

규 토
라이트
N 제

CONTENTS

규토 라이트 N제 오리엔테이션

책소개	6p
검토후기	8p
추천사	10p
규토 라이트 N제 100% 공부법	16p
규토 라이트 N제 추천 계획표	18p
규토 라이트 N제 학습법 가이드	24p
맺음말	26p

문제편

| 함수의 극한과 연속 |

1. 함수의 극한		2. 함수의 연속	
Guide Step	31p	Guide Step	71p
01. 함수의 극한	32p	01. 함수의 연속	72p
02. 함수의 극한값의 계산	39p	02. 연속함수의 성질	77p
Training_1 Step	49p	Training_1 Step	83p
Training_2 Step	59p	Training_2 Step	93p
Master Step	67p	Master Step	103p

| 미분 |

1. 미분계수와 도함수

Guide Step	109p
01. 미분계수	110p
02. 도함수	118p
Training_1 Step	123p
Training_2 Step	135p
Master Step	141p

2. 도함수의 활용

Guide Step	145p
01. 접선의 방정식	146p
02. 평균값 정리	151p
03. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소	154p
04. 함수의 그래프	161p
05. 방정식과 부등식에의 활용	166p
06. 속도와 가속도	170p
07. 삼차함수와 사차함수의 그래프(심화특강)	172p
Training_1 Step	183p
Training_2 Step	207p
Master Step	223p

| 적분 |

1. 부정적분과 정적분

Guide Step	237p
01. 부정적분	238p
02. 정적분	244p
Training_1 Step	255p
Training_2 Step	265p
Master Step	277p

2. 정적분의 활용

Guide Step	283p
01. 넓이	284p
02. 속도와 거리	296p
Training_1 Step	301p
Training_2 Step	309p
Master Step	321p

| 빠른 정답 | 325p

CONTENTS

해설편

| 빠른 정답 | 6p

| 함수의 극한과 연속 |

1. 함수의 극한

Guide Step	19p
Training_1 Step	23p
Training_2 Step	34p
Master Step	41p

2. 함수의 연속

Guide Step	45p
Training_1 Step	47p
Training_2 Step	59p
Master Step	69p

| 미분 |

1. 미분계수와 도함수

Guide Step	75p
Training_1 Step	77p
Training_2 Step	92p
Master Step	101p

2. 도함수의 활용

Guide Step	109p
Training_1 Step	116p
Training_2 Step	156p
Master Step	188p

| 적분 |

1. 부정적분과 정적분

Guide Step	229p
Training_1 Step	232p
Training_2 Step	249p
Master Step	271p

2. 정적분의 활용

Guide Step	288p
Training_1 Step	290p
Training_2 Step	304p
Master Step	320p

오리엔테이션

책소개

검토후기

추천사

규토 라이트 N제 100% 공부법

규토 라이트 N제 추천 계획표

규토 라이트 N제 학습법 가이드

맺음말

개념과 기출을 이어주는 bridge 역할의 교재

규토 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

개념, 유형, 기출을 한 권으로 Compact하게

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과서 개념, 실전개념, 예제, 개념 확인문제, '규토의 Tip'을 모두 담았습니다.

단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.

교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

2. **T**raining - 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여

수능최적화 자작으로 구성하였습니다.

기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.

단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

3. **T**raining - 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.

필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.

실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

4. **M**aster step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.

과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도

1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.

규토 라이트 N제 수2의 경우 총 745제이고

문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 라이트 N제의 추천 대상

1. 개념강의와 병행할 교재를 찾는 학생
2. 개념을 끝내고 본격적으로 기출문제를 들어가기 전인 학생
3. 해당과목을 compact하게 정리하고 싶은 학생
4. 무엇을 해야할지 갈피를 못잡는 3~4등급 학생
5. 기출문제가 너무 어렵게 느껴지는 학생
6. 아무리 공부해도 수학적 성적이 잘 오르지 않는 학생

문지유 / 울산대학교 의예과

안녕하세요! 울산대학교 의과대학 20학번 재학 중인 문지유입니다. 문제집 검토는 항상 신경이 많이 쓰이고 떨리네요 ㅎㅎ

2019학년도 현역 수능 국어에서 역대급 불수능을 맛봤던 그때가 아직도 생생합니다. 2교시 수학 시간에 시간 부족으로 30번은 찍고 나와서 96점이라 생각했는데, 이게 웬걸? 저녁에 집에서 채점을 해 보니 도형의 극한 문제 계산 실수로 인해 92점을 받았더라고요. 현역 수능 이전에 그 어떤 모의고사에서도 계산 실수를 한 적 없는 제가... 그때 느꼈던 어이 없고 허무한 감정은 평생 잊을 수 없을 겁니다. 2020학년도 재수 수능 수학은 전년도보다 난이도가 낮아서 그런 건지, 혹은 그래도 1년 더 공부해서 그런 건지 모르겠지만 30분 정도 시간이 남더군요. 원래는 검토를 잘 안 하던 타입이라서, 검토를 할까 말까 고민하던 차에 그래도 재수생이고 시간도 남았는데 검토를 해야 하지 않나 싶어 검토하던 와중, 식은땀이 등에 짝 흐릅니다. 30번 풀이를 검토하던 도중 계산 실수를 발견하고 이를 고쳐 100점. 검토를 하지 않았다면 입시 결과가 바뀌었겠죠? 이처럼 나름 스펙타클한(?) 감정을 겪었던 저는 지금도 검토가 참 중요하다고 수험생들에게 강조, 또 강조합니다. 실수도 실력이라는 말이 괜히 나오는 게 아니라는 거죠. 검토까지도 실력!

서론이 길었네요! 고등학생 때부터 재수생 시절까지, 온갖 기출문제집과 사설문제집을 넘나들며 풀었던 저는 원하는 입시 결과를 거머쥐고 꼭 대처동 현장강의 조교로 일하거나 문제집 검토 및 문제 만드는 일을 하고 싶었어요. 여러분들 중에서도 그런 사람이 있을 거라고 생각하고요. 우연히 좋은 기회로 제 버킷 리스트 중 하나인 문제집 검토 일을 하게 되어서 정말 영광입니다 :)

문제 및 해설 검토를 진행할 때 제가 가졌던 마음가짐은 바로 이 책을 보며 공부하는 학생의 입장이 되어 생각해보는 것이었어요. 인터넷 강의가 많은 요즘은 강의를 들으며 이해를 하고 QnA 게시판에 질문을 남기고 답변을 받아 공부 가능합니다. 오류나 오타자 이외에도, 이 교재를 오롯이 혼자 보며 공부하는 수험생 여러분들이 온전히 이 문제집에 적혀 있는 글을 보고 이해하고 납득할 수 있겠는가, 혹시 보는 사람이 헛갈리도록 쓰여진 것은 없는가, 보기 불편한 점은 없는가를 위주로 어순, 줄 바꿈, 문장의 위치까지 꼼꼼히 검토했습니다.

2023 규토 라이트 N제는 고3 학생들 뿐만 아니라 중학생, 고1, 고2 학생들이 선행학습을 할 때에도 활용하기 좋을 것 같아요. 개념 설명이 간단하면서도 명료하고 깔끔하게 되어 있으면서도, 중요한 포인트를 놓치지 않는 꼼꼼한 교재입니다. 개념 공부를 하며 바로바로 이해했는지 확인할 수 있는 예제 문제가 해설과 함께 중간중간 실려 있습니다. 기본 개념을 가지고 풀 수 있는 난이도가 그리 높지 않은 Guide Step 문제부터, 유형별로 개념을 적용하여 풀 수 있는 문제(Training - 1Step), 단원별 역대 기출들(Training - 2Step), 고난도를 연습할 수 있는 Master Step까지. 개념 공부와 함께 문제풀이를 곁들여 밸런스 있는 공부를 하기 최적화된 문제집이라고 생각합니다.

