박수칠 수학 부교재 #03

미적분과 통계 기본-맛보기

(1.함수의 극한 ~ 2.함수의 연속)

1 함수의 극한

§1. 함수의 수렴과 발산

무한대와 무한소

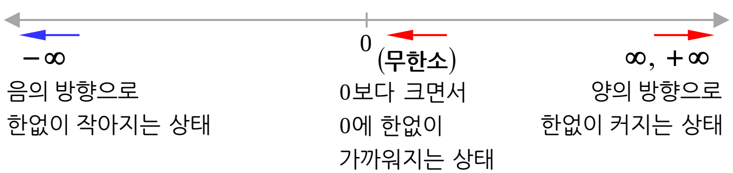
• 무한대와 무한소의 정의

▹ 임의의 실수보다 큰 수를 무한대라 하고, 기호 ∞로 나타낸다. 달리 말하면 모든 실수의 집합에서 아무 원소나 하나 뽑았을 때, 뽑힌 수가 아무리 크더라도 무한대 ∞는 그보다 더 크다는 의미다.

▹ 반대로 무한소는 임의의 양수보다 작은 양수를 의미한다. 즉, 모든 양수의 집합에서 아무 원소나 하나 뽑았을 때, 뽑힌 수가 아무리 작더라도 무한소는 그보다 더 0에 가깝다는 의미다.

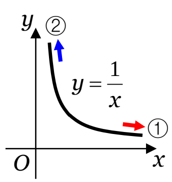
▹ 무한대와 무한소는 1, $2-\sqrt{3}$, π처럼 일정한 크기를 갖는 실수가 아니며, 무한대는 한없이 커지는 상태, 무한소는 0보다 크면서 0으로 한없이 다가가는 상태라는 동적인 의미로 이해해야 한다.

▹ 음의 방향으로 한없이 작아지는 상태는 음의 무한대라 하고, 기호 $-\infty$로 표시한다. 이와 반대인 $+\infty$는 양의 무한대라 하며, ∞와 같은 뜻이다.



• 무한대와 무한소의 관계

오른쪽과 같은 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프에서 알 수 있듯이



① x가 한없이 커지면 $\dfrac{1}{x}$은 한없이 0으로 다가간다.

즉, $\dfrac{1}{\infty}$은 무한소다.

② x가 한없이 0에 가까워지면 $\dfrac{1}{x}$은 한없이 커진다. 즉, $\dfrac{1}{(\text{무한소})}$은 ∞다.

☆ 무한소를 무한대의 역수로 보고 $\infty\times(\text{무한소})=1$로 생각하면 안된다. x가 무한대면 $\dfrac{2}{x}$는 무한소지만, $x\times\dfrac{2}{x}=2$이기 때문이다.

$x\to a$의 의미

• $x\to\infty$, $x\to-\infty$의 의미

▹ 수학Ⅰ 수열의 극한에서 배웠듯이 $n\to\infty$는 변수 n의 값이 양의 방향으로 한없이 커지는 상태임을 의미한다.

▹ 마찬가지로 $x\to\infty$는 변수 x의 값이 양의 방향으로 한없이 커지는 상태, $x\to-\infty$는 음의 방향으로 한없이 작아지는 상태임을 의미한다.

• $x\to a$의 의미

▹ a가 상수일 때, $x\to a$는 변수 x의 값이 a에 한없이 가까워지는 상태임을 의미한다. 이때, x의 값은 a 근처의 모든 실수들을 거치면서 a로 다가가고 $x\neq a$임에 유의한다.

[예] $x\to1$이면 x의 값은 1이 아니면서 1에 한없이 가까워진다.

$\cdots\ 0.9\ \cdots\ 0.99\ \cdots\ 0.999\ \cdots$ → **1** ← $\cdots\ 1.001\ \cdots\ 1.01\ \cdots\ 1.1\ \cdots$

• $x\to a-0$, $x\to a+0$의 의미

▹ $x\to a$이면 x의 값은 a보다 작을 수도 있고, 클 수도 있다. 이를 기호로 다음과 같이 구별해서 표현한다.

$\boldsymbol{x\to a-0}$ →	$\boldsymbol{a}$	← $\boldsymbol{x\to a+0}$
x값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워짐		x값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워짐

[예] $x\to2-0$이면 x의 값은 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워지고, $x\to2+0$이면 x의 값은 2보다 크면서 2에 한없이 가까워진다.

$\boldsymbol{x\to2-0}$ → **2** ← $\boldsymbol{x\to2+0}$

▹ $x\to0$일 때는 $x\to0+0$, $x\to0-0$ 대신 다음과 같이 표현한다.

$\boldsymbol{x\to-0}$ →	**0**	← $\boldsymbol{x\to+0}$
x값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워짐		x값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워짐

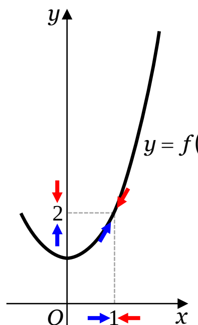
함수의 극한

• 함수 $f(x)$에 대하여 변수 x의 값이 상수 a에 한없이 가까워질 때, 함숫값 $f(x)$의 값이 상수 α로 한없이 다가가면 함수 $f(x)$는 α로 수렴한다고 한다. 이를 간단히

$$\boldsymbol{x \to a}\text{일 때 } \boldsymbol{f(x) \to \alpha}$$

라고 표현하며, α를 $x \to a$일 때 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 한다.

[예1] 함수 $f(x)=x^2+1$에서 $x \to 1$일 때의 극한값

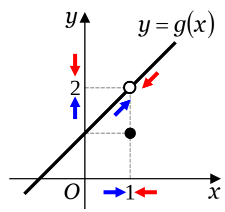


변수 x의 값이 1에 한없이 가까워지면 그래프 위의 점 $(x, f(x))$는 점 $(1, 2)$로 한없이 다가간다. 그러므로

$x \to 1$일 때 $f(x) \to 2$

라 쓰고, 극한값은 2이다.

[예2] 함수 $g(x)=\begin{cases} x+1 & (x \neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$에서 $x \to 1$일 때의 극한값



변수 x의 값이 1에 한없이 가까워지면 그래프 위의 점 $(x, g(x))$는 점 $(1, 2)$로 한없이 다가간다. 그러므로

$x \to 1$일 때 $g(x) \to 2$

라 쓰고, 극한값은 2이다.

☆ $x \to 1$이면 $x \neq 1$이다. 따라서 $\begin{pmatrix} x \to 1\text{일 때 } g(x) \to 2 \\ x = 1\text{일 때 } g(x) = 1 \end{pmatrix}$임에 주의한다.

• $x \to a$일 때 함수 $f(x)$가 α로 수렴하는 것은 수열의 극한과 마찬가지로 lim을 써서 나타낼 수 있다.

① 함수식

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

② 변수 ③ 변수의 목적지 ④ 극한값

② 변수: 함수식에서 정의역의 임의의 원소를 나타내는 문자

③ 변수의 목적지: 함수의 극한에서는 상수 뿐만 아니라 $+\infty$, $-\infty$ 모두 가능

④ 극한값: x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, 함숫값 $f(x)$가 다가가는 값

[예] 왼쪽 [예1]의 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^2+1) = 2$

[예] 왼쪽 [예2]의 함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$

$\boxed{x \to 1\text{일 때는 } x \neq 1\text{이므로 } g(x) = x+1\text{이다.}}$

• 변수 x가 상수 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$가 α와 같아지는 경우, 즉

$$\boldsymbol{x \to a}\text{일 때 } \boldsymbol{f(x) = \alpha}$$

인 경우에도 '함수 $f(x)$는 α로 수렴한다'고 하며, $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$라 쓴다.

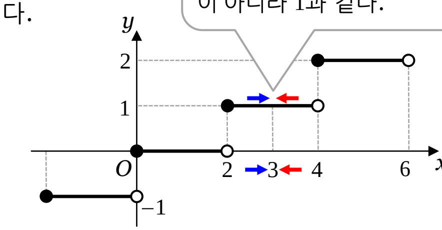
[예] 함수 $y=\left[\frac{1}{2}x\right]$에 대하여 (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수)

$2 \le x < 4$일 때 $\left[\frac{1}{2}x\right]=1$이므로,

$x \to 3$일 때 $\left[\frac{1}{2}x\right]=1$이다.

따라서 $\lim_{x \to 3}\left[\frac{1}{2}x\right]=1$

x값이 3에 한없이 가까워지면 y값은 1로 한없이 다가가는 것이 아니라 1과 같다.



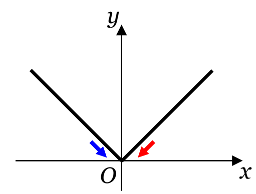
함수의 수렴·발산

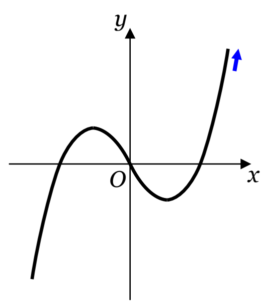
- 함수 $f(x)$에 대하여 $x \to a$(a는 상수) 또는 $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$ 일 때 $f(x)$가 일정한 값으로 한없이 다가가거나 일치하는 경우를 수렴, 그 외의 경우는 발산이라고 한다.
- 함수의 발산은 양의 무한대로 발산하는 경우, 음의 무한대로 발산하는 경우, 진동하는 경우로 세분된다.

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ — α에 수렴 → **수렴**

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ — 양의 무한대로 발산
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ — 음의 무한대로 발산
특정한 값들이 반복해서 나타남 — 진동
→ **발산**

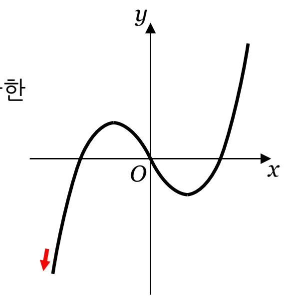
[예] $x \to 0$일 때 함수 $y = |x|$의 극한
오른쪽 그래프에서 알 수 있듯이
$x \to 0$일 때, $|x| \to 0$이므로
$\lim_{x \to 0} |x| = 0$이다. (수렴)



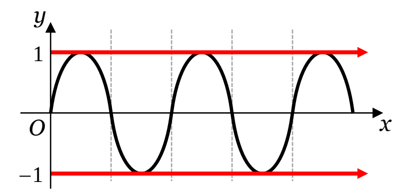


[예] $x \to \infty$일 때 함수 $y = x^3 - x$의 극한
오른쪽 그래프에서 알 수 있듯이
$x \to \infty$일 때 $x^3 - x \to \infty$이므로
$\lim_{x \to \infty}(x^3 - x) = \infty$이다. (발산)

[예] $x \to -\infty$일 때 함수 $y = x^3 - x$의 극한
오른쪽 그래프에서 알 수 있듯이
$x \to -\infty$일 때 $x^3 - x \to -\infty$이므로
$\lim_{x \to -\infty}(x^3 - x) = -\infty$이다. (발산)



[예] $x \to \infty$일 때 함수 $y = \sin x$의 극한
아래 그래프에서 알 수 있듯이 $x \to \infty$일 때 $\sin x$의 값은 1과 -1 사이의 모든 실수가 무한히 반복되므로
$\lim_{x \to \infty} \sin x$의 값은 존재하지 않는다. (발산)



극한의 부정형 계산

- 수열의 극한과 마찬가지로 함수의 극한에도 수렴·발산 여부가 불명확한 극한의 부정형이 있으며, 수열의 극한에서보다 다양하게 나타난다.
- 부정형의 극한값을 구하려면 수렴하는 함수들의 조합으로 변형해야 하며, 어떤 꼴인지에 따라 다음의 방법들을 사용한다.

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴

▹ 분수식이면 인수분해 후 약분하고,
▹ 무리식이면 $\sqrt{\ }$ 이 있는 쪽을 유리화한다.

[예1] $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$

$x\to1$이면 $x\neq1$이기 때문에 $x-1\neq0$이며, 분모·분자를 $x-1$로 나눌 수 있음

분모·분자 모두 0에 한없이 가까워짐

[예2] $\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(2x-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}2(\sqrt{x+2}+2)=8$

☆ $\frac{0}{0}$ 꼴에서 분모·분자의 0은 무한소를 의미한다. 만일 실수 0이 포함되어 되어 있다면 변형 없이, 극한값을 바로 구할 수 있다.

[예3] $\lim_{x\to1}\frac{\left[\frac{1}{2}x\right]}{\sqrt{x+3}-2}=0$ (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

$x\to1$일 때
$0<\frac{1}{2}x<1$이므로 (분자)$=0$,
$\sqrt{x+3}-2\to0$이므로 (분모)$\neq0$

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

▹ 분모의 최고차항으로 분모·분자를 나눈다.
(분모에서 가장 큰 부분)

[예1] $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\infty$

분모·분자를 x로 나눔

[예2] $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$

분모·분자를 x^2으로 나눔

[예3] $\lim_{x\to\infty}\frac{-x+2}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

분모·분자를 x^2으로 나눔

☆ 분모의 최고차항으로 분모·분자를 나누면 대부분의 항이 $\frac{(상수)}{\infty}$ 꼴로 바뀌면서 0으로 수렴함

☆ 분모·분자의 차수와 극한값
▹ 분자 차수가 높으면 $\pm\infty$로 발산
▹ 분모·분자 차수가 같으면 최고차항의 계수비로 수렴
▹ 분모 차수가 높으면 0으로 수렴

[예4] $\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}-\frac{2}{x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}}=1$

▹ $x\to\infty$이면 $\sqrt{x^2+1}\fallingdotseq\sqrt{x^2}=x$이므로 분모·분자를 x로 나눠서 계산

▹ $\sqrt{x^2+1}$을 x로 바꾼 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-2}$을 계산해도 되지만, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에서만 가능한 방법임을 명심해야 한다.

[예5] $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-2^{x+1}}{3^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3^{x+1}}{3^x}-\frac{2^{x+1}}{3^x}}{1+\frac{2^x}{3^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=3$

분모·분자를 3^x으로 나눔

(3) $\infty-\infty$꼴
▷ 다항식이면 최고차항으로 묶어주고,
▷ 무리식이면 유리화한다.

[예1] $\lim_{x\to\infty}(2x^3-3x^2+1)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)$
$=\infty$

☆ $x\to\pm\infty$일 때의 다항함수 극한은 $\lim_{x\to\infty}(2x^3-3x^2+1)=\lim_{x\to\infty}2x^3=\infty$처럼 최고차항 외의 항을 무시해도 된다.

[예2] $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

분모가 1인 분수로 보고 분모·분자에 분자의 켤레식을 곱함

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1$

$\frac{\infty}{\infty}$꼴이고 $\sqrt{x^2+2x}\fallingdotseq\sqrt{x^2}=x$

[예3] $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}$

분모가 $\infty-\infty$꼴의 무리식이므로 분모를 유리화

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=2$

$\frac{\infty}{\infty}$꼴이고 $\sqrt{x^2+x+1}\fallingdotseq\sqrt{x^2}=x$

[예4] $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

$\frac{\infty}{\infty}$꼴이고 $\sqrt{x+1}\fallingdotseq\sqrt{x}$

☆ $\infty-\infty$꼴의 다항식, 무리식은 ∞에 해당하는 두 식의 차수가 같을 때만 위의 방법으로 변형한다. 한 쪽의 차수가 크면? 굳이 변형할 필요는 없다.

[예5] $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2})=-\infty$

$\sqrt{x+1}$을 $\frac{1}{2}$차식, $\sqrt{x^2-2}$를 1차식으로 보면 오른쪽이 빨리 증가하므로 $-\infty$로 발산

[예6] $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-\sqrt{x}}=2$

$\frac{\infty}{\infty-\infty}$꼴 같지만, $\sqrt{x^2+1}$을 1차식, $\sqrt{x}$을 $\frac{1}{2}$차식으로 보면 분모 ∞로 발산, 전체 $\frac{\infty}{\infty}$꼴이므로 유리화할 필요가 없다.

