지고에 관한 소고. 수학교육 논문집. 제13집. 한국수학교육학회지, pp.287-304.
- 우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대 출판부. pp. 378-419.
- _____ (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대 출판부, pp. 363-364.

- 이강섭 외 (2003). 고등학교 수학 I 교사용 지도서. 서울: (주)지학사.
- _____ (2003). 고등학교 수학 II. 교사용 지도서. 서울: (주)지학사.
- _____ (2003). 고등학교 수학 I. 서울: (주)지학사.
- _____ (2003). 고등학교 수학 II. 서울: (주)지학사.
- 이남숙 (1997). 개념 정의와 개념 이미지간의 격차 발생 원인에 관한 고찰. 이화여자대학교 석사학위 논문.
- 이종희(1998). 표상의 개념: 상징, 이미지, 모방과의 관계. 유아교육연구, 제18권, 제1호, pp55-68.
- 이종희(2002). 수학적 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. 교과교육연구, 제6권, 제2호, pp. 23-36.
- 장혜원 (1996). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구 -표상 모델 개발을 중심으로-. 서울대학교 박사학위 논문.
- 정동명, 조승제 (1992). 실해석학 개론. 서울: 경문사.
- 정수연 (2000). 수학사적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 조선대학교 석사학위 논문.
- 정은실 (2001). 수학적 개념 형성과 그 지도. 진주교대 과학교육연구. 제27호, pp. 95-110.
- 조현정 (1997). 극한에 관련된 학생들의 수학적 신념에 관한 연구. 이화여자대학교 석사학위 논문.
- 한중희 (1997). 고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.
- Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 32(4), 487-500.
- Courant, R. (1996). *What is mathematics?(2nd ed.)*. Oxford University Press, Inc. 박평우, 김운규, 정광택 (공역) (2002). 수학이란 무엇인가. 서울: 경문

사.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Hershkowitz & Vinner (1980). Concept image and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In Karplus, R.(Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics*. Berkeley: Lawrence Hall of Science, University of California.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. 구광조, 오병승, 류희찬(역)(1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울: 경문사.

Sierpiska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 381-397.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Function, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws.(Ed.), *Handbook of research on thinking and learning*(pp. 495-514). New York: Macmillan Publishing Co.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 39-50.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Williams, S.(1991). Models of limits held by college calculus students.

Journal for Research in Mathematics Education, 22(3). 219–236.

Zachariades, T. (2004). Secondary mathematics teachers' knowledge concerning the concept of limit and continuity. *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the PME*, 4, 481–488.



ABSTRACT

Research Survey on the Understanding
and Application Ability of the Concepts of Limit
by 12th Graders at a General High School

Lee, Yeon Hi

Major in Mathematics Education
Graduate School of Education
Korea National University of Education
Chung-Buk, KOREA

Supervised by Professor Lee, Ki Suk, Ph. D.
& Jeon, Pyung Kook, Ph. D.

The purpose of this study was to investigate how 12th graders at a general high school understand the concept of 'limit of a sequence' and 'limit of a function'. Once students established understanding of the relation between limit of a sequence and limit of a function, this investigation produced implications for teaching the concept of limit.

The following research questions were established.:

1. Do students understand to any extent the concept of 'limit of a sequence'?

(1) Do students understand accurately the concept of 'limit of a sequence'? If not, what are the misconceptions of students?

(2) Do students understand accurately the concept of 'limit' in questions dealing with limit of a sequence?

2. Do students understand to some degree the concept of 'limit of a function'?

(1) Do students accurately understand the concept of 'limit of a function'? If not, what misconceptions do students harbour?

(2) Do students understand accurately the notion of 'left-hand limit' and 'right-hand limit'? If not, what are misconceptions of students?

(3) Do students fully understand the concept of 'limit' in questions regarding the limit of a function?

3. Do students understand the relation between the limit of a sequence and the limit of a function?

In order to solve these research questions a research survey via written response was conducted. The written response survey was composed of 13 questions about the notion of limit and designed in accordance with the current curriculum of high schools. For this research, 5 classes of 12th graders at a general high school-136 students- were selected.

Though few students appeared to have accurate knowledge about the definition of the limit of a sequence, the notion that limit is a number or point where the function converges but never touches is widespread among the students. Despite this lack of concrete knowledge, many students could accurately solved problems involving the limit of a sequence.

Consequently, when students established mentally the concept of limit, there appeared to be the unavoidable problem of confusing lexicon; i.e. 'limit' was thought to be 'converge'. Therefore, this paper suggested that various examples should be used in the classroom to solve these misconceptions.

Second, few students could accurately state the definition of limit of a function. A number of them considered left-hand (right-hand) as the limit of a function. Others responded that the expression 'A limit of a function is approximation that can be made as accurate as you wish' is right. Consequently, this researcher suggested the use of a variety of examples to solve these misconceptions. Also, many students appeared confused about the limit of a function and the continuity of a function. This confusion may have been due to the concept of continuity of a limit, which is post-learning to that of the limit of a function. It is suggested that students be explicitly shown this difference through a variety of graphs.

Third, many students failed to relate the concept of limit of a sequence to that of limit of a function. They made judgments through the left-hand and right-hand limit in cases of limit of a function. Though the majority of students failed to relate the concepts, there were a significant few who understood the non-existence of the limit of a function if the results are different when we attempt to find limit of a function by employing limit of a sequence. This idea has been presented in Korean high school textbooks, but many students consider it textbook knowledge and do not learn its meaning accurately. Accordingly, students should be given opportunities to consider the link between the limit of a sequence and that of a function.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Korea National University of Education in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education(Mathematics Education) in February, 2007.