새해가 밝았습니다. 학년이 바뀌고, 나이도 어느덧 한 살 더 먹은 여러분이 규토 라이트 N제와 함께 새로운 마음으로 산뜻하게 공부하셔서, 이 교재를 풀면서 성장하는 것을 스스로 느꼈으면 좋겠습니다. 뿌듯한 한 해 되세요! 파이팅 :D

조운환 / 대성여자고등학교 교사

규토 라이트 N제는 개념 설명 + 기출 문제 + 자작 N제로 구성되어 있어 세 마리 토끼를 한 번에 잡을 수 있는 독학서입니다. 특히 수능 대비에 알맞은 컴팩트한 볼륨의 Guide step(개념 익히기편)에서 수능에 자주 출제되는 중요한 개념을 빠르게 훑고 문제 풀이로 넘어갈 수 있습니다. Guide step에서는 실전에서 사용할 수 있는 유용한 테크닉과 학생들이 개념을 공부하면서 궁금할 수 있는 포인트까지 따로 자세하게 설명해주어서 교과서나 시중 개념서에서 해결할 수 없는 의문점까지 해결할 수 있습니다.

기출 문제에 추가로 자작 문제가 포함되어 있어서 트렌디한 평가원 스타일의 문제를 다양하게 풀어볼 수 있다는 것은 규토 라이트 N제만의 큰 장점이라고 생각합니다.

저자의 TIP이 문제집과 해설집 곳곳에서 여러분들을 도와줄 것입니다. 규토 시리즈 특유의 유쾌한 해설이 무척 상세해서 규토 라이트 N제로 공부하다 보면 친절한 과외선생님이 옆에서 설명해주는 듯한 느낌을 받을 수 있을 것입니다. 특히 책 안에 나와있는 규토 시리즈의 100% 공부법을 참고하면 수학 공부 방법에 고민이 많은 학생들에게 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

정지영 / 울산대학교 의예과

안녕하세요! 새해를 맞아 새로 검토를 시작하게 된 정지영이라고 합니다. 여러 일을 해 보았지만, 문제집 검토는 처음이네요. 떨리는 마음 반, 기대되는 마음 반으로 꼼꼼히 검토했습니다.

검토하면서 교재의 Guide step과 Tip을 꼭 읽어보았는데, 혼자 공부하기에 최적의 교재라고 생각합니다. 문제에 접근하고 풀어나갈 때 필요한 내용들이 빠짐없이 깔끔하게 정리되어 있고, 내용들을 체화할 수 있도록 TIP과 해설을 유기적으로 잘 연결해 둔 교재입니다. 읽기 어렵지 않을 뿐더러, 이 교재를 꼼꼼히 공부하면 수2에서 필요한 모든 내용을 챙겨가실 수 있을거예요.

벌써 새로운 입시가 시작되는데요, 교재를 읽어주시는 수험생 여러분 모두 규토 N제 시리즈와 함께 만족스러운 한 해가 되시기를 기원합니다. 감사합니다 :)

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하십니까, 2023 규토 N제 시리즈 검토자 박도현입니다. 작년으로 첫 문, 이과 통합형 수능 수학 영역을 치게 됐습니다. 확통, 미적, 기하 영역이 뒤로 간 만큼 앞부분 수1, 2 공통영역의 중요성이 훨씬 올라갔습니다.

요즘 유형들의 문제들은 이전의 모의고사보다 준킬러 비중이 높아지고, 해당 준킬러의 난이도 또한 올라갔습니다. 특히 수2인 경우는, 도함수의 활용 및 적분 문제들의 비주얼이 좋지 않아 수험생들을 쫓게 만듭니다. 규토 라이트 N제 시리즈는 이러한 문제들을 보는 방법을 제공하고, 실전에서 가져야할 마인드를 알려줍니다.

이전 년도의 규토 라이트 N제를 이미 학습해보신 분들께, 2023 규토 라이트 N제는 내지 디자인이 훨씬 고급스러워졌습니다. 이전과 다르고 새로운 느낌으로 책을 공부할 수 있을 겁니다.

마지막으로 2023 규토 시리즈로 공부하신 모든 수험생 여러분께, 올해 수능 대박을 기원합니다!

수능 수학의 시작과 마무리, 규토 라이트 N제 (오세욱)

—규토 N제 수1,수2,미적분 풀커리(라이트~고득점)로 수능 미적분 백분위 98% 달성 후기—

저는 현역 때 운 좋게 대학입시에 성공해 인서울 대학에 합격했지만 수능에 미련이 남아있는 학생 중 한명이었습니다. 수학을 잘한다고 생각했고 자부심을 가지고 있었지만 막상 수능에서는 3등급 백분위 78을 받았습니다. 수능 시험장에서 문제를 풀면서 '나는 개념을 놓치고 있고 조건을 해석할 줄 모르는구나'를 깨달았습니다.

그렇게 대학에 진학했다는 생각으로 놀며 2020년을 보냈고 2021년이 되자 이대로 끝내면 후회가 남을 것 같다는 생각에 다시 한번 입시 속으로 뛰어들었습니다. 대학을 병행하며 진행하고 싶었기에 과외나 학원을 다니기에는 시간이 촉박하다고 판단하여 구매하게 된 책이 바로 과외식 해설을 담은 '규토 라이트 N제'입니다.

규토 라이트 N제를 만나게 되면서 앞에 적힌 공부방법에 따라 개념 부분과 개념형 유제부터 자세히 읽고 풀어보며 사소하지만 실전 문제풀이에 도움이 되는 팁을 얻었습니다. 또한 함께 실린 자작문제와 기출문제에 개념을 적용해 풀며 답안지와 내 풀이의 차이점을 비교하였고 잘못되게 풀이한 부분이 있다면 다시 한번 적어보며 틀린문제는 풀이의 길을 외울 정도로 반복해서 풀었습니다. 솔직히 이러한 과정이 빠르고 쉽다 한다면 거짓말입니다. 처음 시작할 때는 막막할 정도로 문제가 벽으로 느껴졌고 모르면 아직도 모르는게 많다는 것에 화가 나기도 했습니다. 하지만 한 문제, 한 단원 넘어갈 때마다 확실하게 개념이 탄탄해지고 새로운 문제를 만나도 개념을 중심으로 풀이가 진행되는 경우가 많아 자신감과 재미를 느끼게 되었습니다. 이렇게 수1, 수2부터 미적분까지 3권을 모두 마무리하고 반복하여 풀이하다 보니 평가원 시험에서 고정적으로 1등급을 받게 되었습니다.

규토 라이트 N제는 이름과 달리 절대 '라이트' 하지만은 않습니다. 선택과목 체재에서 규토 라이트 N제는 시작이며 마무리인 단계입니다. 기출을 이미 많이 접해본 N수나 고3분들 중 컴팩트하고 완전하게 개념과 기출을 정리하고 싶은 분들부터 수능 수학을 처음으로 공부해 개념을 탄탄하게 쌓고 싶은 분들까지 규토 라이트 N제를 자신있게 추천드립니다.

[중요] 만약 책을 구매하게 된다면, 규토 선생님의 방법으로 공부하세요.

추신) 여담으로 타 문제집(썬)과 규토 라이트 N제를 비교하는 글이 많아 두 문제집 모두 풀어본 입장에서 남긴다면 해설의 자세함, 친절도, 수능 수학을 할 때 필요한 문제의 질, 개념의 자세함 모두 규토 라이트 N제가 좋다고 생각합니다. 그리고 N제라는 이름 때문에 그런지 몰라도 두 책의 목적은 완전하게 다른데 비교하는 경우가 많은 것 같습니다. 이 책은 자세한 개념부터 심화문제 (30번)까지 모두 다룹니다. 과장없이 미적분2022평가원문제 모두 이 책에 있는 문제를 규토 선생님의 방식으로 다뤘다면 모두 맞출 수 있었다고 생각합니다.

나는 수능에서 처음으로 수학 1등급을 받았다. (이나현)

안녕하세요! 9월 백분위 89에서 수능 백분위 96으로 오르는 데 있어 규토 라이트의 도움을 크게 받아 작성하게 되었습니다. 핵심은 규토라이트를 통해 개념과 기출의 중요성을 깨닫게 되었다는 점입니다. 규토라이트는 1-4등급 모두에게 좋은 책이지만, 저는 특히 2-3등급에 머무르는 학생들에게 추천하고 싶습니다.