(4) $\infty\times0$꼴
▷ 함수식의 형태에 따라 통분, 유리화 등 적당한 방법으로 변형한다.

[예1] $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{(x-1)+1}{x-1}\right\}$

통분

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}=-1$

[예2] $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\sqrt{4-x}-2}{2\sqrt{4-x}}\right)$

통분

$\frac{0}{0}$꼴의 무리식이므로 유리화

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{4-x}-2)(\sqrt{4-x}+2)}{2x\sqrt{4-x}(\sqrt{4-x}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\sqrt{4-x}(\sqrt{4-x}+2)}$

$=\frac{-1}{2\times2\times4}=-\frac{1}{16}$

[예3] $\lim_{x\to\infty}x\left(2-\frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)$

통분

$\infty-\infty$꼴의 무리식 부분을 유리화

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-1})(2\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-1})}{\sqrt{x+1}(2\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-1})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\{4(x+1)-(4x-1)\}}{2(x+1)+\sqrt{(x+1)(4x-1)}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{2x+2+\sqrt{4x^2+3x-1}}$

$\frac{\infty}{\infty}$꼴이고 $\sqrt{4x^2+3x-1}\fallingdotseq\sqrt{4x^2}=2x$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{4x+2}=\frac{5}{4}$

평가원 [예제]1. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$의 값을 구하여라.

[풀이] $\frac{0}{0}$꼴의 무리식이므로 분모의 유리화부터 시작한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-x^2+x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)$$
$$=2\times6=12$$

$$x^3-x^2+x-1$$
$$=x^2(x-1)+(x-1)$$
$$=(x^2+1)(x-1)$$

수능 [예제]2. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=1$일 때,
$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\alpha^2}-\sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha}-\sqrt{4x+\beta}}$의 값을 구하여라.

[풀이] 분모, 분자 모두 $\infty-\infty$꼴의 무리식이므로 동시에 유리화한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\alpha^2}-\sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha}-\sqrt{4x+\beta}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+\alpha^2}-\sqrt{x+\beta^2})(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})}{(\sqrt{4x+\alpha}-\sqrt{4x+\beta})(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{(x+\alpha^2)-(x+\beta^2)\}(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})}{\{(4x+\alpha)-(4x+\beta)\}(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})}{(\alpha-\beta)(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta}}{\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=2$$

$\frac{\infty}{\infty}$꼴이고 $\sqrt{4x+\alpha}\fallingdotseq\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$

$\sqrt{4x+\beta}\fallingdotseq\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$

$\sqrt{x+\alpha^2}\fallingdotseq\sqrt{x}$

$\sqrt{x+\beta^2}\fallingdotseq\sqrt{x}$

[예제]3. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$가 0 외의 값으로 수렴할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+f(x)}{x^2-2f(x)}$의 값을 구하여라.

[풀이] $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha(\alpha\neq0)$로 두고, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+f(x)}{x^2-2f(x)}$에서 $\frac{f(x)}{x}$꼴을 만들기 위해 분모·분자를 x로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+f(x)}{x^2-2f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{f(x)}{x}}{x-2\times\frac{f(x)}{x}}\quad\leftarrow\quad\frac{\infty+\alpha}{\infty-2\alpha}=\frac{\infty}{\infty}\text{꼴}$$

가 된다. 변형 후에도 $\frac{\infty}{\infty}$꼴이므로 또 다시 분모·분자를 x로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{f(x)}{x}}{x-2\times\frac{f(x)}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}{1-2\times\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}=3$$

$$\frac{3+\alpha\cdot0}{1-2\cdot\alpha\cdot0}\to\frac{3}{1}$$

• 함수의 극한 – 유형①
$x\to-\infty$이면 $x<0$이므로 부호 처리에 유의해야 한다.

[예제]4. 아래 계산에서 틀린 곳을 찾으시오.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}+3}\overset{①}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{3}{x}}\overset{②}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}+\frac{3}{x}}\overset{③}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{3}{x}}\overset{④}{=}2$$

[풀이] $x\to-\infty$이면 $x<0$이므로

$\sqrt{x^2}=|x|=-x$

이므로 $x=-\sqrt{x^2}$이다. 따라서 틀린 곳은 ②

☆ 위 문제에 대한 올바른 계산은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{3}{x}}=-2$$

☆ $x\to-\infty$인 함수의 극한 문제는 대개의 경우 $x=-t$로 치환해서 푸는 것이 가장 쉽다.

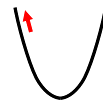
$x=-t$로 치환하면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}+3}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{\sqrt{t^2+1}+3}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{t+3}=-2$$

$\frac{\infty}{\infty}$꼴이고 $\sqrt{t^2+1}\fallingdotseq\sqrt{t^2}=t$

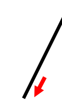
[예제]5. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+1}+2x-1\right)$의 값을 구하여라.

[풀이]



$y=4x^2-5x+1$

$x\to-\infty$일 때
$4x^2-5x+1\to\infty$이므로
$\sqrt{4x^2-5x+1}\to\infty$



$y=2x-1$

$x\to-\infty$일 때
$2x-1\to-\infty$

주어진 식은 $\infty-\infty$꼴의 무리식므로 유리화해야 하며, 그 전에 $x=-t$로 치환하면 부호 때문에 생기는 혼동을 피할 수 있다.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+1}+2x-1\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{4t^2+5t+1}-2t-1\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left\{\sqrt{4t^2+5t+1}-(2t+1)\right\}\left\{\sqrt{4t^2+5t+1}+(2t+1)\right\}}{\sqrt{4t^2+5t+1}+2t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+5t+1-(2t+1)^2}{\sqrt{4t^2+5t+1}+2t+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{4t^2+5t+1}+2t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{4t+1}=\frac{1}{4}$$

$\frac{\infty}{\infty}$꼴이고 $\sqrt{t^2+1}\fallingdotseq\sqrt{t^2}=t$

[예제]6. 실수 전체에서 정의되는 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2f(x)+1}{\sqrt{4x^2+f(x)}+f(x)}=3,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$$

를 만족할 때, 상수 α의 값을 구하여라.

[풀이]
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2f(x)+1}{\sqrt{4x^2+f(x)}+f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\times\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+f(x)}}{x}+\frac{f(x)}{x}}$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$꼴을 만들기 위해
분모·분자를 x로 나눔

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\times\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+f(x)}}{-\sqrt{x^2}}+\frac{f(x)}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\times\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}+\frac{f(x)}{x}}=\frac{2\alpha}{-2+\alpha}=3$$

$x<0$이므로
$x=-\sqrt{x^2}$

$\therefore\alpha=6$

함수의 극한과 수열의 극한 비교

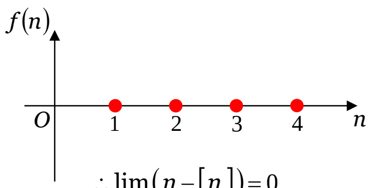
• 함수의 극한과 수열의 극한에는 다음과 같은 차이점이 있다.

수열의 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	함수의 극한 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
▹ $n\to\infty$, 즉 n의 값이 한없이 커지는 경우만 생각한다.	▹ $x\to a$(a는 상수)뿐만 아니라 $x\to\infty$, $x\to-\infty$도 가능하다.
▹ n의 값은 자연수 범위다.	▹ x의 값은 실수 범위다.

그렇다면 수열 $\{f(n)\}$의 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$과 $x\to\infty$일 때 함수 $f(x)$의 극한 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$의 계산 결과는 항상 같을까? 아래의 예제에서 생각해 보자.

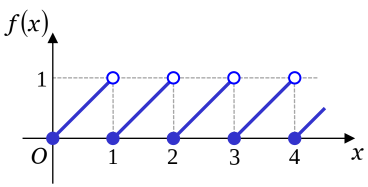
[예제]7. 수열 $\{n-[n]\}$의 극한 $\lim\limits_{n\to\infty}(n-[n])$과 함수 $f(x)=x-[x]$의 $x\to\infty$일 때의 극한 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-[x])$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수)

[풀이] n이 자연수일 때, $[n]=n$이므로 수열 $\{n-[n]\}$의 모든 항의 값은 0이다. 따라서 함수 $f(n)=n-[n]$의 그래프는 다음과 같이 나타난다.



$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(n-[n])=0$

x가 실수일 때 $x-[x]$는 x의 소수부분이므로 0이상, 1미만의 모든 실숫값을 거치면서 진동한다. 따라서 함수 $f(x)=x-[x]$의 그래프는 다음과 같이 나타난다.



$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}(x-[x])$의 값은 존재하지 않는다.

☆ 이처럼 수열의 극한에서 변수 n은 자연숫값만 갖고, 함수의 극한에서 변수 x는 실숫값을 갖는다는 차이에 유의하자.

$x \to \infty$이면 x값은 양의 방향으로 한없이 커지고, $x \to -\infty$이면 x값은 음의 방향으로 한없이 작아진다. 따라서 x값은 한 방향으로만 변하게 된다.

반면에 $x \to a$이면 x값은 a보다 작으면서 a로 다가갈 수도, a보다 크면서 a로 다가갈 수도 있다. 따라서 x값이 두 방향으로 변하기 때문에 함수의 극한도 두 방향으로 나눠서 생각해야 하는 경우가 있다. 지금부터 이에 대해 자세히 알아보자.

좌극한값과 우극한값

- $x \to a-0$과 $x \to a+0$의 의미
  ▹ $x \to a$일 때 x값이 a로 다가가는 방향은 다음과 같이 구별해서 나타낼 수 있다.

$\boldsymbol{x \to a-0}$ → $\boldsymbol{a}$ ← $\boldsymbol{x \to a+0}$

x값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워짐

x값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워짐

▹ $x \to 0$일 때 x값이 0으로 다가가는 방향은 다음과 같이 나타낸다.

$\boldsymbol{x \to -0}$ → $\boldsymbol{0}$ ← $\boldsymbol{x \to +0}$

x값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워짐

x값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워짐

- 좌극한값과 우극한값

$\lim_{x \to a} f(x)$에 대하여

▹ $x \to a-0$일 때 $f(x) \to \alpha$이면, α를 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한값이라 한다.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$$

▹ $x \to a+0$일 때 $f(x) \to \beta$이면, β를 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한값이라 한다.

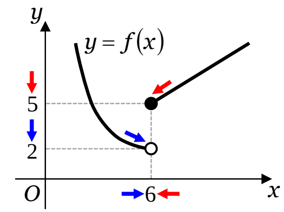
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \beta$$

좌극한값과 우극한값이 일치하면 $x \to a$일 때의 극한값이 된다. 즉

$$\alpha = \beta \text{이면 } \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

☆ 좌극한값과 우극한값이 다르면 '극한값이 존재하지 않는다'라고 하며, '발산한다'라는 표현은 적합하지 않다.

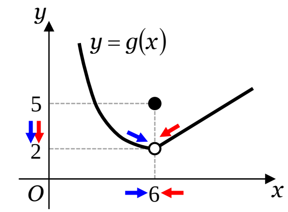
[예1] 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때



$\begin{pmatrix} x \to 6-0\text{일 때 } f(x) \to 2 \\ x \to 6+0\text{일 때 } f(x) \to 5 \end{pmatrix}$

$x=6$에서의 좌극한값 2와 우극한값 5가 일치하지 않으므로 $\lim_{x \to 6} f(x)$의 값은 존재안함

[예2] 함수 $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때

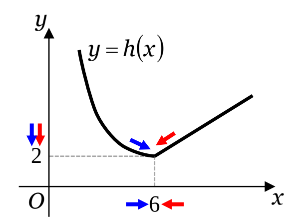


$\begin{pmatrix} x \to 6-0\text{일 때 } g(x) \to 2 \\ x \to 6+0\text{일 때 } g(x) \to 2 \end{pmatrix}$

$x=6$에서의 좌극한값과 우극한값이 모두 2이므로 $\lim_{x \to 6} g(x) = 2$

☆ 그래프가 끊어지는 점에서는 좌극한값과 우극한값이 다를 수도 있고, 같을 수도 있다.

[예3] 함수 $y=h(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때

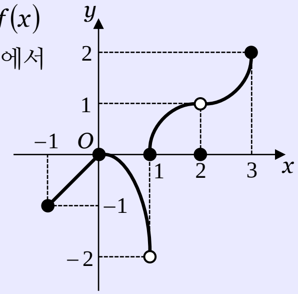


$\begin{pmatrix} x \to 6-0\text{일 때 } h(x) \to 2 \\ x \to 6+0\text{일 때 } h(x) \to 2 \end{pmatrix}$

$x=6$에서의 좌극한값과 우극한값이 모두 2이므로 $\lim_{x \to 6} h(x) = 2$

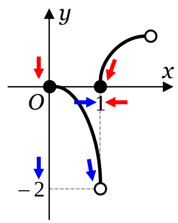
☆ 그래프가 이어지는 점에서는 좌극한값과 우극한값이 항상 같다.

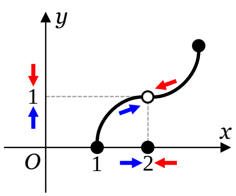
평가원 [예제]1. 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 아래에서 옳은 것을 모두 고르시오.



ㄱ. $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재한다.
ㄴ. $\lim_{x\to2} f(x)$가 존재한다.
ㄷ. $-1<a<1$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

[풀이]ㄱ. $x \to 1-0$일 때 $f(x) \to -2$,
$x \to 1+0$일 때 $f(x) \to 0$
이므로 좌극한값과 우극한값이 다르다. (거짓)

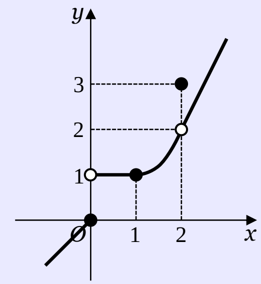




ㄴ. $x \to 2-0$일 때 $f(x) \to 1$,
$x \to 2+0$일 때 $f(x) \to 1$
이므로 좌극한값과 우극한값이 모두 1이다. 따라서 $\lim_{x\to2} f(x)=1$ (참)

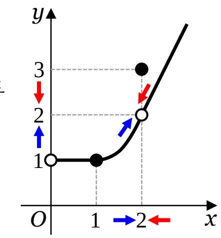
ㄷ. $-1<x<1$에서 그래프가 이어져 있으므로 좌극한값과 우극한값이 항상 일치한다. (참)

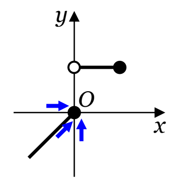
[예제]2. 함수 $y=f(x)$의 그래프 일부가 오른쪽 그림과 같을 때, 아래에서 옳은 것을 모두 고르시오.



ㄱ. $\lim_{x\to2} f(x)=2$이다.
ㄴ. $x \to -0$이면 $f(x) \to -0$이다.
ㄷ. $x \to 1+0$이면 $f(x) \to 1+0$이다.
ㄹ. $x \to 1-0$이면 $f(x) \to 1$이다.

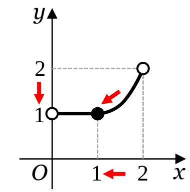
[풀이]ㄱ. $x \to 2-0$일 때 $f(x) \to 2$
$x \to 2+0$일 때 $f(x) \to 2$
이므로 좌극한값과 우극한값이 모두 2이다. 따라서 $\lim_{x\to2} f(x)=2$ (참)

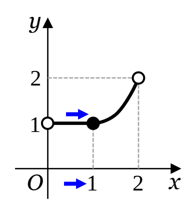




ㄴ. $x \to -0$일 때 $f(x)$의 값은 0보다 작은 쪽에서 0으로 다가가므로 $f(x) \to -0$ (참)

ㄷ. $x \to 1+0$일 때 $f(x)$의 값은 1보다 큰 쪽에서 1으로 다가가므로 $f(x) \to 1+0$ (참)





ㄹ. $0<x<1$의 범위에서 $f(x)=1$이므로 $x \to 1-0$일 때 $f(x)$의 값은 1로 다가가는 것이 아니라 1과 같다. (거짓)

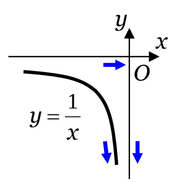
☆ 위 [예제]2의 ㄷ에서는 x값이 1로 다가가는 방향 뿐만 아니라 $f(x)$값이 1로 다가가는 방향까지 따졌다. 이는 합성함수의 극한값을 계산할 때 반드시 고려해야 하는 사항으로 $p.16$에서 공부하게 될 것이다.