<부록>극한에 대한 개념 검사지

본 검사는 여러분이 극한에 대하여 어느 정도 이해하고 있는지를 알아보기 위한 것으로서, 검사의 결과는 공개되지 않으며 단지 수학 교육 개선을 위한 연구의 목적에 사용할 뿐입니다. 문제를 잘 읽고 최선을 다하여 풀어주시기 바랍니다.

답은 직접 문제지에 적어 넣기 바랍니다. 혹시 틀렸다고 판단되었을 경우에는 지우개를 사용하지 말고 X자로 표기한 후 빈 공간에 다시 적어 넣으시기 바랍니다.

감사합니다.

한국교원대학교 대학원 수학교육과

() 고등학교 ()학년 ()반 이름()

1. 무한수열 $\{a_n\}$ 의 극한값(또는 극한)의 정의를 쓰시오.



2. 다음은 무한수열 $\{a_n\}$ 의 극한에 대한 설명이다. 참(○)인지 거짓(×)인지 말하시오.

- ① 수열의 극한은 n 이 커짐에 따라 수열이 가깝게 접근해 가는 수이다.()
- ② 수열의 극한은 수열이 넘어설 수 없는 수이다. ()
- ③ 수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지지만 같아질 수는 없는 수이다.()
- ④ 수열의 극한은 수열의 근사값이다. ()
- ⑤ 수열의 극한은 수열의 마지막항의 값이다. ()
- ⑥ 수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지는 수이다. ()

3. 수열의 극한에 대한 위의 설명 중 여러분의 생각에 가장 가까운 것은 무엇

입니까? (번)

4. 다음 무한수열의 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고, 그 이유를 자세히 쓰시오.

① $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

② $1, (-1), 1, (-1), \dots$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:



③ $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, (-\frac{1}{2})^{n-1}, \dots$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

④ $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

5. 다음 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고, 그 이유를 자세히 쓰시오.(풀이과정은 생략하지 말고 자세히 쓰시오)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1}$$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

6. 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한값(또는 극한)의 정의를 쓰시오.

7-(1) 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 좌극한의 정의를 쓰시오.

7-(2) 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 우극한의 정의를 쓰시오.

8.다음은 함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 극한에 대한 설명이다. 참(○)인지 거짓(×)인지 말하시오.

① 함수의 극한은 x 가 a 에 한없이 가까워질 때 함수 $f(x)$ 가 한없이 가까이 접근해 가는 수이다. ()

② 함수의 극한은 함수 $f(x)$ 가 가까이 접근해 가는 수이다. ()

③ 함수의 극한은 x 가 a 의 작은(또는 큰) 값에서 가까워질 때 함수 $f(x)$ 가 일정한 수에 가까워지는 수이다. ()

④ 함수의 극한은 함수 $f(x)$ 에 a 를 대입하면 나타나는 값이다. ()

⑤ 함수의 극한은 함수 $f(x)$ 가 연속일 때 $f(x)$ 가 한없이 가까이 접근해가는 수이다. ()

⑥ 함수의 극한은 x 가 a 로 갈 때 함수 $f(x)$ 의 근사값이다. ()

9. 함수의 극한에 대한 위의 설명 중 여러분의 생각에 가장 가까운 것은 무엇입니까? (번)

10. 다음 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고 그 이유를 자세히 쓰시오.(풀이과정은 생략하지 말고 자세히 쓰시오)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)$$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 5)$$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

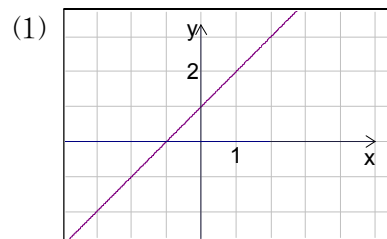
이유:

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x} - 2 \right)$$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

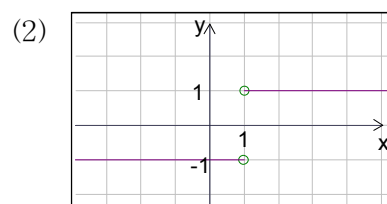
11. 다음 그래프를 보고 $x = 1$ 에서의 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고 그 이유를 자세히 쓰시오.



$$f(x) = x + 1$$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

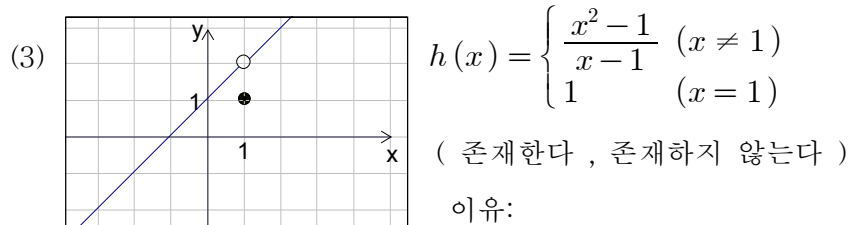
이유:



$$g(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:



12. 다음 극한이 존재하는지 존재하지 않는지 말하고 그 이유를 자세히 쓰시오.(풀이과정을 생략하지 말고 자세히 쓰시오)

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:



(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{2x^2 + 1}$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \left(1 - \frac{1}{x^2-4}\right)$$

(존재한다 , 존재하지 않는다)

이유:

13. 다음은 함수 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 의 $x = 0$ 에서의 극한을 알아보기 위한 것이다.

두 수열 $\{a_n\} = \{\frac{1}{2n\pi}\}$ 과 $\{b_n\} = \{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\}$ 이라 할 때 다음 물음에 답하

시오.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 을 각각 구하시오.



(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ 을 각각 구하시오..

(3) 함수 $f(x)$ 의 $x = 0$ 에서의 극한이 존재하는지 말하시오.

(4) 위의 문제 (1)~(3)을 통해 알 수 있는 것이 무엇입니까?