백분위 89에서 1등급은 드라마틱한 성적 변화가 아니라고 생각하실 수도 있습니다. 하지만 저는 고등학교와 재수 생활을 통틀어 평가원 모의고사에서 1등급은 맞아본 적도 없고 2등급 후반 ~ 3등급 초반을 진동했습니다. 저는 수학을 일주일에 적어도 40시간 이상 투자했고, 유명한 강의와 문제집을 다양하게 접해봤음에도 1등급을 맞지 못하는 원인을 파악하지 못했었는데요. 9월부터 규토 라이트로 두 달동안 공부하며 제 약점을 파악했고 결국 수능에서 처음으로 1등급을 맞았습니다. 규토 라이트를 처음 접하게 된 건 9월 모의고사에서 2등급을 간신히 걸친 후였는데요. 저는 1등급을 맞게 된 원인이 크게 두 가지라고 생각합니다.

첫 번째로 규토 라이트의 구성입니다. 기출과 N제 그리고 ebs까지 적절하게 섞인 구성이 너무 좋았습니다. 또한 가이드 스텝을 스킵하지 마시고 꼭 정독하시는 것을 추천드립니다. 규토님의 농축된 팁까지 언어갈 수 있습니다. 마스터 스텝에서도 배워갈 점이 많으니 겁먹지 말고 몇 번이고 풀어보시는 것을 추천드립니다. 저는 규토 라이트를 접하기 전까진 왜 수학에서 개념과 기출을 강조하는지 이해가 가지 않았습니다. 기출은 지겹기만 했고 개념은 다 아는 것만 같았습니다. 하지만 규토 라이트를 통해 제대로 된 기출 학습과 약점훈련을 할 수 있었습니다.

두 번째는 규토님입니다. 일단 규토님은 등급에 따라 커리큘럼과 학습법을 알려주는데 이대로만 하면 100점도 가능하다고 생각합니다. 가장 도움되었던 학습법은 복습입니다. 뻔한 것 같지만, 알면서도 꺼려지는 게 복습입니다. 그리고 틀린 문제를 생각 없이 계속 푸는 것이 아니라, 제대로 된 복습 가이드를 정해주셔서 이대로만 하면 된다는 점이 좋았습니다. 저는 비록 9월 중순부터 시작해서 전체적으로는 3회독밖에 못했지만... 설명할 수 있을 때까지 계속 풀고 또 풀었습니다. 또한 이메일로 직접 질문을 받아주시는데요, 질문하는 문제에 따라서 가끔 제게 필요한 보충문제나 영상 덕분에 빠르게 이해할 수 있었습니다. 그리고 똑같은 문제를 계속 틀리거나, 사실 모의고사에서 안 좋은 점수를 받는 등 막막할 때가 많았는데, 그 때마다 실질적인 말씀을 많이 해주셨습니다. 'theme 안의 문제들은 서로 다른 문제들이지만 이 문제들이 똑같이 느껴질 때 비로소 이해한 것' 이라는 말이 아직도 기억에 남네요. 전 이 말을 듣고 깨달음이 크게 왔고 그 뒤로 수학에 대한 감을 제대로 잡았던 것 같아서 써봅니다. 이외에, 6월 9월 보충프린트도 너무 감사했습니다.

저는 비록 9월 중순부터 규토 라이트를 시작했지만 재수 초기로 돌아간다면 규토 라이트로 시작해서 규토 고득점으로 끝내지 않았을까 싶습니다. 제대로 된 기출 학습을 원하시는 분들은 규토 라이트하세요 !!

추천사

9월 수학 3등급에서 수능 수학 1등급으로! (노유정)

규토 라이트 수1, 수2로 학습하여 짧은 기간 동안 9월 3 → 수능 1의 성적향상을 이루었습니다. 저는 8월에 수시 지원 계획이 바뀌며 급하게 수능 준비를 하게 되었습니다. 수능은 100일 정도 밖에 남지 않았는데 개념은 거의 다 까먹었고, 원래 수학을 못하는 학생이었기 때문에 (1,2 학년 학평은 대부분 3등급) 수학이 가장 걱정되는 과목이었습니다. 그래서 짧은 기간 동안 개념 숙지와 문제 풀이를 할 수 있는 교재를 찾다가 규토 라이트를 접하게 되었습니다.

개념 인강을 들으면서 해당되는 단원의 문제를 하루에 약 60문제 정도 풀어서 10월 말 정도에 규토 1회독을 끝냈습니다. 그 후에는 시간이 부족해서 1회독 후 틀린 문제와 기출 위주로만 반복적으로 보았습니다.

규토라이트는 효율적인 학습을 가능하게 하는 책입니다. 기존의 기출 문제집을 풀 때는 난이도별로 구분이 되어있지 않아 제 수준에 맞지 않는 문제를 풀면서 시간을 낭비했던 적이 많습니다. 그러나 규토 라이트를 통해 공부할 때는 개념 숙지에서 고난도 문제 풀이로 넘어가는 과정이 효율적이었습니다. 특히, 지나치게 어려운 문제도 쉬운 문제도 없기 때문에 실력 향상에 큰 도움이 되었습니다. 가이드에 적혀있는 대로 충분히 고민을 하고, 안 풀릴 경우에는 다음 날 다시 풀거나 2회독 때 풀기로 표시를 해두었습니다. 마스터 스텝을 제외하고는 이렇게 하면 대부분 해결할 수 있었던 것 같습니다.

이러한 교재 특성 때문에 수학을 잘 못하는 학생이었음에도 원하는 성적을 얻을 수 있었습니다. 제 사례와 같이 급하게 수능 준비를 하거나, 스스로 수학머리가 없다고 생각하는 수험생들에게 규토를 추천해주고 싶습니다.

추천사

[수2 공부법] 수포자에서 수능 수학 백분위 92%!

규토 라이트 n제 수2 리뷰를 할 수 있어서 정말 영광입니다. 먼저 전 나형 수포자였습니다. 현역시절 맨 앞장에 4문제정도 풀고 운이 좋으면 7~8번까지도 풀리더라고요. 그리고 주관식 앞에 쉬운 2문제 정도 풀고 다 찍었습니다. 항상 6~7등급 찍은게 몇 개 맞으면 5등급까지 갔습니다. 생각해보면 수학을 제대로 공부해본 적이 없었고 주위에서 수학은 절대 단기간에 할 수 없다. 그냥 그 시간에 영어나 탐구를 더하라는 말에 현역시절 수학을 제대로 집중해서 문제를 푼 적이 없었습니다. 현역시절 제가 받은 성적은 6등급 타과목도 잘치지 못한 탓에 재수를 결정했고 불현듯 수학공부를 해야겠다는 생각을 했습니다. 어쩌면 내 일생에 단 한 번뿐인데 수학공부한 번 해보자라고 마음먹었습니다. 다른 과목보다 수2가 문제였습니다. 확통이나 수1에 비해 분명히 해야 할 부분이 저에게 많았기 때문이었습니다. 2월에 본격적으로 수2과목을 빠르게 개념정리를 했습니다. 수2만은 전년도와 교육과정의 크게 바뀌지 않은 탓에 빠르게 개념인강과 교과서로 정독했습니다. 아주 쉬운 기초부터 시작한 셈이죠. 교과서와 개념인강을 3회독정도 해보니 아주 쉬운 유형들은 풀 수 있게 되었습니다. (이를테면 함수의 극한에서 그래프를 주고 좌극한과 우극한의 합차 유형이나 간단한 미분 적분 계산 문제 함수의 극한꼴 정적분의 활용 중 속도 가속도문제등) 교과서 유제에도 그리고 평가원 기출에도 매번 나오는 유형들은 교과서만으로도 풀 수 있었습니다. 하지만 처음 보는 낯선 유형과 함수의 추론등 기초가 부족한 저에게 이런 문제들은 거대한 벽과 다름없었습니다. 과연 1년 안에 내가 이런 문제를 극복가능한 것일까. 교과서와 개념인강만으로는 해결할 수 없었습니다. 충분히 고민한 뒤에 제가 내린 결론은 문제의 양을 늘려야한다는 것이었습니다. 소위 수포자는 당연하게도 수학경험치가 현저히 낮습니다. 특히 함수 나오고 그래프 나오면 정말 무너지기 쉽죠. 그렇다고 1년도 안 남은 시점에서 중학수학과 고1수학을 체계적으로 본다는 것은 너무 어려운 일입니다. 1년안에 승부를 봐야하는 제 입장에서 현명한 선택이 아니었습니다. 그러다 우연히 커뮤니티에서 규토라이트n제를 알게 됐고 많은 리뷰와 블로그 내용을 꼼꼼히 보고 선택하기로 결정했습니다. 제가 규토 라이트 수2 n제를 택했던 근본적 이유는 충분한 문제량과 더불어 제 기본기를 탄탄하게 보완시켜줄 문제들이 다수 실려있었기 때문입니다.