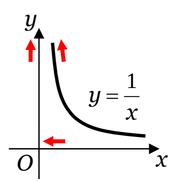
• 좌극한값과 우극한값 − 유형①
분수함수는 (분모)$\to 0$일 때 주의한다.

☆ 함수식이 분수꼴인 극한 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$에서 (분모)$\to 0$이면 -0인지, $+0$인지에 따라 좌극한값과 우극한값의 부호가 다를 수 있다.

☆ 이런 문제를 풀기 위해서는 $p.2$에서 배웠던 무한대와 무한소의 관계를 이용해서 다음이 성립함을 알아두는 것이 좋다.

$x\to -0$이면 $\frac{1}{x}\to -\infty$　　**$x\to +0$이면 $\frac{1}{x}\to \infty$**





이를 $\frac{1}{-0}=-\infty$, $\frac{1}{+0}=\infty$로 기억해두자.

[예] $\lim_{x\to 1+0}\frac{2}{1-x}$의 계산

$x\to 1+0$이면 $-x\to -1-0$

$1-x\to -0$

$\frac{2}{1-x}\to\frac{2}{-0}=-\infty$

$\therefore \lim_{x\to 1+0}\frac{2}{1-x}=-\infty$

$\to$로 표현된 식도 등식처럼 양변에 같은 수를 더해도 되고, 빼도 되고, $(-)$ 부호를 곱해도 된다.

[예제]3. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 1-0}\frac{2}{x-1}$　(2) $\lim_{x\to -2}\frac{3}{x+2}$　(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$　(4) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}$

[풀이](1) $x\to 1-0$이면

$x-1\to -0$, $\frac{2}{x-1}\to\frac{2}{-0}=-\infty$

$\therefore \lim_{x\to 1-0}\frac{2}{x-1}=-\infty$

(2) (분모)$\to 0$이므로 좌극한값과 우극한값을 따로따로 계산해본다.

$\underline{x\to -2-0}$이면

$x+2\to -0$, $\frac{3}{x+2}\to\frac{3}{-0}=-\infty$

$\therefore \lim_{x\to -2-0}\frac{3}{x+2}=-\infty$

$\underline{x\to -2+0}$이면

$x+2\to +0$, $\frac{3}{x+2}\to\frac{3}{+0}=\infty$

$\therefore \lim_{x\to -2+0}\frac{3}{x+2}=\infty$

따라서 $\lim_{x\to -2}\frac{3}{x+2}$의 값은 존재하지 않는다.

(3) $x\to 0$일 때

$x^2\to +0$

$\frac{1}{x^2}\to\frac{1}{+0}=\infty$

따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$

(4) $x\to 1$일 때

$x-1\to 0$

$|x-1|\to +0$

$\frac{1}{|x-1|}\to\frac{1}{+0}=\infty$

따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=\infty$

☆ [예제]3의 (3), (4)는 x값이 다가가는 방향에 관계없이 (분모)$\to +0$이므로 좌극한값, 우극한값을 따로 조사할 필요가 없다.

• 좌극한값과 우극한값 – 유형②
절댓값 기호를 포함한 함수는 $(|\quad|$ 안의 식$)\to 0$일 때 주의한다.

☆ $x \to a$일 때 $x-a \to 0$이므로 $x-a$는 양수일 수도, 음수일 수도 있다. 이때, $|x-a|$를 포함하는 함수의 극한값을 계산하려면 절댓값의 처리를 위해 $x \to a-0$일 때와 $x \to a+0$일 때로 나눠야 한다.

▷ $\boldsymbol{x \to a-0}$이면 $x-a<0$이므로
$\boldsymbol{|x-a|=-x+a}$

▷ $\boldsymbol{x \to a+0}$이면 $x-a>0$이므로
$\boldsymbol{|x-a|=x-a}$

[예제] 4. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}+\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{x-1}-\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{x-1}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+x|-2}{x-1}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{|x^2+3x|-2}{x+1}$

[풀이] (1) $x \to -0$이면 $x<0$이므로

$$\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{-x}{x}=-1$$

$x \to -0$이면 $x<0$이므로

$$\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{x}{x}=1$$

따라서 주어진 식의 값은 0

(2) $x \to 1-0$이면 $x-1<0$이므로

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

$x \to 1+0$이면 $x-1>0$이므로

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x-1}=1$$

따라서 주어진 식의 값은 -2

(3) $x \to 1-0$이면 $x-1<0$이므로

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{-(x-1)}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{(-1)}{x}=-1$$

$x \to 1+0$이면 $x-1>0$이므로

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x}=1$$

좌극한값과 우극한값이 다르므로 극한값은 없다.

(4) $x \to 1$이면 $x^2+x \to 2>0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

(5) $x \to -1$이면 $x^2+3x \to -2<0$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x^2+3x|-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-(x^2+3x)-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)(x+2)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\{-(x+2)\}=-1$$

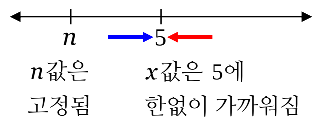
[예제] 5. 다음 식을 만족하는 자연수 n의 값을 모두 구하여라.

$$\lim_{x\to 5}\frac{|x-n|-|n-5|}{x-5}=1$$

[풀이] 절댓값 기호를 포함한 식 $|x-n|$, $|n-5|$의 계산을 위해서는 5를 기준으로 n값의 범위를 나눠야 한다.

$i)$ $n<5$일 때

x는 5에 한없이 다가가는 수, n은 5보다 작은 실수이므로 $x>n$이다.



따라서 주어진 식의 좌변은

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-n)+(n-5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x-5}=1$$

이 되어 항상 성립하며, 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4이다.

$ii)$ $n=5$일 때

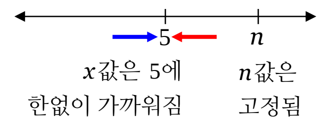
주어진 식의 좌변은 $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$이며, 좌극한값과 우극한값이 각각

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{-(x-5)}{x-5}=-1,\ \lim_{x\to 5+0}\frac{x-5}{x-5}=1$$

이 되어 일치하지 않으므로 주어진 식은 성립하지 않는다.

$iii)$ $n>5$일 때

x는 5에 한없이 다가가는 수, n은 5보다 큰 실수이므로 $x<n$이다.



따라서 주어진 식의 좌변은

$$\lim_{x\to 5}\frac{-(x-n)-(n-5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-x+5}{x-5}$$
$$=-1$$

이 되어 성립하지 않는다.

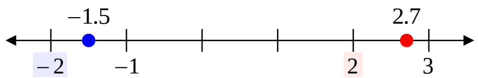
$i)$~$iii)$으로부터 주어진 식을 만족하는 자연수 n값은 1, 2, 3, 4이다.

• 좌극한값과 우극한값 – 유형③
가우스 기호를 포함한 함수는 ([ ] 안의 식) → (정수)일 때 주의한다.

☆ 가우스 기호

▹ $[x]$의 의미: 실수 x를 넘지 않는(같거나 작은) 최대의 정수

[예]



$[-1.5]=-2$ $\qquad$ $[2.7]=2$

▹ $[x]$의 수학적 정의: n이 정수, $n \le x < n+1$이면 $[x]=n$

연속인 두 정수

▹ $[x]$의 성질: [ ] 안에 정수의 합·차가 있으면 밖으로 꺼낼 수 있다.

$$[x \pm k]=[x]\pm k \quad \left(\begin{array}{l}\text{단, 복부호동순에} \\ x\text{는 실수, } k\text{는 정수다.}\end{array}\right)$$

$\because$ n이 정수, $n \le x < n+1$이라고 가정하면 $[x]=n$이다.

또한

$n+k \le x+k < (n+k)+1$ $\qquad$ $n-k \le x-k < (n-k)+1$

이므로

$[x+k]=n+k$ $\qquad$ $[x-k]=n-k$

$[x+k]=[x]+k$ $\qquad$ $[x-k]=[x]-k$

☆ 가우스 기호를 포함한 극한의 계산

(1) n이 정수이고 $x \to n$일 때, $[x]$의 값은 둘로 나뉜다.

▹ $x \to n-0$일 때 $[x]=n-1$ $\quad$ $\because n-1 < x < n$

▹ $x \to n+0$일 때 $[x]=n$ $\quad$ $\because n < x < n+1$

따라서 $\lim\limits_{x \to n} f(x)$에서 $f(x)$가 $[x]$를 포함하고 있으면 좌극한값과 우극한값을 따로 구해서 비교해야 한다.

(2) $x \to \infty$일 때 $[x]$를 포함하는 함수의 극한 계산은 다음을 이용한다.

▹ x가 실수이면, $x=[x]+\alpha$ (단, $0 \le \alpha < 1$)

[예제]6. 다음 극한값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

(1) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{x}{[x]}$ $\qquad$ (2) $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x-[x]}{x-2}$ $\qquad$ (3) $\lim\limits_{x \to 2-0} [1-x]$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[x]}{x+1}$ $\qquad$ (5) $\lim\limits_{x \to 1} \left[(x-1)^2\right]$

[풀이](1) $x \to -0$이면 $-1 < x < 0$ 이므로 $[x]=-1$이다. 따라서

$$\lim_{x \to -0} \frac{x}{[x]} = \lim_{x \to -0} \frac{x}{(-1)} = 0$$

(2) $x \to 2+0$이면 $2 < x < 3$이므로 $[x]=2$이다. 따라서

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x-[x]}{x-2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

(3) $x \to 2-0$이면 $-x \to -2+0$

$1-x \to -1+0$

이므로 $-1 < 1-x < 0$이고,

$[1-x]=-1$

$\lim\limits_{x \to 2-0} [1-x]=-1$

(4) $x \to -0$이면 $-1 < x < 0$이고 $[x]=-1$

$x \to +0$이면 $0 < x < 1$이고 $[x]=0$

$$\lim_{x \to -0} \frac{[x]}{x+1} = \lim_{x \to -0} \frac{(-1)}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{[x]}{x+1} = \lim_{x \to -0} \frac{0}{x+1} = 0$$

따라서 극한값은 없다.

(5) $x \to 1$이면 $(x-1)^2 \to +0$이므로

$0 < (x-1)^2 < 1$

$\left[(x-1)^2\right]=0$

$\lim\limits_{x \to 1} \left[(x-1)^2\right]=0$

[예제]7. 다음 극한값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[x^2+x]-x^2}{x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x-2}\left[\frac{x+1}{3}\right]$

[풀이](1) x^2+x의 정수부분이 $[x^2+x]$이므로 소수부분을 α라 하면

$x^2+x=[x^2+x]+\alpha$ (단, $0\le\alpha<1$)

$[x^2+x]=x^2+x-\alpha$

가 성립하며, 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x-\alpha)-x^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\alpha}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cancelto{0}{\frac{\alpha}{x}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}=1$$

(2) $\dfrac{x+1}{3}=\left[\dfrac{x+1}{3}\right]+\alpha$ (단, $0\le\alpha<1$)

$\left[\dfrac{x+1}{3}\right]=\dfrac{x+1}{3}-\alpha$

를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x-2}\left(\frac{x+1}{3}-\alpha\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{2(x+1)}{x-2}-\cancelto{0}{\frac{6\alpha}{x-2}}\right\}=2$$

☆ $x\to\infty$이면 α를 무시할 수 있으며, $x^2+x\fallingdotseq[x^2+x]$, $\dfrac{x+1}{3}\fallingdotseq\left[\dfrac{x+1}{3}\right]$로 보고 다음과 같이 풀어도 된다. (단, $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴에서만 가능)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[x^2+x]-x^2}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x-2}\left[\frac{x+1}{3}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x-2}\times\frac{x+1}{3}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{x-2}=2$

[예제]8. $\displaystyle\lim_{x\to n}\frac{[x]^2+2x}{3[x]}$의 값이 존재하도록 하는 정수 n의 값을 구하여라.

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

[풀이] $x\to n-0$이면 $n-1<x<n$이므로 $[x]=n-1$

$x\to n+0$이면 $n<x<n+1$이므로 $[x]=n$

이므로 좌극한값과 우극한값은

$$\lim_{x\to n-0}\frac{[x]^2+2x}{3[x]}=\lim_{x\to n-0}\frac{(n-1)^2+2x}{3(n-1)}=\frac{(n-1)^2+2n}{3(n-1)}=\frac{n^2+1}{3(n-1)}$$

$$\lim_{x\to n+0}\frac{[x]^2+2x}{3[x]}=\lim_{x\to n-0}\frac{n^2+2x}{3n}=\frac{n^2+2n}{3n}=\frac{n+2}{3}$$

이 된다.

이때, 주어진 식의 값이 존재하려면 좌극한값과 우극한값이 같아야 하므로

$\dfrac{n^2+1}{3(n-1)}=\dfrac{n+2}{3}$

$n^2+1=n^2+n-2$

$n=3$

• 좌극한값과 우극한값 – 유형④
합성함수 $g(f(x))$의 극한은 $f(x)$값이 변하는 방향에 주의한다.

☆ 합성함수의 극한 $\lim_{x\to a} g(f(x))$는 다음과 같이 계산한다.
$x \to a$일 때 $f(x)$의 극한을 찾고, 그 결과로 $g(f(x))$의 극한을 찾는다.

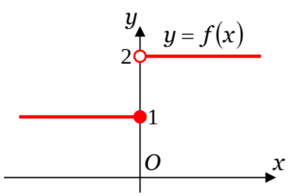
▹ $f(x)\to b$일 때 $g(f(x))$의 극한은
$x\to b$일 때 $g(x)$의 극한과 같다.

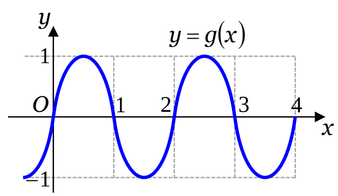
▹ 이때, $f(x)$가 b로 다가가는 방향이
$f(x)\to b-0$, $f(x)\to b+0$, $f(x)=b$
중 어느 것인지 구별해야 한다.

[예제]9. 다음은 두 함수 $f(x)=\begin{cases} 2 & (x>0) \\ 1 & (x\le 0)\end{cases}$, $g(x)=\sin \pi x$에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $\lim_{x\to +0} f(g(x))=\lim_{x\to -0} f(g(x))$	ㄴ. $\lim_{x\to +0} g(f(x))=\lim_{x\to -0} g(f(x))$
ㄷ. $\lim_{x\to 2} f(g(x))=\lim_{x\to 2} g(f(x))$	

[풀이]먼저 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.





ㄱ. $x\to +0$일 때 $g(x)\to +0$이고, $f(g(x))=2$이므로 $\lim_{x\to +0} f(g(x))=2$
$x\to +0$일 때 $f(x)=2$이기 때문

$x\to -0$일 때 $g(x)\to -0$이고, $f(g(x))=1$이므로 $\lim_{x\to -0} f(g(x))=1$
$x\to -0$일 때 $f(x)=1$이기 때문

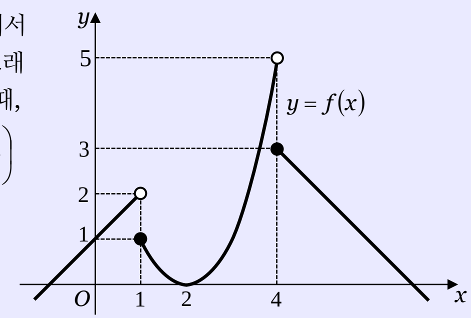
$\therefore \lim_{x\to +0} f(g(x))\ne \lim_{x\to -0} f(g(x))$ (거짓)

등호에 유의

ㄴ. $x\to +0$일 때 $f(x)=2$이고, $g(f(x))=g(2)=0$이므로 $\lim_{x\to +0} g(f(x))=0$
$x\to -0$일 때 $f(x)=1$이고, $g(f(x))=g(1)=0$이므로 $\lim_{x\to -0} g(f(x))=0$
$\therefore \lim_{x\to +0} f(g(x))=\lim_{x\to -0} f(g(x))$ (참)

ㄷ. $x\to 2-0$일 때 $g(x)\to -0$이고, $f(g(x))=1$이므로 $\lim_{x\to 2-0} f(g(x))=1$
$x\to 2+0$일 때 $g(x)\to +0$이고, $f(g(x))=2$이므로 $\lim_{x\to -0} g(f(x))=2$
$\therefore \lim_{x\to 2} f(g(x))$의 값이 존재하지 않는다. (거짓)

평가원 [예제]10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때,
$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to -\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$$
의 값을 구하여라.