개념익히기와 <1 step> 필수유형편에서 기초적인 문제와 더불어 조금 심화된 문제까지 정말 질 좋은 문제들을 많이 풀었습니다. 양과 질을 동시에 확보한 셈이죠. 수능은 이차함수나 일차함수등 중학수학을 대놓고 물어보진 않습니다. 문제에서 가볍게 쓰이는 정도이죠. 수2를 공부하시면 많은 다항함수를 접하시게 되는데 라이트n제 필수유형편으로 충분히 커버됩니다.

다음으로는 제가 가장 애정했던 <2 step> 기출적용편입니다. 시중에는 정말 많은 기출문제집이 있지만 규토n제 수2만이 갖는 특별함은 바로 최신경향을 반영한 교육청 사관학교 평가원 기출들만으로 공부할 수 있다는 점입니다. 일부 기출문제집은 최근 트렌드에 맞지않는 문제들도 있고 또한 교육과정이 변했음에도 이전 교육과정의 문제들도 있는 반면 라이트n제 수2는 규토님의 꼼꼼한 안목으로 꼭 필요한 기출만을 선별했고 따로 다른 기출을 살 필요없이 실린 문제들만 잘 소화해도 기출을 잘 풀었다는 느낌을 받을 수 있을 겁니다. 저도 성적향상에 가장 도움이 됐던 step이었습니다. 하지만 이 단계부터 문제가 어렵습니다. 특히나 수포자나 수학이 약하시분들은 정말 힘들 수 있습니다. 하지만 저는 포기하지 않고 끝까지 풀었습니다. 심지어 위에 빈칸에 체크가 7개가 되는 문제도 있었습니다. 시간차를 두고 보고 또봤습니다. 서두에서 규토님께서 제시한 수학 학습법에 의거해 복습날짜도 정확히 지키며 공부했습니다. 수학이 어려운 학생부터 조금 부족한 학생까지 <2 step>만큼은 꼭 공을 들여서라도 여러 번 회독하셨으면 좋겠습니다. 수능은 어찌 보면 기출의 진화라고 할 만큼 기출에서 크게 벗어나지 않습니다. 꼭 여러 번 회독하셔서 시험장에서 비슷한 유형은 빠른 시간 안에 처리할 수 있을 만큼 두고두고 보셨으면 좋겠습니다. <2 step>를 잘소화했더니 6월과 9월을 응시했을때 어?! 이거 규토라이트 n제 수2에서 풀었던 느낌을 다수문제에서 받았습니다. (다항함수에서의 실근의 개수 정적분의 넓이 미분계수의 정의등 단골로 나오는 유형이있습다.) 역시나 기출의 반복이었습니다. 규토라이트 n제 수2를 통해 최신 트렌드 경향에 맞는 유형을 여러 문제를 통해 접하다 보니 정말 신기하게 풀렸고 어렵지 않게 풀 수 있었습니다. 규토 라이트n제는 해설이 정말 좋습니다. 제가 기본기가 부족했던 시기에도 규토해설만큼은 이해될 만큼 자세히 해설되어있고 현장에서 사용할 수 있을만큼 완벽한 해설지라고 생각합니다. 제 풀이와 규토님 풀이를 비교해보면서 좀 더 현실적인 풀이를 찾는 과정에서 제 실력도 많이 향상되었습니다.

추천사

마지막 마스터 스텝은 굉장한 난이도의 기출과 규토님의 자작문제들이 실려있습니다. 제가 굉장히 고생한 스텝이었고 실제로 수능 전날까지 정말 안되는 문제들도 몇 개 있었습니다. 1등급을 원하시는 분들은 꼭 넘어야할 산이라고 생각합니다. 1등급이 목표가 아니더라도 마스터 스텝에 문제는 꼭 풀어보실만한 가치가 있습니다. 문제가 풀리지 않더라도 그 속에서 수학적 사고력이 향상되는 경우가 있고 저도 올해 수능 20번을 맞출만큼 실력이 올라온 것도 마스터스텝 문제를 여러 번 심도 있게 고민해본 결과가 아닐까 싶습니다. 시간이 조금만 남았더라면 30번도 풀 수 있을 만큼 제 수학실력이 많이 올라와 있었습니다. 라이트 n제 수2를 구매하시는 분들은 1문제도 거르지 마시고 완벽하게 다 풀어보는 것을 목표로 삼고 공부하시면 좋은 성과가 꼭 나올거라 생각합니다.

끝으로 저는 수포자였지만 결국 이번 수능에서 2등급을 쟁취하였고 목표한 대학에 붙을 점수가 나온 것 같습니다. ㅎㅎㅎ 수학이 힘든신 문과생분들! 수학에서 가장 중요한 것은 제가 생각하기에 정확한 개념과 많은 문제양을 풀어 수학에 대한 자신감을 키우는 것 이라고 생각합니다. 특히나 수2는 절대적인 양 확보가 정말 중요합니다. 하지만 교과서와 쉬운 개념서로는 한계가 있고 다른 기출문 제집을 보자니 너무 두껍고 양이 많습니다. 라이트n제 수2 각유형별로 기본부터 심화까지 한 권으로서 문제풀이의 시작과 마무리를 다할 수 있는 교재라고 자부합니다. 올해만 하더라도 규토라이트 n제 수2교재로 다항함수 특히 3차함수 개형 그리기만도 수백번이 넘었던 것 같습니다. 시중 문제집과 컨텐츠가 난무하는 시기에 규토 라이트n제를 우연히 알게 되고 끝까지 믿고 풀었던 것에 감사하며 수포자도 노력하면 할 수있다는 말씀드립니다. 규토 라이트n제 수2 강추합니다!! 끝으로 규토님께도 감사드립니다 :)

수학에 자신이 없었지만 수능 수학 100점! (김은주)

저는 유독 수학에 자신이 없었던, 2등급만 나오면 대박이라고 여겼던 학생이었습니다. 그랬던 제가 규토 라이트 N제를 공부하고 수능에서 100점을 받을 수 있었습니다.

코로나 19와 개인적인 사정으로 인해 학원에 다닐 수 없었던 저는 시중에 출판된 여러 문제집을 비교하며 독학에 적합한 교재를 찾는 중에 규토 라이트를 고르게 되었습니다.

많은 장점 중 제가 꼽은 이 책의 가장 큰 장점은 바로, “이 책을 공부하는 방법(?)”이 마치 과외를 받는 기분이 들도록 수험생의 입장을 고려해서 세세하게 서술되어있기 때문이었습니다.

규토 N제를 만나기 전의 저는 나쁜 습관이 가득한 학생이었고, 그것이 제 성적을 갇아먹는 요인이었습니다. (찍어서 우연히 맞은 문제, 알고 보니 풀이 과정에서 오류가 있었는데 답만 맞은 문제도 그저 답이 맞으면 동그라미표시를 하고 다시 보지 않았고, 조금 복잡하거나 어려워보이는 문제는 지레 겁을 먹고 풀기를 꺼리는 등) 그래서인지 처음 책을 접했을 때는 문제를 풀고 풀이과정을 해설지와 일일이 대조해보고 백지에 다시 풀이과정을 써보느라 한 문제를 푸는데도 시간이 오래 걸렸고, 생각보다 쉽게 풀리지 않는 문제들이 많아서 충격을 받기도 했습니다. 그럴 때마다 앞부분에 실려있는, 과거 이 책으로 공부했던 다른 분들의 후기를 읽으며 잘 하고 있는거라고 스스로를 다독였습니다. 그러다보니 뒤로 갈수록 문제가 조금씩 풀리기 시작했고, 처음 풀어서 완벽히 맞는 문제가 나오면 (책 앞부분에 선생님께서 언급하신) 희열을 느끼기도 했습니다.그 령게 1회독을 하고 나니 다른 모의고사를 볼 때에도 규토를 풀며 체계적으로 훈련했던 감각들이 되살아나서 예전이라면 손도 못 대었을 문제도 풀 수 있게 되었습니다.

책 제목인 라이트와 다르게, 문제들이 분명 쉽지만은 않은 것은 사실입니다. 그렇지만 시간이 오래 걸리더라도 책에 실린 방법대로 끈질기게 물고 늘어지고 스스로에게 엄격해진다면 분명 이 책이 끝날 시점에는 실력 향상이 있을거라고 자신합니다.

늘 고민을 안겨주는 과목이었던 수학을 하면 되는 과목으로 생각할 수 있도록 좋은 책 집필해주신 규토선생님께 진심으로 감사드리고 내년 수능을 준비하시는 분들에게도 이 책을 추천합니다. (규토 고득점 N제도 추천합니다.!)

참고로 모든 추천사는 라이트 N제 구매 인증과 성적표 인증 후 수록하였습니다.
자세한 인증내역은 네이버 카페 (규토의 가능세계)에서 확인하실 수 있습니다.

함수의 극한과 연속

1. 함수의 극한

2. 함수의 연속

Guide step

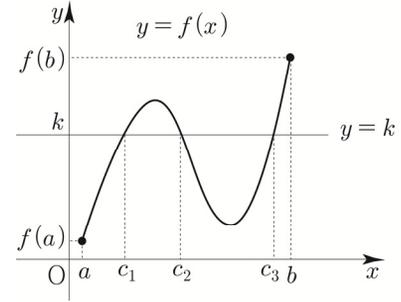
개념 익히기편

2. 함수의 연속

사잇값의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 끊어지지 않고 연결되어 있다.

따라서 $f(a) \neq f(b)$ 일 때, 오른쪽 그림과 같이 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 직선 $y=k$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 적어도 한 점에서 만난다는 것을 알 수 있다.



사잇값의 정리 요약

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 일 때, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 $f(c)=k$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

Tip 사잇값을 이용할 때는 주어진 전제조건들을 잘 살펴보아야 한다. 즉, a 와 b 사이의 구간은 닫힌구간이어야 하고, 그 구간 안에서 함수 $f(x)$ 는 연속이어야 하며 $f(a) \neq f(b)$ 이어야 한다. 이러한 전제 조건들 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 사잇값의 정리를 이용할 수 없다.

사잇값의 정리의 활용

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)f(b) < 0$ 이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

- Tip 1** 실전적으로 볼 때, 사잇값의 정리보다는 사잇값의 정리의 활용을 기억하는 편을 추천한다.
- Tip 2** 사잇값의 정리의 활용에서 $f(a)f(b) < 0$ 라는 말은 $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 다르다는 뜻이다. 만약 $f(a)f(b) > 0$ 즉, $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 같다면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 (a, b) 에서 실근이 존재하지 않을 수도 있다.
- Tip 3** 사잇값의 정리는 c 가 정확히 무엇인지 혹은 c 가 몇 개 존재하는지가 궁금한 것이 아니라 전제조건을 만족시키기만 하면 Simple하게 “ c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.” 라는 말을 하고 싶은 것이다.

Tip 4 구간을 쪼개서 사잇값의 정리를 사용하는 문제가 출제될 수도 있다.
예를 들어 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ 이라 할 때,
방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 3)$ 에서 적어도 몇 개의 실근을 가지는지 판단해보자.

관성적으로 접근하면 $f(1)f(3) < 0$ 이 아니라서 난감할 수 있는데
이 때, 닫힌구간 $[1, 3]$ 을 $[1, 2]$ 와 $[2, 3]$ 로 쪼개서 생각해볼 수 있다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이므로 닫힌구간 $[1, 2]$, $[2, 3]$ 에서도 모두 연속이다.

$f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의해서 $f(c_1) = 0$ 인

c_1 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재하고

마찬가지로 $f(2)f(3) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의해서 $f(c_2) = 0$ 인

c_2 가 열린구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 3)$ 에서 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

Tip 5 만약 방정식이 $f(x) = 0$ 꼴이 아니라면 방정식을 변형하여 $f(x) = 0$ 꼴로 만들자.
예를 들어 방정식 $g(x) = 1$ 를 방정식 $g(x) - 1 = 0$ 로 변형한 뒤
 $g(x) - 1 = f(x)$ 라 치환하면 $f(x) = 0$ 꼴로 만들 수 있다.
그 다음 사잇값의 정리의 활용을 사용하면 된다.

■ 예제 7

방정식 $x^3 + x = 3$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

|| 풀이 ||

$$x^3 + x = 3 \Rightarrow x^3 + x - 3 = 0$$

$f(x) = x^3 + x - 3$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 7 > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c) = 0$ 인

c 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3 + x = 3$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

■ 개념 확인문제 7

방정식 $x^4 - x - 1 = 0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

1 Theme 함수의 연속

001

함수 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x < 1) \\ x^2+a & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

002

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & (x \neq 2) \\ a & (x = 2) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

003

함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax-2}{x-1} & (x \neq 1) \\ b & (x = 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 상수이다.)

004

함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2+x & (|x| > 1) \\ x^2+ax+b & (|x| \leq 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-4b$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 상수이다.)

005

함수 $f(x) = \frac{2x-1}{ax^2+ax+2}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

006

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 $(x-2)f(x) = x^2+ax+4$ 를 만족시킬 때, $f(2)+f(3)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)
 ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

| 007



함수 $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & (x < 2) \\ ax-1 & (x \geq 2) \end{cases}$ 에 대하여

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 합을 구하시오.

| 008



함수 $f(x) = \begin{cases} x^2+a+1 & (x < a) \\ 2a+3 & (x \geq a) \end{cases}$ 가 실수 전체의

집합에서 연속이고 $\lim_{x \rightarrow 2a} f(x) < 5$ 일 때,

$f(a-2)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

2 Theme 연속함수의 성질

| 009



두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x+5 & (x < 3) \\ 2 & (x \geq 3) \end{cases}, \quad g(x) = ax-9$$

에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서

연속일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

| 010



함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 를 만족시키고,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-2ax+b & (-2 \leq x < 0) \\ ax+3 & (0 \leq x < 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

Guide step

개념 익히기편

1. 미분계수와 도함수

01 미분계수

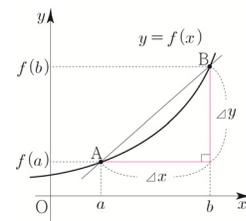
성취 기준 | 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.
 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

개념 파악하기

(1) 평균변화율이란 무엇일까?

평균변화율

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때, y 의 값은 $f(a)$ 에서 $f(b)$ 까지 변한다.
 이때 x 의 값의 변화량 $b-a$ 를 x 의 **증분**, y 의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$ 를 y 의 **증분**이라 하고,
 이것을 기호로 각각 Δx , Δy 와 같이 나타낸다.
 즉, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ 이다.



Tip 기호 Δ 는 Difference(차)의 머리글자 D에 해당하는 그리스 문자로, 'delta'라고 읽는다.

x 의 증분 Δx 에 대한 y 의 증분 Δy 의 비율
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 를 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때,
 함수 $y = f(x)$ 의 **평균변화율**이라고 한다.

Tip 평균변화율은 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같다.

예제 1

함수 $f(x) = x^2 + 2$ 에서 x 의 값이 다음과 같이 변할 때, 평균변화율을 구하시오.

- (1) 1에서 2까지
- (2) 2에서 $2 + \Delta x$ 까지

풀이

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{6 - 3}{1} = 3$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2 + \Delta x)^2 + 2 - 6}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

개념 확인문제 1

함수 $f(x) = x^2 + x$ 에서 x 의 값이 다음과 같이 변할 때, 평균변화율을 구하시오.