☆ $t\to\infty$일 때 $\dfrac{t-1}{t+1}$값과 $t\to -\infty$일 때 $\dfrac{4t-1}{t+1}$값은 상수가 아니라 일정한 수로 한없이 다가가는 상태이므로 합성함수의 극한처럼 $\dfrac{t-1}{t+1}$, $\dfrac{4t-1}{t+1}$의 값이 변하는 방향을 고려해야 한다.

[풀이] $\dfrac{t-1}{t+1}=\dfrac{(t+1)-2}{t+1}=1-\dfrac{2}{t+1}$이므로

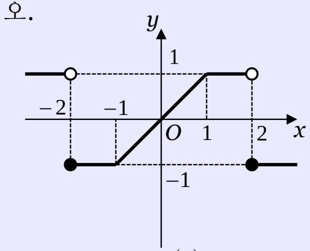
$t\to\infty$이면 $\dfrac{2}{t+1}\to +0$, $\dfrac{t-1}{t+1}\to 1-0$이고 $f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)\to 2$

$\dfrac{4t-1}{t+1}=\dfrac{(t+1)\times 4-5}{t+1}=4-\dfrac{5}{t+1}$이므로

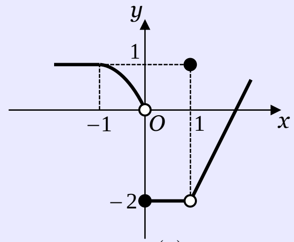
$t\to -\infty$이면 $\dfrac{5}{t+1}\to -0$, $\dfrac{4t-1}{t+1}\to 4+0$이고 $f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)\to 3$

이다. 따라서 $\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to -\infty} f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$

평가원 [예제]11. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프 일부가 다음 그림과 같고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$일 때, 아래에서 옳은 것을 모두 고르시오.



$y=f(x)$



$y=g(x)$

ㄱ. $\lim_{x\to0} g(f(x))=-2$ ㄴ. $\lim_{x\to2} g(f(x))=1$ ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4} g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)=-2$

[풀이] ㄱ. $x\to-0$일 때 $f(x)\to-0$이고, $g(f(x))\to0$이므로 $\lim_{x\to-0} g(f(x))=0$

$x\to+0$일 때 $f(x)\to+0$이고, $g(f(x))=-2$이므로 $\lim_{x\to+0} g(f(x))=-2$

$\therefore \lim_{x\to0} g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $x\to2-0$일 때 $f(x)=1$이고, $g(f(x))=g(1)=1$이므로 $\lim_{x\to2-0} g(f(x))=1$

$x\to2+0$일 때 $f(x)=-1$이고, $g(f(x))=g(-1)=1$이므로 $\lim_{x\to2+0} g(f(x))=1$

$\therefore \lim_{x\to2} g(f(x))=1$ (참)

ㄷ. 먼저 Σ부분을 풀어쓰면

$$\sum_{k=1}^{4} g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(4+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(6+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(8+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(0+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(0+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=2g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)+2g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$f(x+4)=f(x)$에 의해 $f(x)$는 주기함수이며, x값이 4의 배수만큼 커지거나 작아지면 함숫값이 같음

이다. 또한 $x\to\infty$일 때

$\frac{1}{x}\to+0$이므로 $f\left(\frac{1}{x}\right)\to+0$, $g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-2$

$2+\frac{1}{x}\to2+0$이므로 $f\left(2+\frac{1}{x}\right)=-1$, $g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)=1$

이며, 주어진 식의 값은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4} g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left\{2g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)+2g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)\right\}$$
$$=2\times(-2)+2\times1=-2 \text{ (참)}$$

수열의 극한과 마찬가지로 함수의 극한에서도 다음의 성질들이 성립한다.

함수의 극한의 성질

• 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 수렴하고, $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$일 때

(1) $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$)

☆ 위 성질들은 $x\to a$일 때 뿐만 아니라 $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때도 똑같이 성립한다.

☆ 위 성질들에 대한 증명은 고등학교 교육 과정에서 다루지 않기 때문에 당연히 성립하는 것으로 받아들이면 된다.

☆ 위 성질들을 이용하면 다항함수 $f(x)$에 대하여 $x\to a$일 때 $f(x)\to f(a)$, 즉 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$임을 보일 수 있다.

① 함수 $y=x$는 그래프 위의 모든 점에서 x좌표, y좌표가 일치하므로 $x\to a$일 때, $y\to a$, 즉 $\lim_{x\to a} x=a$이다.

또한 성질 (4)에 의해

$$\lim_{x\to a} x^2=\lim_{x\to a}(x\times x)=\lim_{x\to a} x\times\lim_{x\to a} x=a\times a=a^2$$
$$\lim_{x\to a} x^3=\lim_{x\to a}(x^2\times x)=\lim_{x\to a} x^2\times\lim_{x\to a} x=a^2\times a=a^3$$
$$\vdots$$
$$\lim_{x\to a} x^n=\lim_{x\to a}(x^{n-1}\times x)=\lim_{x\to a} x^{n-1}\times\lim_{x\to a} x=a^{n-1}\times a=a^n$$

가 성립하므로 $\lim_{x\to a} x^n=a^n$이다. (단, n은 자연수)

② 다항함수 $f(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+p_{n-2}x^{n-2}+\cdots+p_1x+p_0$에서 $x\to a$일 때의 극한값 계산에 성질 (1), (2)와 ①을 적용하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)&=\lim_{x\to a}(p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+p_{n-2}x^{n-2}+\cdots+p_1x+p_0)\\&=\lim_{x\to a} p_nx^n+\lim_{x\to a} p_{n-1}x^{n-1}+\lim_{x\to a} p_{n-2}x^{n-2}+\\&\qquad\cdots+\lim_{x\to a} p_1x+\lim_{x\to a} p_0\\&=p_n\lim_{x\to a} x^n+p_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1}+p_{n-2}\lim_{x\to a} x^{n-2}+\\&\qquad\cdots+p_1\lim_{x\to a} x+p_0\\&=p_na^n+p_{n-1}a^{n-1}+p_{n-2}a^{n-2}+\cdots+p_1a+p_0\\&=f(a)\end{aligned}$$

가 성립하므로 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이다.

따라서 다항함수 $f(x)$의 극한 계산은 다음과 같이 대입으로 시작하면 된다.

다항함수의 극한 계산

• 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(2) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

함수식에 $x=a$를 대입하면 극한값이 나타나고, 분모가 0인 경우에는 $p.5$나 $p.12$의 방법을 적용한다.

[예] $\lim_{x\to 2} 4x=4\times 2=8$ $\lim_{x\to 2}(4x+1)=4\times 2+1=9$

$\lim_{x\to 2} x^2=2^2=4$ $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2}{4x+1}=\dfrac{3^2}{4\cdot 3+1}=\dfrac{9}{13}$

[예제]1. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=0$을 만족할 때, 아래에서 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$가 수렴하면 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$이다.
ㄴ. $\lim_{x\to a}f(x)$가 수렴하면 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$이다.
ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$이다.

[풀이]ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$가 모두 수렴하므로

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=0$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)\ (\text{참})$$

ㄴ. $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$가 모두 수렴하므로

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}[f(x)-\{f(x)-g(x)\}]$$
$$=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\ (\text{참})$$

확장

☆ 여기서 다음과 같은 명제를 얻을 수 있다.
(2)(3)−1. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}$가 수렴하고, $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$ 가운데 하나가 수렴하면 나머지도 수렴한다.

ㄷ. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이면

$$\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to 0}x=0$$

이지만, $\lim_{x\to 0}f(x)$와 $\lim_{x\to 0}g(x)$의 극한값이 존재하지 않으므로

$$\lim_{x\to 0}f(x)\neq\lim_{x\to 0}g(x)\ (\text{거짓})$$

☆ $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$이려면
① $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$가 모두 수렴하고
② 극한값이 같아야 한다.

수능

[예제]2. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\dfrac{8(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=1$ 일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

[풀이] $\dfrac{0}{0}$꼴이므로 인수분해 후 약분한다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{8(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{8(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{8(x^2+1)}{f(x)}=\frac{16}{f(1)}=1$$

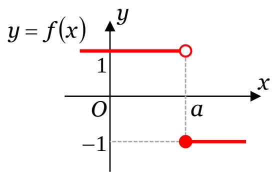
따라서 $f(1)=16$

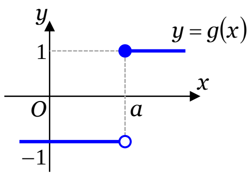
$f(x)$가 다항식이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이다.

[예제]3. 모든 실수의 집합을 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 아래에서 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 또는 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$의 값이 존재한다.
ㄴ. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$의 값이 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값도 존재한다.
ㄷ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}(f\circ f)(x)$의 값도 존재한다.

[풀이]ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.





이때 $f(x)+g(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하지만, $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$는 둘 다 좌극한값과 우극한값이 일치하지 않으므로 값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$를 ㄱ의 $f(x)$와 똑같이 정의하면 $|f(x)|=1$이므로 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$의 값이 존재한다. 하지만 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$는 좌극한값 1과 우극한값 -1이 일치하지 않으므로 값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$라 하면 $\lim\limits_{x\to a}(f\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(f(x))=\lim\limits_{x\to b}f(x)$이다. 그런데 $x\to b$일 때 $f(x)$의 극한값은 존재할 수도, 존재하지 않을 수도 있기 때문에 $\lim\limits_{x\to a}(f\circ f)(x)$의 값이 반드시 존재한다고 할 수 없다. (거짓)

[예제]4. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)g(x)=xg(x)-x,\ \lim_{x\to 0}g(x)=1$$

을 만족할 때, 아래에서 극한값이 존재하는 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$　　ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$　　ㄷ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x+f(x)}$

☆ $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$은 $x\to 0$일 때 $g(x)\to 1$을 의미하기 때문에 이 조건만으로는 $g(0)=1$이 성립하는지는 알 수 없음에 주의한다.

[풀이]ㄱ. $x\to 0$일 때는 $x\neq 0$이므로, $f(x)g(x)=xg(x)-x$의 양변을 x로 나눠서 $\dfrac{f(x)}{x}$꼴을 만들고, $\lim\limits_{x\to 0}$을 잡으면 다음과 같다.

$$\frac{f(x)}{x}\times g(x)=g(x)-1$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x}\times g(x)\right\}=\lim_{x\to 0}\{g(x)-1\}=0$$

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\left\{\frac{f(x)}{x}\times g(x)\right\}\times\frac{1}{g(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x}\times g(x)\right\}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)}$$
$$=0\times 1=0\ (\text{존재함})$$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{f(x)}{x}\times x\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\times\lim\limits_{x\to 0}x=0\times 0=0$ (존재함)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x+f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{1+\dfrac{f(x)}{x}}=\dfrac{0+0}{1+0}=0$ (존재함)

함수의 극한과 부등식

• 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$를 만족할 때, a에 충분히 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $\boldsymbol{f(x)\le g(x)}$**이면** $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)}$

(2) $\boldsymbol{f(x)< g(x)}$**이면** $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)}$

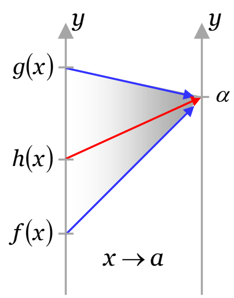
등호가 없어도

극한에서는
등호가 나타남

• 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 충분히 가까운 모든 실수 x에 대하여

(3) $\boldsymbol{f(x)\le h(x)\le g(x)}$**이고,** $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\alpha}$**이면**

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} h(x)=\alpha}$$



아래 위의 함수가 α로 수렴하므로
대소 관계를 만족하기 위해서는
가운데의 함수도 α로 수렴해야 한다.

[예제]5. $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{2\pi}{x}$의 값을 구하여라.

[풀이] $x\ne 0$일 때 $x^2>0$이므로

$$-1\le \sin\frac{2\pi}{x}\le 1$$

$$-x^2\le x^2\sin\frac{2\pi}{x}\le x^2$$

그런데 $\lim_{x\to 0}(-x^2)=\lim_{x\to 0} x^2=0$이므로

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{2\pi}{x}=0$$

[예제]6. 모든 양의 실수의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{1}{3x+1}<xf(x)<\frac{1}{\sqrt{9x^2+x}}$가 항상 성립할 때, $\lim_{x\to\infty}(x^2-x+2)f(x)$의 값을 구하여라.

[풀이] 극한값을 구해야 하는 함수 $(x^2-x+2)f(x)$의 범위를 파악하기 위해 주어진 부등식의 각 변에 $\frac{x^2-x+2}{x}$를 곱한다.

$$\frac{x^2-x+2}{x(3x+1)}<(x^2-x+2)f(x)<\frac{x^2-x+2}{x\sqrt{9x^2+x}}$$

$x\to\infty$일 때 좌우에 있는 부등식의 극한값이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{x(3x+1)}=\frac{1}{3},\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{x\sqrt{9x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{x\times 3x}=\frac{1}{3}$$

$\frac{\infty}{\infty}$꼴에서 $\sqrt{9x^2+x}\fallingdotseq\sqrt{9x^2}=3x$

이므로, 주어진 부등식의 극한값은

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x+2)f(x)=\frac{1}{3}$$

• **함수의 극한의 성질–유형①**
치환으로 수렴·발산이 불명확한 함수를 명확한 함수로 나타낼 수 있다.

[예제]7. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=4$를 만족할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+g(x)}{f(x)-2g(x)}$의 값을 구하여라.

[풀이1] $x\to\infty$일 때 $f(x)$는 발산하지만, $g(x)$의 수렴·발산 여부는 알 수 없기 때문에 치환으로 접근해본다.

$2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=4,\ g(x)=\frac{2f(x)-h(x)}{3}$$

이다. 따라서 주어진 식의 극한값은 다음과 같이 계산된다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+g(x)}{f(x)-2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+\frac{2f(x)-h(x)}{3}}{f(x)-2\times\frac{2f(x)-h(x)}{3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8}{3}f(x)-\frac{1}{3}h(x)}{-\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{h(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{h(x)}{f(x)}}=\frac{\frac{8}{3}}{-\frac{1}{3}}=-8$$

0
0

$\frac{\infty}{\infty}$꼴이므로 분모에서 큰 쪽인 $f(x)$로 분모·분자를 나눈다.

[풀이2] 함수 $f(x)$, $2f(x)-3g(x)$의 극한만 주어져 있기 때문에 주어진 함수 $\frac{2f(x)+g(x)}{f(x)-2g(x)}$를 $f(x)$, $2f(x)-3g(x)$에 대한 식으로 바꾼다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+g(x)}{f(x)-2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\{2f(x)-3g(x)\}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{8}{3}f(x)}{\{2f(x)-3g(x)\}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{3}f(x)}=-8$$

뒷부분에 $g(x)$가 생기지 않도록 $g(x)$에 맞춰 상수를 곱함

$\frac{-\frac{4}{3}+\infty}{\frac{8}{3}-\infty}$꼴이므로 $f(x)$의 계수비가 극한값

새로운 개념을 배우고 나면 꼭 따라붙는 미정계수 문제! 물론 함수의 극한이라고 해서 예외가 될 수는 없다. 함수 극한의 미정계수 문제에 올바르게 접근하기 위해서는 다음의 개념들부터 제대로 이해해야 한다.