- (1) 1에서 3까지
- (2) 1에서 $1 + \Delta x$ 까지

Training – 2 step

기출 적용편

1. 미분계수와 도함수

| 072 | 2018학년도 수능 나형

최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4} \text{을 만족시킬 때,}$$

 $f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

| 073 | 2012년 고3 3월 교육청 가형

함수 $f(x) = x|x| + |x-1|^3$ 에 대하여 $f'(0) + f'(1)$ 의 값은? [4점]

- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

| 074 | 2014학년도 수능예비시험 B형

 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $2x \leq f(x) \leq 3x$ 이다. $f(1)=2$ 이고 $f(2)=6$ 일 때, $f'(1) + f'(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

| 075 | 2021학년도 수능 나형

두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} = 2 \text{를 만족시킨다.}$$

함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 에 대하여 $h'(0)$ 의 값은? [4점]

- ① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

| 076 | 2011학년도 고3 6월 평가원 가형

최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = 4 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 4 \end{aligned}$$

| 077 | 2021년 고3 3월 교육청 공통

두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} = 5 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1} = 7 \end{aligned}$$

두 실수 a, b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-a}{x-1} = b \times g(1)$ 일 때, ab 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Master step

심화 문제편

1. 미분계수와 도함수

080



연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(2x+1) = f(x) + 3x^2 - ax$ 이다.
- (나) 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 $-\frac{1}{2}$ 에서 3까지 변할 때의 평균변화율은 b 이다.

$10(b-a)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

081

| 2015년 고3 3월 교육청 B형



삼차함수 $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 1$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

미분가능하도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때,

$p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

082



함수 $f(x) = x^3 - 3x$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ f(x-a)+b & (x < 0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
- (나) 실수 t 에 대하여 방정식 $g(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow c^+} h(t) + h(c) = \lim_{t \rightarrow c^-} h(t)$ 이다.

$a+2b+3c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.)

Guide step

개념 익히기편

2. 도함수의 활용

01 접선의 방정식

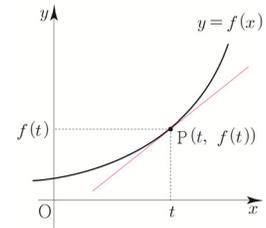
성취 기준 | 접선의 방정식을 구할 수 있다.

개념 파악하기 (1) 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

접선의 방정식 유형 ① 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

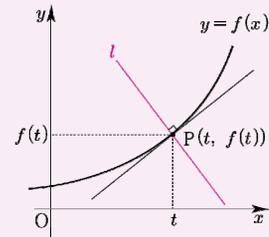
함수 $f(x)$ 가 $x=t$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $x=t$ 에서의 미분계수 $f'(t)$ 와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 접하는 접선은 점 $(t, f(t))$ 를 지나고 기울기가 $f'(t)$ 인 직선이므로 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이다.



Tip 1 점 (a, b) 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y=m(x-a)+b$ 이다.

Tip 2 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선 l 의 방정식은 $y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$ (단, $f'(t) \neq 0$)이다.



예제 1

다음 물음에 답하시오.

- 곡선 $y=x^2+x+2$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.
- 곡선 $y=2x^2-x$ 위의 점 $(-1, 3)$ 을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

풀이

(1) $f(x)=x^2+x+2$ 라 하면 $f'(x)=2x+1$

점 $(1, 4)$ 에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(1)=3$ 이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3(x-1)+4$ 이므로 $y=3x+1$ 이다.

(2) $f(x)=2x^2-x$ 라 하면 $f'(x)=4x-1$

점 $(-1, 3)$ 에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(-1)=-5$ 이다.

이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면 $f'(-1) \times m = -1$ 이므로 $m = -\frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{5}$

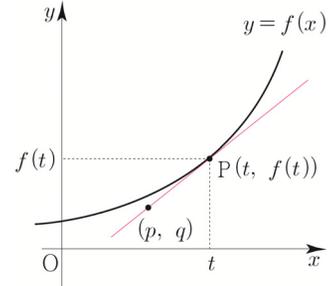
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y = \frac{1}{5}(x+1)+3$ 이므로 $y = \frac{1}{5}x + \frac{16}{5}$ 이다.

접선의 방정식 유형 ④ 두 곡선에 동시에 접하는 접선

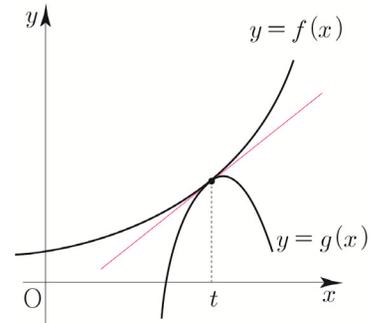
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 동시에 접하는 직선은 다음과 같이 case분류할 수 있다.

(1) 접점의 x 좌표가 동일한 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때,
 $x=t$ 에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 동시에
 접하는 직선의 방정식은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의
 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t, g(t))$ 에서의 접선이 서로 일치하므로
 다음과 같은 방법으로 구한다.

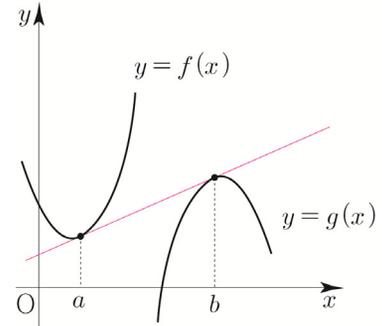


- ① $x=t$ 에서의 함수값이 같다. $\Rightarrow f(t)=g(t)$
- ② $x=t$ 에서의 접선의 기울기가 같다. $\Rightarrow f'(t)=g'(t)$



(2) 접점의 x 좌표가 동일하지 않은 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 동시에
 접하는 직선의 방정식은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선과
 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(b, g(b))$ 에서의 접선이 서로 일치한다.
 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수, $y=g(x)$ 의 $x=b$ 에서의 미분계수,
 두 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, g(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 모두 같으므로
 다음과 같은 방법으로 구한다. (단, $a \neq b$)



$$f'(a) = g'(b) = \frac{g(b) - f(a)}{b - a}$$

Tip

$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(a)x - af'(a) + f(a)$ 와
 $y = g'(b)(x-b) + g(b) = g'(b)x - bg'(b) + g(b)$ 가 같아야 하므로

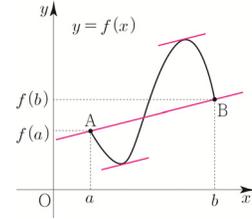
- ① 기울기가 같다. $\Rightarrow f'(a) = g'(b)$
- ② y 절편이 같다. $\Rightarrow -af'(a) + f(a) = -bg'(b) + g(b)$
 $\Rightarrow -af'(a) + f(a) = -bf'(a) + g(b) (\because f'(a) = g'(b))$
 $\Rightarrow f'(a) = \frac{g(b) - f(a)}{b - a} (\because a \neq b)$

따라서 $f'(a) = g'(b) = \frac{g(b) - f(a)}{b - a}$ 이다.

평균값 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (a, b) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$



Tip 1 평균값 정리는 열린구간 (a, b) 에서 직선 AB와 평행한 곡선 $y=f(x)$ 의 접선이 적어도 하나 존재함을 의미한다.

Tip 2 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$ 이면 두 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는 0이므로 평균값 정리는 롤의 정리를 일반화한 것이다.

Tip 3 평균값 정리에서 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하다는 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 평균값 정리가 성립하지 않는다.

(1) 불연속인 함수

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases} \text{는 열린구간 } (0, 1) \text{에서 미분가능하고}$$

$$f(0)=0, f(1)=1 \text{이므로 } \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1 \text{이지만 } 0 < c < 1 \text{인 모든 } c \text{에 대하여}$$

$f'(c)=0$ 이다. 따라서 $f'(c)=1$ 을 만족시키는 실수 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재하지 않는다.

(2) 미분가능하지 않은 함수

함수 $f(x)=|x|$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이지만 $-1 < c < 2$ 인 c 에 대하여

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \text{을 만족시키는 실수 } c \text{는 존재하지 않는다.}$$

평균값 정리 증명

평균값 정리를 증명해보자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의

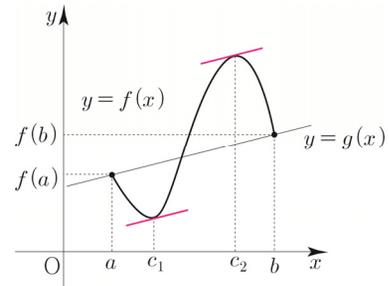
방정식을 $y=g(x)$ 라고 하면 $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ 이다.

이때 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하며 $h(a)=h(b)=0$ 이다.

따라서 롤의 정리를 이용하면

$$h'(c) = f'(c) - g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \text{인 } c \text{가 열린구간 } (a, b) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

즉, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.



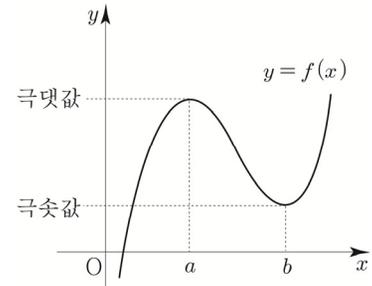
Tip 평균값 정리는 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하면 되고 만약 1회독 중인 학생이라면 증명과정은 넘어가도 된다.

개념 파악하기 (6) 함수의 극대와 극소란 무엇일까?

함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

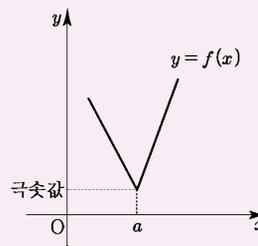
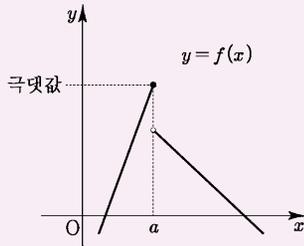
- ① $f(x) \leq f(a)$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극대**가 된다고 하고,
그 때의 함수값 $f(a)$ 를 **극댓값**이라고 한다.
- ② $f(x) \geq f(a)$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극소**가 된다고 하고,
그 때의 함수값 $f(a)$ 를 **극솟값**이라고 한다.



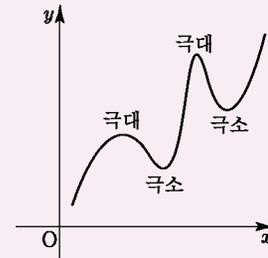
Tip 1 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간이라는 뜻은 $x=a$ 를 포함하는 아주 작은 열린구간이라고 생각하면 된다.

Tip 2 극대 극소의 정의를 보면 $f(x)$ 가 연속이나 미분가능해야 한다는 전제조건이 없다. 따라서 불연속 혹은 미분가능하지 않아도 함수값만 존재한다면 극대와 극소가 존재할 수 있다.

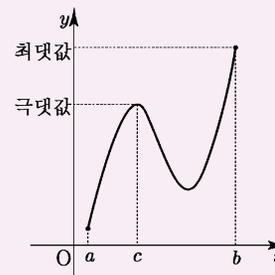
ex $x=a$ 에서 불연속해도 $x=a$ 에서 극대 **ex** $x=a$ 에서 미분가능하지 않아도 $x=a$ 에서 극소



Tip 3 극대와 극소는 여러 개 존재할 수 있고 극댓값이 극솟값보다 항상 큰 것은 아니다.



Tip 4 극댓값(극솟값)이 꼭 최댓값(최솟값)은 아니다.



Tip 5 $f(x)$ 가 상수함수라면 $x=a$ 에서 극값을 갖는 a 는 무수히 많다. 이때 함수값 $f(a)$ 는 극댓값도 되고 극솟값도 된다.

04 함수의 그래프

성취 기준 | 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

개념 파악하기 (7) 함수의 그래프의 개형은 어떻게 그릴까?

함수의 그래프의 개형 그리기

미분가능한 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같은 과정으로 그릴 수 있다.

- ① 도함수 $f'(x)$ 를 그린다.
- ② $f'(x)$ 의 부호를 판단하여 증감을 고려한 대략적인 $f(x)$ 를 그린다.
- ③ 극댓값 or 극솟값 or x 절편 or y 절편 등을 고려하여 디테일하게 함수값을 표시한다.
- ④ 최종적으로 ②+③을 고려하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린다.

Tip 1 ①에서 $f'(x)$ 의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$ 를 그릴 때, y 축은 생략가능하다.

Tip 2 $f'(x)$ 의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$ 에서 항상 양수인 부분은 고려하지 않아도 된다.

ex1 $f'(x) = 10x(x-1)$ 이라면 $f'(x) = x(x-1)$ 라 두고 판단해도 된다.

ex2 $f'(x) = (x^2+1)x$ 이라면 $f'(x) = x$ 라 두고 판단해도 된다.

이때 두 번째 $f'(x)$ 를 **Semi 도함수**라고 하자. (소통을 위한 필자와의 약속)

Tip 3 위와 같은 방식 즉, 증감표를 그리지 않고 $f'(x)$ 를 그려서 $f'(x)$ 의 부호를 판단하려면 x 절편을 바탕으로 3차 이상의 다항함수를 빨리 그릴 수 있어야 한다. (방법은 아래와 같다.)

x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [1단계] - 시작 방향 정하기

① 홀수차 함수 ex) 일차함수, 삼차함수....

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.



Tip 일차함수를 생각하면 된다.

② 짝수차 함수 ex) 이차함수, 사차함수....

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

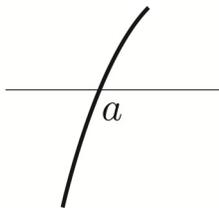


Tip 이차함수를 생각하면 된다.

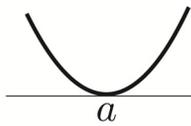
x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [2단계] - x 절편 이용하기

$f(x)$ 가 $(x-a)^n$ 을 인수로 가질 때, n 에 따라 case분류할 수 있다.

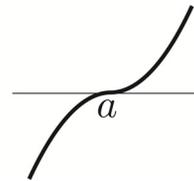
① $n=1 \Rightarrow (x-a)$



② $n=2 \Rightarrow (x-a)^2$ ($n \geq 2$ 인 짝수)



③ $n=3 \Rightarrow (x-a)^3$ ($n \geq 3$ 인 홀수)

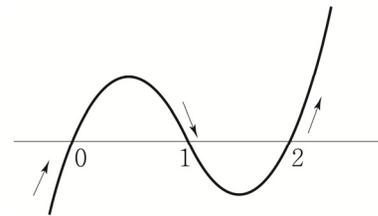


Tip ②은 스치는 접선형태(스접)를 갖고, ③은 뚫는 접선형태(뚫접)를 갖는다. 쉽게 말해서 ②은 $y=x^2$ 같은 느낌이고, ③은 $y=x^3$ 같은 느낌이다.

x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [3단계] - 실전연습

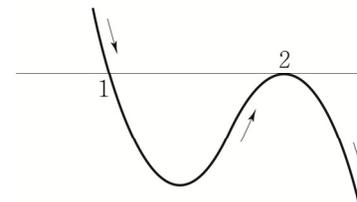
ex1 $y = x(x-1)(x-2)$

- ① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.
- ② x절편이 0, 1, 2이고 x , $(x-1)$, $(x-2)$ 를 인수로 가지므로 $x=0, 1, 2$ 을 통과해서 그려주면 된다.



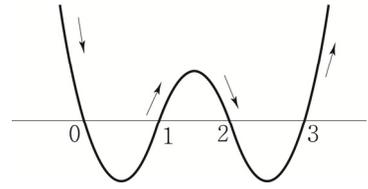
ex2 $y = -(x-1)(x-2)^2$

- ① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x절편이 1, 2이고 $(x-1)$, $(x-2)^2$ 를 인수로 가지므로 $x=1$ 를 통과하고 $x=2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



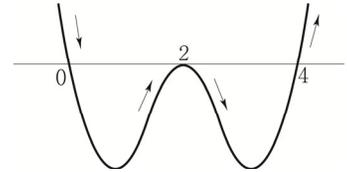
ex3 $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 1, 2, 3이고 x , $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ 을 인수로 가지므로 $x=0, 1, 2, 3$ 을 통과해서 그려주면 된다.