분수꼴로 표현된 함수의 수렴 조건

• 다항함수 또는 무리함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha \text{일 때}$$

(1) $\lim_{x\to a} g(x)=0$**이면** $\lim_{x\to a} f(x)=0$**이다.**

$$\because \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}$$
$$=\left\{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\right\}\times\lim_{x\to a} g(x)$$
$$=\alpha\times 0=0$$

(2) $\lim_{x\to a} f(x)=0$**이면** $\lim_{x\to a} g(x)=0$**이다.** (단, $\alpha\neq 0$)

$$\because \frac{f(x)}{g(x)}=h(x)\text{라 하면 } \lim_{x\to a} h(x)=\alpha$$
$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} h(x)}$$
$$=\frac{0}{\alpha}=0$$

☆ 위 명제를 풀어서 말하면 다음과 같다.

(1) $\dfrac{(\text{분자})}{(\text{분모})}$꼴이 수렴할 때, (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이다.

(2) $\dfrac{(\text{분자})}{(\text{분모})}$꼴이 0아닌 수로 수렴할 때, (분자)$\to 0$이면 (분모)$\to 0$이다.

조금만 생각해 보면 이건 당연한 얘기다. 왜냐?

(1) $\dfrac{\square}{0}$꼴은 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{k}{0}$, $\dfrac{\infty}{0}$ 중 하나고, 수렴할 수 있는 것은 $\dfrac{0}{0}$뿐이니까~

(2) $\dfrac{0}{\square}$꼴은 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{0}{k}$, $\dfrac{0}{\infty}$ 중 하나고, 0 아닌 값으로 수렴할 수 있는 것은 $\dfrac{0}{0}$뿐이거든~

• 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$**이면** (단, $\alpha\neq 0$)

$f(x)$, $g(x)$**는 차수가 같고, 최고차항의 계수비가** α**이다.**

☆ $p.5$에서 공부했듯이 $f(x)$, $g(x)$가 다항함수일 때 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 극한은

① (분자의 차수) > (분모의 차수)이면, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ 또는 $-\infty$

② (분자의 차수) < (분모의 차수)이면, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

③ (분자의 차수) = (분모의 차수)이면, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left(\begin{array}{c} f(x),\ g(x)\text{의} \\ \text{최고차항 계수비}\end{array}\right)$

세 가지가 있으며, 이 가운데 0아닌 값으로 수렴하는 것은 ③뿐이다.

[예제]1. 다음 식을 만족하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}=2$ (2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+2}{3x-1}=-2$

[풀이] (1) 좌변이 수렴, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$$
$$b=-2a-4$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+a+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+a+2}{x+2}=\frac{a+4}{4}=2$$

그러므로 $a=4$, $b=-12$이다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴이 0아닌 값으로 수렴하려면 좌변에서 분모, 분자의 차수가 일치해야 하므로

$$a=0$$

따라서 주어진 식은 다음과 같이 계산된다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx+2}{3x-1}=\frac{b}{3}=-2$$
$$b=-6$$

수능 [예제] 2. $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\frac{1}{3}$이 성립하게 하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

[풀이] 좌변이 0 아닌 값으로 수렴하고, (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이다. 따라서

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$$

$$b=-a-1$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+a+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3}$$

그러므로 $a=1$, $b=-2$이다.

수능 [예제] 3. 두 상수 a, b가 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하여라.

[풀이] 좌변이 수렴하고, (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이다. 따라서

$$\lim_{x\to2}(x^2-b)=4-b=0$$

$$b=4$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-a)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-a}{x+2}=\frac{2-a}{4}=3$$

그러므로 $a=-10$

평가원 [예제] 4. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$일 때, ab의 값을 구하여라.

[풀이] 좌변이 수렴하고, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to$이다. 따라서

$$\lim_{x\to1}(ax+b)=a+b=0$$

$$b=-a$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{ax-a}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to1}\frac{(ax-a)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{x-1}=\lim_{x\to1}a(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})$$

$$=2\sqrt{2}a=2\sqrt{2}$$

그러므로 $a=1$, $b=-1$

평가원 [예제] 5. 다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값을 구하여라.

[풀이] $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$가 수렴하고, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다. 따라서

$$\lim_{x\to1}\{g(x)-2x\}=0$$

$$g(1)-2=0$$

$$g(1)=2$$

또한

$$f(x)=(x-1)g(x)-(x-1)=(x-1)\{g(x)-1\}$$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\{g(x)-1\}g(x)}{x+1}=\frac{\{g(1)-1\}g(1)}{2}=1$$

• 함수의 극한과 미정계수 – 유형①

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$에서 $f(x)$, $g(x)$의 차수와 최고차항 계수를 알 수 있다.

☆ $f(x)$, $g(x)$가 다항함수일 때 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$의 극한은

① (분자의 차수) > (분모의 차수)이면, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ 또는 $-\infty$

② (분자의 차수) < (분모의 차수)이면, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

③ (분자의 차수) = (분모의 차수)이면, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=$ ($f(x)$, $g(x)$의 최고차항 계수비)

평가원 [예제]6. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

[풀이] $f(x)$가 다항식이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$ 이 성립하려면

(분자의 차수) < (분모의 차수)

$\therefore f(x)$는 2차 이하의 식

또한 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$에서 (분자) $\to 0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

이며, $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

$\therefore f(x)=x(ax+b)$

이를 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{x(ax+b)}{x}=b=5$

이고, $f(x)=x$의 한 근이 -2 이므로

$f(-2)=-2$

$-2(-2a+5)=-2$

$a=2$

이다. 따라서

$f(x)=x(2x+5)$

$f(1)=7$

평가원 [예제]7. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to+0}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$ 을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

[풀이] $x\to+0$이면 $\frac{1}{x}\to\infty$이므로 $\frac{1}{x}=t$로 치환한다.

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^3 f(t)-1}{\left(\frac{1}{t}\right)^3+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=5$$

이때, 분자 $f(t)-t^3$은 이차식, t^2 항의 계수는 5이므로

$f(t)-t^3=5t^2+at+b$

$f(t)=t^3+5t^2+at+b$ ……①

또한 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$에서 (분자) $\to 0$ 이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$

이며, 이를 ①에 적용하면

$f(1)=6+a+b=0$

$b=-a-6$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x^2+ax-a-6}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x+a+6}{x+2}$$
$$=\frac{a+13}{3}=\frac{1}{3}$$

로부터 $a=-12$, $b=6$이 된다. 그러므로

$f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$f(2)=10$

함수의 연속

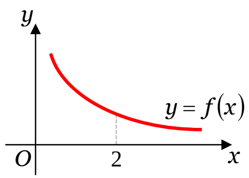
2

이 단원에서는 함수의 기본적인 특성 가운데 하나인 연속성을 공부할 것이다. 연속성이란 함수의 그래프가 하나의 선으로 계속 이어지는지, 아니면 몇 개의 선과 점으로 나뉘면서 끊어진 곳이 있는지에 대한 것이다. 앞에서 배운 함수의 극한을 이용해서 함수의 연속성이 어떻게 정의되는지, 그리고 연속함수가 무엇인지 자세히 알아보자.

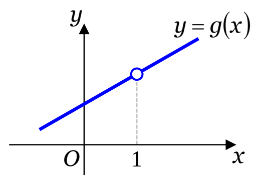
점에서 함수의 연속, 불연속

• 점에서 연속, 불연속의 의미

함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 이어져 있으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속, 끊어져 있으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속



함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속

위에서 말한 연속, 불연속의 의미는 너무나도 당연한 것이다. 그런데 이 의미만으로 함수의 연속성을 판단할 수 있을까? 그래프를 쉽게 그릴 수 있는 함수라면 문제가 없지만, 그렇지 않은 함수라면 연속성의 '연'자도 꺼낼 수 없을 것이다.

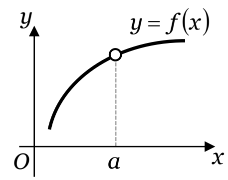
여러 가지 함수의 연속성을 효율적으로 판단하려면 다음과 같은 수학적 정의까지 반드시 알아둬야 한다.

• 점에서 연속이기 위한 필요충분조건

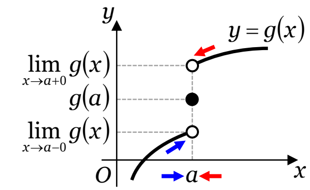
▷ 함수 $f(x)$가 다음의 세 조건을 동시에 만족하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$$\boldsymbol{f(a)=\lim_{x\to a} f(x)} \quad \begin{cases} ① \ x=a\text{에서의 함숫값 } f(a)\text{가 존재하고,} \\ ② \ x=a\text{에서의 극한값 } \lim_{x\to a} f(x)\text{가 존재하며,} \\ ③ \text{ 두 값이 일치한다.} \end{cases}$$

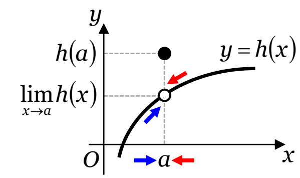
☆ 점에서 연속이기 위한 필요충분조건의 증명은 교육과정에서 다루지 않는다. 그 대신 $x=a$에서 불연속인 함수들이 조건 ①~③ 가운데 어느 것에 어긋나는지 파악해서 간접적으로 이해하도록 하자.



함숫값 $f(a)$가 존재하지 않기 때문에 $x=a$에서 불연속



극한값 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재하지 않기 때문에 $x=a$에서 불연속



함숫값 $h(a)$와 극한값 $\lim_{x\to a} h(x)$가 다르기 때문에 $x=a$에서 불연속

☆ 점에서 연속이기 위한 필요충분조건을 이용하면 함수의 그래프를 그리지 않아도 특정 점에서의 연속성을 판단할 수 있다.

[예제]1. 다음 함수들이 주어진 값에서 연속인지, 불연속인지 조사하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ (2) $g(x)=x[x]$ (3) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & (x\neq 2)\\ 2 & (x=2)\end{cases}$

$x=0$ $x=1$ $x=2$

[풀이](1) 함숫값 $f(0)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$0<x<1$이므로 $[x]=0$

(2) $\lim_{x\to 1-0} g(x)=\lim_{x\to 1-0} x[x]=0$
$\lim_{x\to 1+0} g(x)=\lim_{x\to 1+0} x[x]=\lim_{x\to 1+0} x=1$

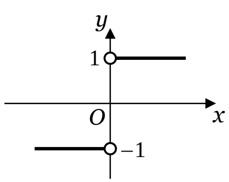
$1<x<2$이므로 $[x]=1$

$\lim_{x\to 1} g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(3) $h(2)=2,\ \lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$이므로 $x=2$에서의 함숫값과 극한값이 일치하지 않는다. 따라서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

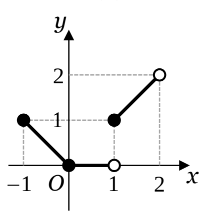
☆ 문제에 주어진 함수들의 그래프를 그려서 조사해도 위 풀이와 같은 결과를 얻을 수 있다.

(1) $y=f(x)$



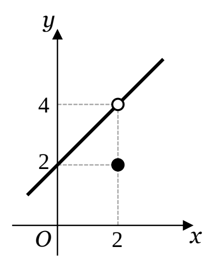
$x=0$에서 불연속

(2) $y=g(x)$



$x=1$에서 불연속

(3) $y=h(x)$



$x=2$에서 불연속

[예제]2. 다음과 같이 정의되는 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속인지, 불연속인지 조사하여라.

$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+\cdots$$

[풀이]함수 $f(x)$는 첫째항이 x^2이고, 공비가 $\dfrac{1}{1+x^2}$인 무한등비급수다.

또한 공비의 범위는

$x^2\geq 0$

$1+x^2\geq 1$

$0<\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이므로 함수식은 다음과 같이 간단해진다.

$x=0$일 때, $f(x)=0$

$x\neq 0$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1+x^2$

함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 연속 여부를 조사하기 위해 함숫값과 극한값을 찾아서 비교하면

$f(0)=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1+x^2)=1$

$f(0)\neq \lim_{x\to 0} f(x)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

[예제]3. 다음과 같이 정의되는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값과 $f(1)$의 값을 구하여라.

$$(x-1)f(x)=3x^2-4x+a$$

[풀이]$x\neq 1$일 때 주어진 식의 양변을 $x-1$로 나눌 수 있으므로

$f(x)=\dfrac{3x^2-4x+a}{x-1}$ (단, $x\neq 1$)

이다. 또한 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 다음과 같이 함숫값과 극한값이 일치해야 한다.

$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+a}{x-1}$

$f(x)$가 수렴하고, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$3-4+a=0$

$a=1$

이며, $f(1)$의 값은

$f(1)=\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{(3x-1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(3x-1)=2$

열린 구간, 닫힌 구간

• 서로 다른 두 수 사이에 존재하는 모든 실수들의 집합을 구간이라 하며, 다음의 기호로 나타낸다. (단, $a<b$이고 R은 실수 전체의 집합)

(1) 닫힌 구간 : 좌우의 경계를 모두 포함하는 구간

$\{x \mid a \le x \le b,\ x \in R\}$ ⇨ 닫힌 구간 $[a,\ b]$

(2) 열린 구간 : 좌우의 경계를 포함하지 않는 구간

$\{x \mid a < x < b,\ x \in R\}$ ⇨ 열린 구간 $(a,\ b)$

(3) 반열린 구간 (반닫힌 구간) : 좌우의 경계 가운데 한쪽만 포함하는 구간

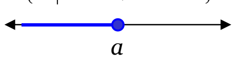
$\{x \mid a \le x < b,\ x \in R\}$ ⇨ 반열린 구간 $[a,\ b)$

$\{x \mid a < x \le b,\ x \in R\}$ ⇨ 반열린 구간 $(a,\ b]$

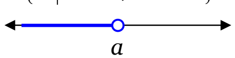
☆ 경계를 포함하는 쪽은 대괄호, 그렇지 않은 쪽은 소괄호를 사용

• ∞ 또는 $-\infty$를 사용하면 다음과 같은 표현도 가능하다.

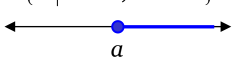
$\{x \mid x \le a,\ x \in R\}$ ⇨ 구간 $(-\infty,\ a]$



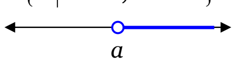
$\{x \mid x < a,\ x \in R\}$ ⇨ 구간 $(-\infty,\ a)$



$\{x \mid x \ge a,\ x \in R\}$ ⇨ 구간 $[a,\ \infty)$



$\{x \mid x > a,\ x \in R\}$ ⇨ 구간 $(a,\ \infty)$



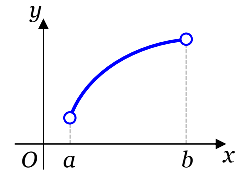
$\{x \mid x$는 모든 실수$\}$ ⇨ 구간 $(-\infty,\ \infty)$

구간에서 함수의 연속, 불연속

• 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 연속, 불연속이기 위한 조건은 다음과 같다.

(1) 열린 구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에 속하는 모든 점에서 연속이면, 함수 $f(x)$는 열린 구간 (a, b)에서 연속이라고 한다.



☆ 달리 말하면 열린 구간 (a, b)에 속하는 임의의 실수 c에 대하여 $f(c)=\lim_{x\to c} f(x)$가 항상 성립한다는 뜻이다.

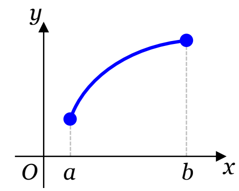
(2) 닫힌 구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 모두 만족하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

① 열린 구간 (a, b)에서 연속

② $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$

③ $\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$



☆ $x=a$에서는 $f(x)$의 좌극한값이 없기 때문에 우극한값과 함숫값이 같으면 연속으로 본다. (②) 또한 $x=b$에서는 $f(x)$의 우극한값이 없기 때문에 좌극한값과 함숫값이 같으면 연속으로 본다. (③)

(3) 구간에서의 불연속

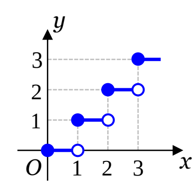
함수 $f(x)$가 구간 I에 속하는 하나 이상의 점에서 불연속이면 함수 $f(x)$는 구간 I에서 불연속이라고 한다.

☆ I는 Interval의 머릿글자이며, 일반적인 구간을 가리키는 기호다.

• 연속함수

함수 $f(x)$가 구간 I에 속하는 모든 점에서 연속이면 함수 $f(x)$는 구간 I에서 연속 또는 구간 I에서 연속함수라고 한다.

[예] 함수 $y=[x]$는
열린 구간 $(1, 2)$에서 연속
반열린 구간 $[1, 2)$에서 연속
반열린 구간 $(1, 2]$에서 불연속
닫힌 구간 $[1, 2]$에서 불연속



[예제]4. 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}$의 그래프를 그리고, 연속인 구간을 구하여라. (단, n은 자연수)

☆ x^n 꼴이 포함된 수열의 극한값을 구하기 위해서는 ±1을 경계로 x의 범위를 나눠야 한다.

[풀이] $i)$ $x>1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=\infty$이므로

$f(x)$는 $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴이며, 분모·분자를

x^{2n} 으로 나누면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{2n}}-x}{\dfrac{2}{x^{2n}}+1}=-x$$

$ii)$ $x=1$일 때 $f(1)=0$

$iii)$ $-1<x<1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}$$

$iv)$ $x=-1$일 때

$$f(-1)=\frac{1-(-1)}{2+1}=\frac{2}{3}$$

$v)$ $x<-1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}|x^{2n}|=\lim\limits_{n\to\infty}|x^{2n+1}|=\infty$이므로

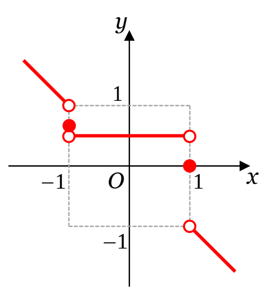
$f(x)$는 $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴이며, 분모·분자를

x^{2n} 으로 나누면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{2n}}-x}{\dfrac{2}{x^{2n}}+1}=-x$$

$i)\sim v)$로부터 함수 $f(x)$의 함수식과 그래프는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}-x & (|x|>1)\\ 0 & (x=1)\\ \dfrac{2}{3} & (x=-1)\\ \dfrac{1}{2} & (|x|<1)\end{cases}$$



따라서 함수 $f(x)$는 세 구간 $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$에서 연속이다.

[예제]5. 실수 x가 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$를 만족할 때, 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos^n x-\sin^n x}{\cos^n x+\sin^n x}$의 그래프를 그리고, 연속인 구간을 구하여라.

☆ $0<\sin x<1$, $0<\cos x<1$이므로 함수식은 $\dfrac{0}{0}$꼴이며, 분모·분자의 공통인수를 만들 수 없기 때문에 $\dfrac{\infty}{\infty}$처럼 $\sin^n x$, $\cos^n x$의 대소를 비교해서 큰 쪽으로 나누는 방법을 써야 한다.

또한 $\sin^n x$, $\cos^n x$의 대소를 비교하기 위해서는 $\sin^n x=\cos^n x$가 성립하는 $x=\dfrac{\pi}{4}$를 경계로 삼는다.

[풀이] $i)$ $0<x<\dfrac{\pi}{4}$일 때,

$\sin^n x<\cos^n x$이므로 분모·분자를 $\cos^n x$로 나누면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^n}{1+\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^n}=1$$

$ii)$ $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때,

$\sin^n x=\cos^n x$이므로 (분자)$=0$, (분모)$\neq0$이다. 따라서

$f(x)=0$

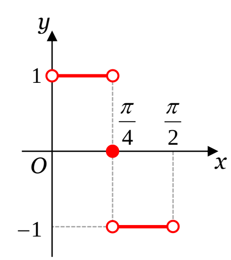
$iii)$ $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때,

$\sin^n x>\cos^n x$이므로 분모·분자를 $\sin^n x$로 나누면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^n-1}{\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^n+1}=-1$$

$i)\sim iii)$으로부터 함수 $f(x)$의 함수식과 그래프는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)\\ 0 & \left(x=\dfrac{\pi}{4}\right)\\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

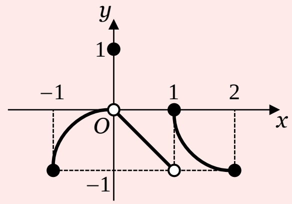


따라서 함수 $f(x)$는 두 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 연속이다.

평가원 [예제] 6. 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽과 같다.
닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2},\ h(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{2}$$

로 정의할 때, 아래에서 옳은 것을 모두 고르시오.

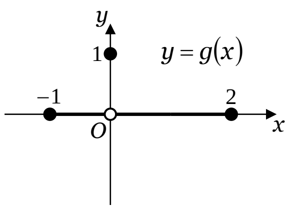


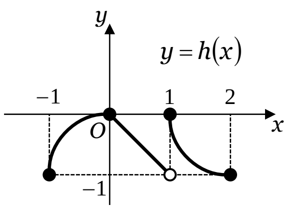
ㄱ. $\lim\limits_{x\to1} h(x)$는 존재한다.
ㄴ. 함수 $(h\circ g)(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 연속이다.
ㄷ. $\lim\limits_{x\to0}(g\circ h)(x)=(g\circ h)(0)$

[풀이] 함수 $g(x)$, $h(x)$의 식을 간단히 하고 그래프를 그리면 다음과 같다.

$f(x)\ge0$일 때 $g(x)=f(x)$
$f(x)<0$일 때 $g(x)=0$

$f(x)\ge0$일 때 $h(x)=0$
$f(x)<0$일 때 $h(x)=f(x)$





ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-0} h(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to1+0} h(x)=0$
이므로 $\lim\limits_{x\to1} h(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $g(x)=\begin{cases}0 & (x\ne0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$ 으로부터
$x\ne0$일 때 $h(g(x))=h(0)=0$
$x=0$일 때 $h(g(x))=h(1)=0$
이다. 따라서
$h(g(x))=0$
이며, 구간 $[-1, 2]$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $x\to0$일 때 $h(x)\to-0$, $g(h(x))=0$
이므로 $\lim\limits_{x\to0}(g\circ h)(x)=0$이다. 따라서
$(g\circ h)(0)=g(h(0))=g(0)=1$
이며, $\lim\limits_{x\to0}(g\circ h)(x)\ne(g\circ h)(0)$이다.
(거짓)

여러 가지 함수의 연속성

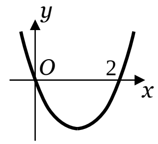
- 고등수학(하)~수학I에서 배웠던 함수들은 정의역을 조사하는 것만으로도 연속인 구간을 쉽게 파악할 수 있다.

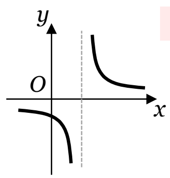
(1) 다항함수

$p.18$ 참고

모든 점에서 (극한값)=(함숫값)이므로 불연속점이 없다.

[예] 함수 $y=x^2-2x$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속





(2) 분수함수

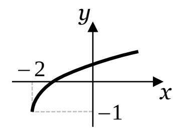
(분모)=0이 되도록 하는 x값에서는 함숫값이 존재하지 않으므로 불연속, 그 외의 점에서는 연속이다.

[예] 함수 $y=\dfrac{2}{x-1}$는 구간 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속

(3) 무리함수

함수식에 $\sqrt{f(x)}$ 꼴이 포함되어 있으면 $f(x)\geq 0$를 만족시키는 모든 x값에서 연속이다.

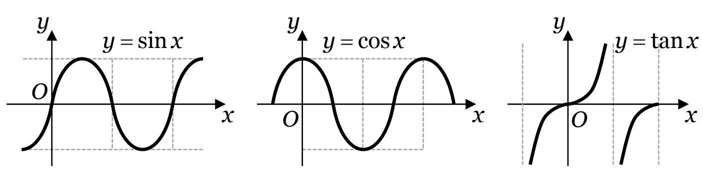
[예] 함수 $y=\sqrt{x+2}-1$은 구간 $[-2, \infty)$에서 연속



(4) 삼각함수

$y=\sin x$, $y=\cos x$는 모든 점에서 연속이다.

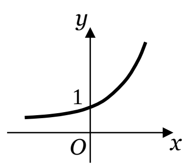
$y=\tan x$는 $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$(단, n은 정수)에서 함숫값이 존재하지 않으므로 불연속, 그 외의 점에서는 연속이다.



(5) 지수함수

모든 점에서 그래프가 이어지므로 불연속점이 없다.

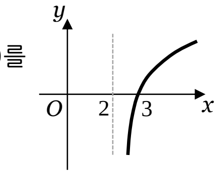
[예] 함수 $y=3^x$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속

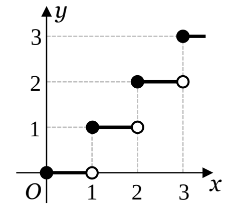


(6) 로그함수

함수식에 $\log_a f(x)$ 꼴이 포함되어 있으면 $f(x)>0$를 만족시키는 모든 x값에서 연속이다.

[예] 함수 $y=\log_3(x-2)$는 구간 $(2, \infty)$에서 연속





(7) 가우스 함수

함수식에 $[x]$가 포함되어 있으면 $x=n$(n은 정수)인 점에서 $[x]$의 좌극한값과 우극한값이 다르므로 불연속일 수 있다.

[예] $y=[x]$는 $x=n$에서 불연속, 구간 $[n, n+1)$에서 연속(단, n은 정수)

[예제] 7. 구간 $(0, 1)$에서 정의된 함수 $f(x)=[\log_3 x]$가 불연속이 되는 모든 x값들의 합을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

[풀이] 먼저 $f(x)=[\log_3 x]$의 그래프를 다음과 같이 그린다. (단, n은 정수)

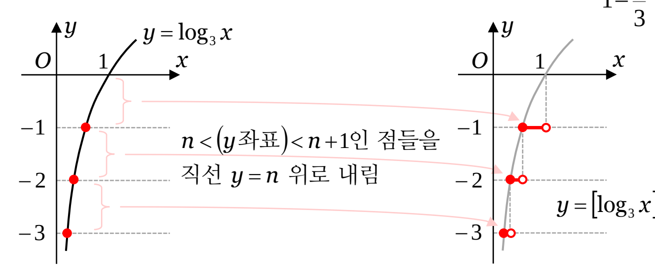
① $y=\log_3 x$의 그래프를 그린다.

② $\log_3 x=n$이면 $[\log_3 x]=n$이므로 ①의 그래프에서 y좌표가 정수인 점들은 그대로 둔다.

③ $n<\log_3 x<n+1$이면 $[\log_3 x]=n$이므로 ①의 그래프에서 y좌표가 n과 $n+1$ 사이인 점들을 직선 $y=n$ 위로 내려준다.

①~③에 따라 그려진 그래프는 $\log_3 x=n$ (n은 음의 정수) $x=3^n$인 x값에서 불연속이다. 그러므로 모든 x값들의 합은

$$3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$



연속함수의 성질

• 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수들도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $kf(x)$ (2) $f(x)\pm g(x)$ (3) $f(x)g(x)$ (4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(단, k는 상수) (단, $g(a)\neq 0$)

$\because$ 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$

(1) ~ (4)의 함수에 대하여 $x=a$에서의 극한값을 계산하면

(1) $\lim\limits_{x\to a}\{kf(x)\}=k\lim\limits_{x\to a} f(x)=kf(a)$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)\pm g(a)$ (복부호동순)

(3) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)g(a)$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$

이며, (1) ~ (4) 모두 함숫값과 극한값이 일치하므로 $x=a$에서 연속이다.

☆ 함수 $f(x)$ 또는 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속이면
$f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 연속일 수도, 불연속일 수도 있다.

☆ 특정 점에서 성립하는 연속함수의 성질을 구간으로 확장하면 다음과 같다.

> 함수 $f(x)$, $g(x)$가 어떤 구간에서 연속이면 다음 함수들도 그 구간에서 연속이다.
>
> $kf(x)$ $f(x)\pm g(x)$ $f(x)g(x)$ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
>
> (단, k는 실수이고, 구간에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq 0$이다.)

[예제]8. 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 아래의 함수 중에서 $x=a$에서 연속인 것을 모두 고르시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

ㄱ. $\{f(x)\}^2$ ㄴ. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ ㄷ. $[f(x)]$ ㄹ. $g(f(x))$

[풀이] ㄱ. $x=a$에서 연속인 함수 $f(x)$의 곱이므로 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 분모 $f(x)$ 때문에 $x=a$에서 연속이려면 $f(a)\neq 0$가 필요하다.

ㄷ. $f(x)=x$, $a=0$일 때 주어진 함수는 $[f(x)]=[x]$가 되며, $x=0$에서 불연속이다.

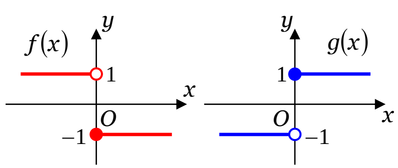
ㄹ. 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 함숫값을 $f(a)=k$로 두면, 함수 $g(f(x))$의 $x=a$에서의 함숫값은 $g(f(a))=g(k)$지만, $g(k)$값의 존재 여부를 알 수 없기 때문에 연속이라고 할 수 없다.

$\therefore x=a$에서 연속인 함수는 ㄱ

평가원 [예제]9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 아래에서 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$와 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$가 모두 존재하지 않으면 $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}$도 존재하지 않는다.
ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. $y=|f(x)|$가 $x=0$에서 연속이면 $y=f(x)$도 $x=0$에서 연속이다.

[풀이] ㄱ. $f(x)$, $g(x)$를 오른쪽과 같이 정의하면 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$의 값은 존재하지 않는다. 그러나 $f(x)+g(x)=0$이기 때문에 $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$이다. (거짓)



ㄴ. $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$이 성립하고, 이 식에 의해 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=|f(0)|$도 성립한다. 따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

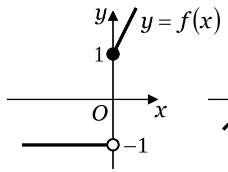
ㄷ. 함수 $f(x)$를 ㄱ의 $f(x)$와 똑같이 정의하면 $|f(x)|=1$이다. 따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

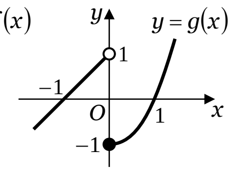
[예제]10. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases} -1 & (x<0) \\ 2x+1 & (x\ge 0) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<0) \\ x^2-1 & (x\ge 0) \end{cases}$$

이때, 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=0$에서의 연속성을 조사하여라.

[풀이]두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 오른쪽과 같으며, $x=0$에서 $f(x)$, $g(x)$, $f(x)+g(x)$의 함숫값, 좌극한값, 우극한값을 조사하면



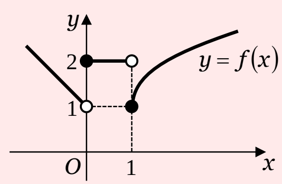


	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$
함숫값 : $x=0$일 때	1	−1	0
좌극한값 : $x\to -0$일 때	−1	1	0
우극한값 : $x\to +0$일 때	1	−1	0

함수 극한의 성질에 의해 $f(x)$, $g(x)$ 각각이 수렴하면 $f(x)+g(x)$도 수렴

와 같다. 따라서 함숫값, 극한값이 모두 0이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

[예제]11. 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽과 같을 때, 함수 $f(x)f(x+1)$의 $x=0$에서의 연속성을 조사하여라.



[풀이]$x=0$에서 $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x)f(x+1)$의 함숫값과 좌극한값,우극한값을 조사하면 아래 표와 같다.

	$f(x)$	$f(x+1)$	$f(x)f(x+1)$
함숫값 : $x=0$일 때	2	1	2
좌극한값 : $x\to -0$일 때	1	2	2
우극한값 : $x\to +0$일 때	2	1	2

따라서 함숫값과 극한값이 모두 2이므로 함수 $f(x)f(x+1)$는 $x=0$에서 연속이다.

$x\to -0$이면 $x+1\to 1-0$,
$x\to +0$이면 $x+1\to 1+0$
임을 이용해서 극한 계산

평가원 [예제]12. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\ne 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$에 대하여 아래에서 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)$
ㄴ. 함수 $g(x)=f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a가 존재한다.
ㄷ. 함수 $h(x)=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

[풀이]ㄱ. $x\to 1-0$, $x\to 1+0$ 둘 다 $x\ne 1$인 경우이므로

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} x^2=1,\ \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} x^2=1\ (\text{참})$$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 함숫값과 극한값이 일치하지 않으므로 불연속이다. 또한 함수 $f(x-a)$는 $f(x)$를 x축 방향으로 a만큼 평행이동시킨 것이므로 $x=a+1$에서 불연속이다. (거짓)

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속 → x축 방향으로 a만큼 평행이동 → 함수 $f(x-a)$는 $x=a+1$에서 불연속

ㄷ. 함수 $y=x-1$은 연속함수, 함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서만 불연속이므로 함수 $h(x)=(x-1)f(x)$의 연속성은 $x=1$만 조사하면 알 수 있다.

	$x-1$	$f(x)$	$(x-1)f(x)$
함숫값 : $x=1$일 때	0	2	0
극한값 : $x\to 1$일 때	0	1	0

따라서 함수 $y=(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 함숫값과 극한값이 일치하므로 $x=1$에서 연속이고, 실수 전체의 집합에서도 연속이다. (참)

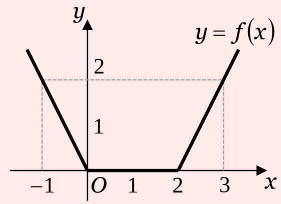
수능 [예제]13. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 아래 그래프로 주어진 함수

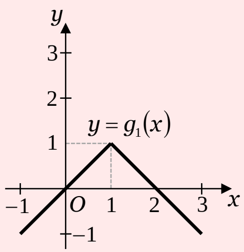
$y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$, $y=g_3(x)$

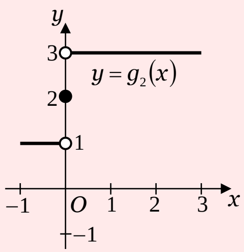
각각을 $f(x)$와 곱해서 얻은 함수

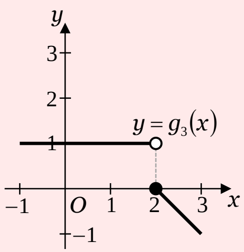
$y=f(x)g_k(x)\,(k=1,\ 2,\ 3)$

가 구간 $[-1, 3]$에서 연속이 되도록 하는 $g_k(x)$를 모두 고르시오.









[풀이] $i)$ $k=1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g_1(x)$가 구간 $[-1, 3]$에서 연속이므로 함수 $y=f(x)g_1(x)$도 같은 구간에서 연속이다.

$ii)$ $k=2$일 때, 함수 $f(x)$는 연속함수, 함수 $g_2(x)$는 $x=0$에서만 불연속이므로 함수 $y=f(x)g_2(x)$의 연속성은 $x=0$만 조사하면 알 수 있다.

	$f(x)$	$g_2(x)$	$f(x)g_2(x)$
함숫값 : $x=0$일 때	0	2	0
좌극한값 : $x\to -0$일 때	0	1	0
우극한값 : $x\to +0$일 때	0	3	0

따라서 함수 $f(x)g_2(x)$는 $x=0$에서 함숫값과 좌극한값, 우극한값이 모두 일치하므로 $x=0$에서 연속이며, 구간 $[-1, 3]$에서도 연속이다.

$iii)$ $k=3$일 때, 함수 $f(x)$는 연속함수, 함수 $g_3(x)$는 $x=2$에서만 불연속이므로 함수 $y=f(x)g_3(x)$의 연속성은 $x=2$만 조사하면 알 수 있다.

	$f(x)$	$g_3(x)$	$f(x)g_3(x)$
함숫값 : $x=2$일 때	0	0	0
좌극한값 : $x\to 2-0$일 때	0	1	0
우극한값 : $x\to 2+0$일 때	0	0	0

따라서 함수 $f(x)g_3(x)$는 $x=2$에서 함숫값과 좌극한값, 우극한값이 모두 일치하므로 $x=2$에서 연속이며, 구간 $[-1, 3]$에서도 연속이다.

$i)\sim iii)$으로부터 함수 $f(x)g_k(x)$가 구간 $[-1, 3]$에서 연속이 되도록 하는 $g_k(x)$는 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ 셋 모두다.

☆ 앞 페이지 [예제]12의 ㄷ과 [예제]13으로부터 다음을 유추해낼 수 있다.

$x=a$에서 불연속인 함수 $f(x)$와 연속인 함수 $g(x)$에 대하여

함수 $f(x)$가 $x=a$에서
(함숫값), (좌극한값), (우극한값)
이 서로 달라서 불연속이더라도

&

함수 $g(x)$가 $x=a$에서
(함숫값) = (극한값) = 0
이면서 연속이면

⇒

함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서
(함숫값) = (극한값) = 0
이 되어 연속이다.

이를 이용하면 다음 [예제]14를 비교적 간단하게 해결할 수 있다.

평가원 [예제]14. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1},\ h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(10)$의 값을 구하여라.

[풀이]두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 파악하기 쉽도록 x의 범위를 나누고 간단히 정리한다.

$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}$로부터

$|x|>1$이면 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^{2n}}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x^{2n}}}}=\frac{1}{x}$

$x=1$이면 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+1}=0$

$x=-1$이면 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}-1}{(-1)^{2n}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1-1}{1+1}=-1$

$|x|<1$이면 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancelto{0}{x^{2n-1}}-1}{\cancelto{0}{x^{2n}}+1}=-1$

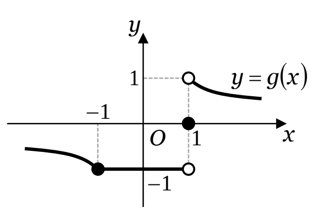
$h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$로부터

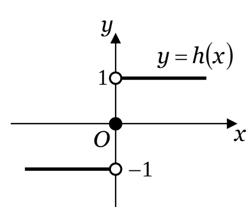
$x>0$이면 $h(x)=\frac{x}{x}=1$

$x<0$이면 $h(x)=\frac{-x}{x}=-1$

$x=0$이면 $h(x)=0$

따라서 두 함수의 그래프는 다음과 같이 나타난다.





i) $f(x)$는 연속함수, $g(x)$는 $x=1$에서만 불연속인 함수이기 때문에 함수 $f(x)g(x)$가 연속함수이려면 $x=1$에서 연속이 되도록 해야한다. 이때, 함수 $g(x)$가 $x=1$에서

(함숫값)$\neq$(좌극한값)$\neq$(우극한값)

이므로 $f(1)=0$이어야만 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서

(함숫값)=(좌극한값)=(우극한값)$=0$

을 만족하면서 연속이 된다.

ii) $f(x)$는 연속함수, $h(x)$는 $x=0$에서만 불연속인 함수이기 때문에 함수 $f(x)h(x)$가 연속함수이려면 $x=0$에서 연속이 되도록 해야 한다. 이때, 함수 $h(x)$가 $x=0$에서

(함숫값)$\neq$(좌극한값)$\neq$(우극한값)

이므로 $f(0)=0$이어야만 함수 $f(x)h(x)$가 $x=0$에서

(함숫값)=(좌극한값)=(우극한값)$=0$

을 만족하면서 연속이 된다.

i), ii)로부터 $f(1)=0$, $f(0)=0$이므로

$f(x)=(x-1)x$

$f(10)=9\times 10=90$

• 함수의 연속 – 유형①
구간별로 정의가 다른 함수에 대하여 구간 경계에서의 연속성을 따지려면 함숫값, 좌극한값, 우극한값을 모두 비교해야 한다.

평가원 [예제]15. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+a & (x\ge 2) \\ x+b & (x<2) \end{cases}$가 $x=2$에서 연속이 되도록 상수 a, b를 정할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

[풀이] 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이기 위해서는 함숫값과 극한값이 일치해야 하며, $x=2$를 경계로 함수식이 다르기 때문에 극한값은 좌극한값과 우극한값을 따로 구해야 한다. 따라서

$$\boxed{\begin{matrix}\text{함숫값}\\ f(2)\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix}\text{좌극한값}\\ \lim_{x\to 2-0}f(x)\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix}\text{우극한값}\\ \lim_{x\to 2+0}f(x)\end{matrix}}$$

$$2^2+2+a=\lim_{x\to 2-0}(x+b)=\lim_{x\to 2+0}(x^2+x+a)$$

$$6+a=2+b=6+a$$

따라서

$$a-b=-4$$

☆ 연속함수에서는 $\left(\begin{matrix} x\to a\text{일 때의} \\ \text{극한값}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} x=a\text{를} \\ \text{대입한 값}\end{matrix}\right)$의 관계가 항상 성립한다.

이를 [예제]15와 같이

▹ 구간에 따라 함수식이 변하고	▹ 구간 내에서는 연속이면서	▹ 구간의 경계에서 연속성을 따지는 문제

에 적용하면 대입만으로 쉽게 풀 수 있다.

> 함수 $g(x)$, $h(x)$가 연속함수일 때,
> $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<a) \\ h(x) & (x\ge a)\end{cases}$로 정의되는
> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면
> $$\boldsymbol{g(a)=h(a)}$$
> 가 성립해야 한다.

$\because \left(\begin{matrix} x=a\text{에서의} \\ \text{좌극한값}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} x=a\text{에서의} \\ \text{우극한값}\end{matrix}\right)$

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a+0}f(x)$$

$$\lim_{x\to a-0}g(x)=\lim_{x\to a+0}h(x)$$

$$g(a)=h(a)$$

평가원 [예제]16. 함수 $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (|x|>1) \\ -x^2+ax+b & (|x|\le 1)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a, b를 정할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

[풀이1] $f(x)$는 구간 $(-\infty,-1)$, $[-1,1]$, $(1,\infty)$에서 연속이므로, 모든 실수 x에 대하여 연속이기 위해서는 구간의 경계 $x=\pm1$에서는 연속이면 된다.

① $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면 함숫값, 좌극한값, 우극한값이 일치해야 하므로

$$f(-1)=\lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}f(x)$$

$$-1-a+b=\lim_{x\to -1-0}x(x-1)=\lim_{x\to -1+0}(-x^2+ax+b)$$

$$-1-a+b=2=-1-a+b$$

$$a-b=-3$$

답

② $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 함숫값, 좌극한값, 우극한값이 일치해야 하므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)$$

$$-1+a+b=\lim_{x\to 1-0}(-x^2+ax+b)=\lim_{x\to 1+0}x(x-1)$$

$$-1+a+b=-1+a+b=0$$

$$a+b=1$$

①, ②를 연립해서 풀면 $a=-1$, $b=2$이다.

[풀이2] 왼쪽 개념을 이용하면 다음의 식이 나타난다.

$\langle x=-1$에서 연속$\rangle$

$$[-x^2+ax+b]_{x=-1}=[x(x-1)]_{x=-1}$$

$$-1-a+b=2$$

$$a-b=-3$$

답

$\langle x=1$에서 연속$\rangle$

$$[-x^2+ax+b]_{x=1}=[x(x-1)]_{x=1}$$

$$-1+a+b=0$$

$$a+b=1$$

[ ] 안의 식에 $x=1$을 대입하라는 뜻

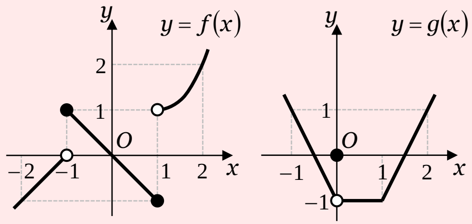
두 식을 연립해서 풀면 $a=-1$, $b=2$이다.

• 함수의 연속 – 유형②
합성함수 $g(f(x))$의 연속성은 $f(x)$, $g(x)$가 불연속인 점에 유의한다.

☆ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 합성함수 $g(f(x))$가 정의될 때, $f(x)$, $g(x)$가 연속함수면 $g(f(x))$도 연속함수다.

☆ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서만 불연속, 함수 $g(x)$가 $x=b$에서만 불연속이라면 합성함수 $g(f(x))$의 연속성은 $x=a$, $f(x)=b$인 점만 조사하면 된다.

[예제]17. 구간 $(-\infty, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 오른쪽과 같다. 이때, 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 불연속이 되는 x값을 모두 구하여라.



[풀이]함수 $f(x)$는 $x=-1$, 1에서만 불연속, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서만 불연속이므로 합성함수 $g(f(x))$의 연속성은 $x=-1$, 1일 때와 $f(x)=0$일 때 (즉, $x=0$일 때)만 조사하면 된다.

$i)$ $x=-1$일 때

$$\left.\begin{array}{l} g(f(-1))=g(1)=-1 \\ x\to-1-0\text{일 때 } f(x)\to-0\text{이고, } g(f(x))\to-1 \\ x\to-1+0\text{일 때 } f(x)\to1-0\text{이고, } g(f(x))=-1 \end{array}\right\}\text{함숫값, 극한값이 같으므로 연속}$$

$ii)$ $x=0$일 때

$$\left.\begin{array}{l} g(f(0))=g(0)=0 \\ x\to-0\text{일 때 } f(x)\to+0\text{이고, } g(f(x))=-1 \\ x\to+0\text{일 때 } f(x)\to-0\text{이고, } g(f(x))\to-1 \end{array}\right\}\text{함숫값, 극한값이 다르므로 불연속}$$

$iii)$ $x=1$일 때

$$g(f(1))=g(-1)=1$$
$$\left.\begin{array}{l} x\to1-0\text{일 때 } f(x)\to-1+0\text{이고, } g(f(x))\to1 \\ x\to1+0\text{일 때 } f(x)\to1+0\text{이고, } g(f(x))\to-1 \end{array}\right\}\text{극한값이 존재하지 않으므로 불연속}$$

$i)$~$iii)$으로부터 함수 $g(f(x))$는 $x=0$, 1에서 불연속이다.

[예제]18. 두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $g(x)=|x|+k$의 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 실수 전체에서 연속이 되도록 하는 실수 k의 범위를 구하여라.

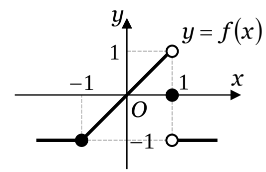
[풀이]먼저 $f(x)$를 간단히 하면

$|x|>1$에서 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^{2n-1}}-1}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}=-1$

$x=1$에서 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{1+1}=0$

$x=-1$에서 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-1-(-1)^{2n}}{1+(-1)^{2n}}=-1$

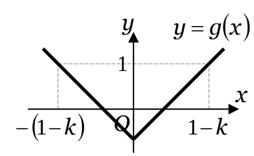
$|x|<1$에서 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=x$



따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속, 함수 $g(x)$는 연속함수이므로 합성함수 $f(g(x))$가 실수 전체에서 연속이려면 $g(x)=1$일 때 연속이면 된다.

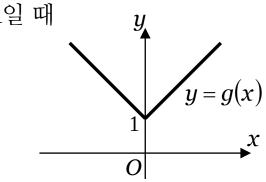
또한 방정식 $g(x)=1$의 근은
$i)$ $k<1$일 때 $x=\pm(1-k)$
$ii)$ $k=1$일 때 $x=0$
$iii)$ $k>1$일 때 근 없음
이므로 k로 경우를 나눠서 접근한다.

$i)$ $k<1$일 때



$x=1-k$에서 $f(g(x))$의 함숫값, 극한값을 조사하면
$f(g(1-k))=f(1)=0$
$x\to(1-k)-0$일 때
$g(x)\to1-0$, $f(g(x))\to1$
$x\to(1-k)+0$일 때
$g(x)\to1+0$, $f(g(x))=-1$
이므로 함숫값, 극한값이 다르기 때문에 $f(g(x))$는 항상 불연속

$ii)$ $k=1$일 때



$x=0$에서 $f(g(x))$의 함숫값, 극한값을 조사하면
$f(g(0))=f(1)=0$
$x\to0$일 때
$g(x)\to1+0$, $f(g(x))=-1$
이므로 함숫값, 극한값이 다르기 때문에 $f(g(x))$는 불연속

$iii)$ $k>1$일 때
$g(x)>1$이므로 $f(g(x))=-1$이 되어 $f(g(x))$는 연속함수

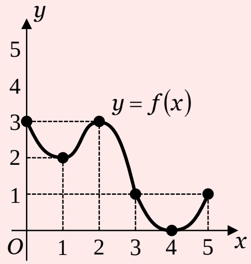
$i)$~$iii)$으로부터 함수 $f(g(x))$가 실수 전체에서 연속이려면 $k>1$이 되어야 한다.

평가원 [예제]19. 닫힌 구간 $[0, 5]$에서 정의된 함수 $y = f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

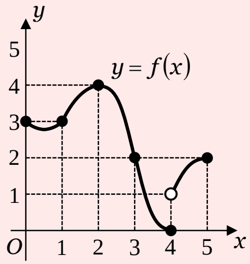
$$g(x) = \begin{cases} \{f(x)\}^2 & (0 \le x \le 3) \\ (f \circ f)(x) & (3 < x \le 5) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0, 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$의 그래프로 옳은 것만을 아래에서 모두 고르시오.

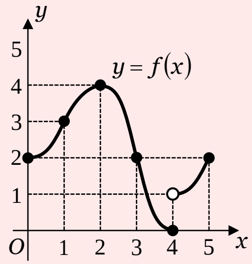
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



[풀이] ㄱ. 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $\{f(x)\}^2$과 $(f \circ f)(x)$도 연속함수다.
따라서 함수 $g(x)$의 연속성은 구간의 경계인 $x = 3$에서만 조사하면 된다.
여기서의 함숫값과 극한값을 계산하면

$g(3) = \{f(3)\}^2 = 1$

$\left.\begin{array}{l} x \to 3-0\text{일 때, } f(x) \to 1+0\text{이고, } g(x) = \{f(x)\}^2 \to 1 \\ x \to 3+0\text{일 때, } f(x) \to 1-0\text{이고, } g(x) = f(f(x)) \to 2 \end{array}\right\}$ 좌·우극한값 다름

이므로 극한값이 존재하지 않으며, 함수 $g(x)$는 $x = 3$에서 불연속이다.

ㄴ. ① 구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 $\{f(x)\}^2$도 연속이다.
② 구간 $(3, 5]$에서는 $x = 4$일 때 함수 $f(x)$가 불연속이므로 $(f \circ f)(x)$의 연속성을 조사해야 한다. $x = 4$에서 함숫값과 극한값을 계산하면

$f(f(4)) = f(0) = 3$

$x \to 4-0$일 때, $f(x) \to +0$이고, $f(f(x)) \to 3$

$x \to 4+0$일 때, $f(x) \to 1+0$이고, $f(f(x)) \to 3$

이며, 모두 일치하므로 함수 $(f \circ f)(x)$는 $x = 4$에서 연속이고, 구간 $(3, 5]$에서도 연속이 된다.

③ 구간의 경계인 $x = 3$에서 함수 $g(x)$의 연속성을 조사하기 위해 함숫값과 극한값을 계산하면

$g(3) = \{f(3)\}^2 = 4$

$x \to 3-0$일 때, $f(x) \to 2+0$이고, $g(x) = \{f(x)\}^2 \to 4$

$x \to 3+0$일 때, $f(x) \to 2-0$이고, $g(x) = f(f(x)) \to 4$

이며, 모두 일치하므로 $g(x)$는 $x = 3$에서 연속이다.

따라서 ① ~ ③에 의해 함수 $g(x)$는 구간 $[0, 5]$에서 연속이다.

ㄷ. 구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 $\{f(x)\}^2$도 연속이다.
또한 구간 $(3, 5]$에서는 $x = 4$일 때 함수 $f(x)$가 불연속이므로 $(f \circ f)(x)$의 연속성을 조사해야 한다. $x = 4$에서 함숫값과 극한값을 계산하면

$f(f(4)) = f(0) = 2$

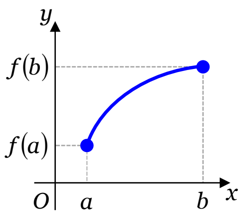
$\left.\begin{array}{l} x \to 4-0\text{일 때, } f(x) \to +0\text{이고, } f(f(x)) \to 2 \\ x \to 4+0\text{일 때, } f(x) \to 1+0\text{이고, } f(f(x)) \to 3 \end{array}\right\}$ 좌·우극한값 다름

이므로 극한값이 존재하지 않으며, 함수 $g(x)$는 $x = 4$에서 불연속이다.

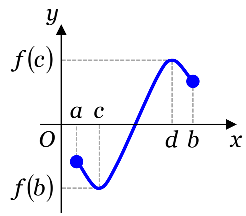
§2. 최대·최소의 정리와 중간값의 정리

최대·최소의 정리

- 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

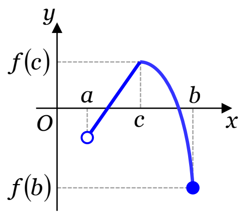


최댓값 $f(b)$,
최솟값 $f(a)$

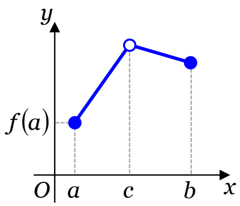


최댓값 $f(d)$,
최솟값 $f(c)$

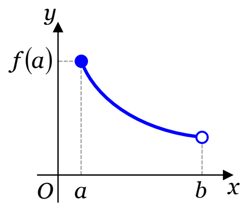
☆ 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 불연속점을 가지면, $f(x)$는 이 구간에서 최댓값이나 최솟값을 가질 수도, 갖지 않을 수도 있다.



최댓값 $f(c)$,
최솟값 $f(b)$



최댓값 없음,
최솟값 $f(a)$



최댓값 $f(a)$,
최솟값 없음

또한 최대·최소 정리의 역 '함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가지면 그 구간에서 연속이다'는 거짓이며, 반례는 바로 위의 첫 번째 그래프를 갖는 함수다.

☆ 최대·최소의 정리는 최댓값과 최솟값이 존재하기 위한 조건에 대한 것이며, 닫힌 구간에서 연속인 함수가 갖는 특성 정도로 이해하면 된다. 함수의 최대·최소에 대한 자세한 내용은 $p.100$에서 배우게 될 것이다.

중간값의 정리

- 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여

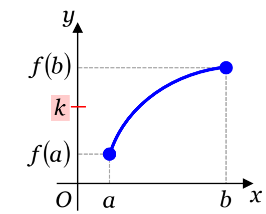
$$\boldsymbol{f(c) = k}$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

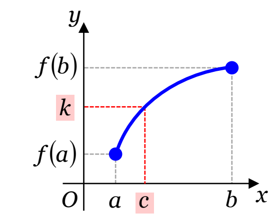
☆ 간단히 말해서 닫힌 구간에서 연속인 함수에 대하여

그래프 양끝점의 y좌표 사이에서 아무 값이나 하나 선택하면 → 그 값을 함숫값으로 하는 x값이 적어도 하나 존재한다.

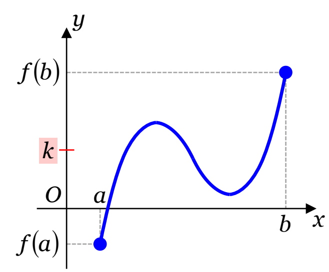
는 뜻이다.



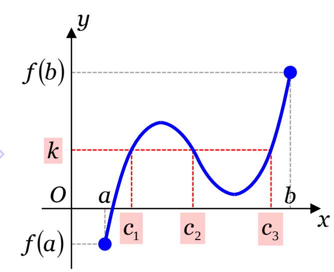
$f(a) < k < f(b)$를 만족하는 k값을 선택하면



방정식 $f(x) = k$의 근 c가 a, b 사이에 존재한다.



$f(a) < k < f(b)$를 만족하는 k값을 선택하면



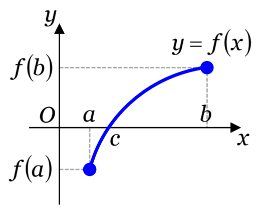
방정식 $f(x) = k$의 근 c_1, c_2, c_3이 a, b 사이에 존재한다.

중간값 정리를 이용한 실근의 존재 증명

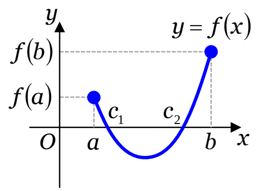
• 중간값의 정리를 이용하면 x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 실근이 특정 구간에 존재함을 보일 수 있다.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)$, $f(b)$의 부호가 반대면 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 (a,b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

∵ 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)$, $f(b)$의 부호가 반대면 $f(a)$, $f(b)$ 사이에 0이 존재한다.
따라서 중간값의 정리에 의해 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재하며, 이 c가 바로 방정식 $f(x)=0$의 실근이다.



☆ 그림과 같이 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이지만 $f(a)$, $f(b)$의 부호가 같을 때는 방정식 $f(x)=0$의 실근이 열린 구간 (a,b)에 있더라도 중간값의 정리로 존재를 증명할 수 없다.



[예제]1. 방정식 $x^2+x\log_2 x=0$이 $\frac{1}{2}$보다 크고 2보다 작은 실근을 가짐을 증명하여라.

[풀이] 주어진 방정식의 좌변을 함수
$f(x)=x^2+x\log_2 x$
로 두자. 이때, 함수 $y=x^2$, $y=x$, $y=\log_2 x$ 모두 구간 $\left[\frac{1}{2},2\right]$에서 연속이며, 이들의 합·곱으로 이루어진 함수 $f(x)$도 같은 구간에서 연속이다.

또한 구간 경계에서의 함숫값

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}<0$

$f(2)=6>0$

의 부호가 반대이므로 중간값의 정리에 의해 $f(c)=0$을 만족하는 c가 구간 $\left(\frac{1}{2},2\right)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 주어진 방정식은 $\frac{1}{2}$과 2 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다.

[예제]2. 두 함수 $y=\log_3 x$, $y=x^2-4$의 그래프에서 교점의 x좌표가 α, β일 때, 실수 β의 값이 존재하는 구간은? (단, $\alpha<\beta$)

① $(0,1)$ ② $(1,2)$ ③ $(2,3)$ ④ $(3,4)$ ⑤ $(4,5)$

[풀이] 두 식 $y=\log_3 x$, $y=x^2-4$를 연립하고, y를 소거하면 방정식
$\log_3 x=x^2-4$
$\log_3 x-x^2+4=0$
이 되며, 이 방정식의 실근은 두 그래프의 교점에서 x좌표다.

이 방정식의 좌변을 함수
$f(x)=\log_3 x-x^2+4$
로 두고, ①~⑤에 주어진 구간의 경계에서 함숫값의 부호를 조사해 보자. ($f(0)$의 값은 존재하지 않으므로 대신 극한값을 조사)

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty<0\\ f(1)=3>0\end{array}\right\}$ 부호 반대

$\left.\begin{array}{l}f(2)=\log_3 2>0\\ f(3)=-4<0\end{array}\right\}$ 부호 반대

$f(4)=\log_3 4-12<0$

$f(5)=\log_3 5-21<0$

경계에서 함숫값의 부호가 반대인 구간은 $(0,1)$과 $(2,3)$ 두 개이며, 구간 $(0,1)$에 α가, 구간 $(2,3)$에 β가 존재한다.

따라서 답은 ③

[예제]3. 함수 $f(x)$가 구간 $[0,1]$에서 연속일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=x$가 0보다 크고 1보다 작은 실근을 갖기 위한 충분조건은 어느 것인가?

① $f(0)f(1)>0$ ② $f(0)f(1)<0$ ③ $f(0)\{f(1)-1\}>0$
④ $f(0)\{f(1)-1\}<0$ ⑤ $f(0)\{f(1)-1\}=0$

[풀이] 함수 $y=f(x)$가 구간 $[0,1]$에서 연속이기 때문에 함수 $y=f(x)-x$도 같은 구간에서 연속이다.

따라서 함수 $y=f(x)-x$의 $x=0,\ 1$에서의 함숫값 부호가 반대면 중간값 정리에 의해서 방정식 $f(x)-x=0$의 실근이 구간 $(0,1)$에 존재하게 된다.

함수 $y=f(x)-x$의 $x=0,\ 1$에서의 함숫값 부호가 반대일 조건은

$\{f(0)-0\}\{f(1)-1\}<0$

$f(0)\{f(1)-1\}<0$

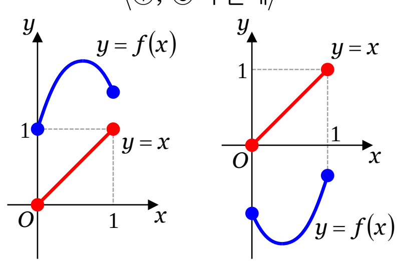
이며, 방정식 $f(x)-x=0$의 실근이 구간 $(0,1)$에 존재할 충분조건이다.

따라서 답은 ④

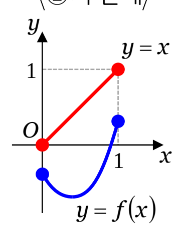
☆ 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \to q$가 참이면 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라 한다.

☆ 방정식 $f(x)=x$의 실근이 구간 $(0,1)$에 존재하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프가 같은 구간에서 만난다. 이를 이용하면 나머지 보기들의 반례를 쉽게 찾을 수 있다.

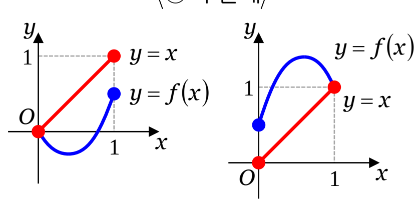
〈①, ③의 반례〉



〈②의 반례〉



〈⑤의 반례〉



[예제]4. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-2}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$가 $x=1$에서 연속이라고 한다. 이때, 다음에서 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $f(1)=2$이다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
ㄷ. $f(0)f(2)>0$이면 방정식 $f(x)=0$의 실근은 구간 $(0,2)$에 존재하지 않는다.

[풀이] ㄱ. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 함숫값과 극한값이 일치한다.

$g(1)=\lim_{x\to1} g(x)$

$1=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$

여기서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 따라서

$\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$

$f(1)=2$ (참)

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서의 함숫값과 극한값이 일치한다.
$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=f(1)-2$

ㄴ. $i)$ $x\neq1$일 때

함수 $y=f(x)-2$, $y=x-1$이 연속이므로 함수 $g(x)=\dfrac{f(x)-2}{x-1}$도 연속이다.

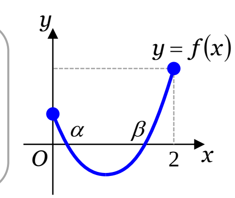
$ii)$ $x=1$일 때

문제의 조건으로부터 함수 $g(x)$는 연속이다.

$i)$, $ii)$로부터 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다. (참)

ㄷ. $f(0)f(2)>0$이면 구간 $(0,2)$에 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하기 위한 중간값 정리의 가정이 성립하지 않는다.

그렇다고 해서 항상 실근이 존재하지않는 것은 아니며, 아래와 같이 실근이 존재하는 경우도 있다.



따라서 ㄷ은 거짓