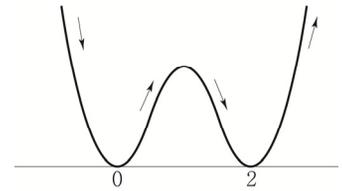
ex4 $y = x(x-2)^2(x-4)$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 2, 4이고 x , $(x-2)^2$, $(x-4)$ 를 인수로 가지므로 $x=0, 4$ 를 통과하고 $x=2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



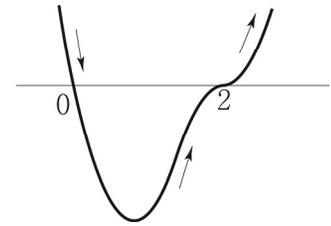
ex5 $y = x^2(x-2)^2$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 2이고 x^2 , $(x-2)^2$ 를 인수로 가지므로 $x=0, 2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



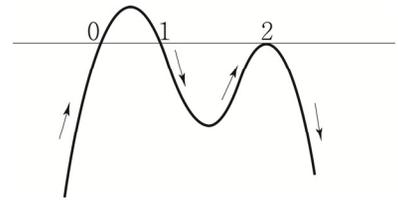
ex6 $y = x(x-2)^3$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 2이고 x , $(x-2)^3$ 를 인수로 가지므로 $x=0$ 을 통과하고 $x=2$ 에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



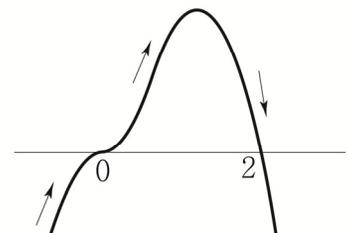
ex7 $y = -x(x-1)(x-2)^2$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 1, 2이고 x , $(x-1)$, $(x-2)^2$ 를 인수로 가지므로 $x=0, 1$ 을 통과하고 $x=2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



ex8 $y = -x^3(x-2)$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 2이고 x^3 , $(x-2)$ 를 인수로 가지므로 $x=2$ 를 통과하고 $x=0$ 에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



07 삼차함수와 사차함수의 그래프 (심화특강)

성취 기준 | 삼차함수와 사차함수의 그래프의 개형을 설명할 수 있다.

삼차함수와 사차함수의 특징을 설명할 수 있다.

식세우기 Technique을 이용하여 삼차함수와 사차함수에 관한 식을 빠르게 세울 수 있다.

개념 파악하기

(12) 곡선의 오목과 볼록은 어떻게 알 수 있을까?

이계도함수

함수 $f'(x)$ 의 도함수를 함수 $y=f(x)$ 의 **이계도함수**라 하고 기호로 $f''(x)$ 와 같이 나타낸다.

곡선의 오목과 볼록

이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록을 조사해 보자.

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여

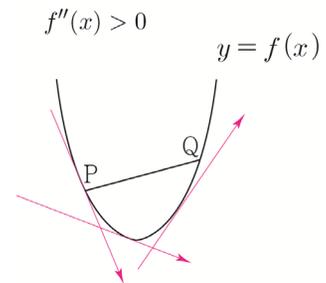
① 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면

곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 **아래로 볼록**하다고 한다.

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 항상 $f''(x) > 0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 의

접선의 기울기인 $f'(x)$ 는 증가하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 아래로 볼록하다.

ex $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 > 0$



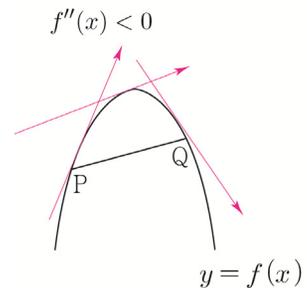
② 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 위쪽에 있으면

곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 **위로 볼록**하다고 한다.

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 항상 $f''(x) < 0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 의

접선의 기울기인 $f'(x)$ 는 감소하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다.

ex $f(x) = -x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow f''(x) = -2 < 0$



Tip 1

$f''(x)$ 는 $f'(x)$ 의 도함수이므로 $f''(x)$ 의 부호로 $f'(x)$ 의 증감을 파악할 수 있다.
즉, $f''(x)$ 의 부호는 접선의 기울기의 증감에 관련되어 있다.

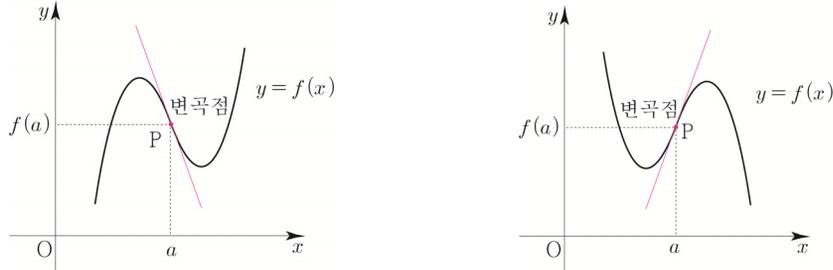
Tip 2

사실 이계도함수는 수2가 아닌 미적분에서 배우는 내용이다.
하지만 이계도함수를 학습하고 나면 삼차함수와 사차함수를 가볍게 위에서 내려다 볼 수 있다.
그렇게 어려운 개념도 아니고 학습하는 것을 추천한다.

변곡점

곡선의 모양이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 를 경계로 하여 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀌거나 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀔 때, 점 P 를 곡선 $y=f(x)$ 의 **변곡점**이라 한다.

즉, 함수 $f(x)$ 에서 $f''(a)=0$ 이고, $x=a$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.



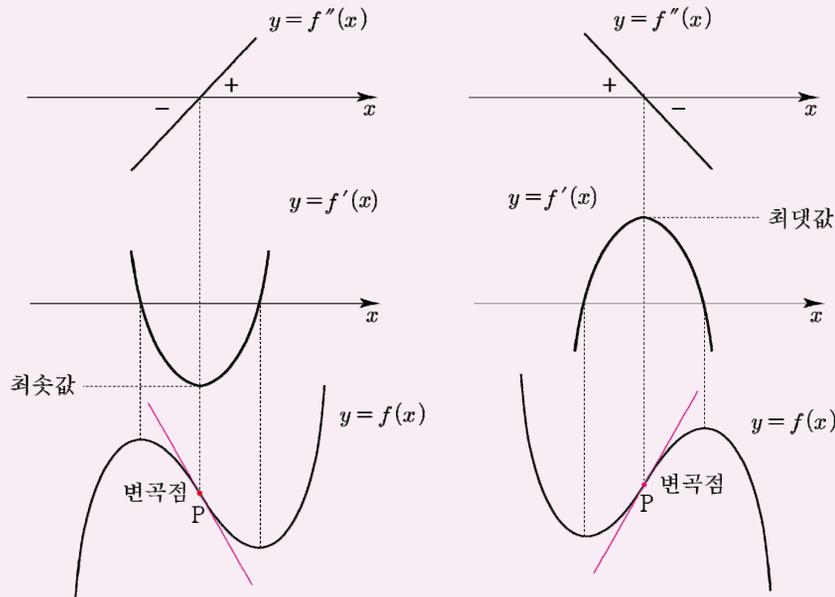
Tip 1 $f''(a)=0$ 이면 항상 변곡점일까? 답은 “아니다.”이다. 예를 들어 $f(x)=x^4$ 는 $f''(0)=0$ 이지만 $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)>0$ 이므로 점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이 아니다. 따라서 $f''(a)=0$ 인 것뿐만 아니라 $x=a$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌는지 확인해줘야 한다.

Tip 2 특별히 변곡점에서의 접선을 **변곡점접선**이라 부른다. 곡선이 변곡점에서 접선을 가지면 곡선은 그 점에서 접선과 교차한다. 즉, 뚫집(뚫는 접선)이 그려진다. 참고로 수2에서도 변곡점접선을 출제하기 시작했으니 이번 기회에 확실히 알아두자.

특히 삼차함수에서의 변곡점접선은 접선들 중 기울기가 $f(x)$ 의 최고차항의 계수의 부호에 따라 제일 작거나 제일 크기 때문에 출제하기 아주 좋은 포인트이다. (곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(a)$ 와 같다.)

① $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수

② $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수

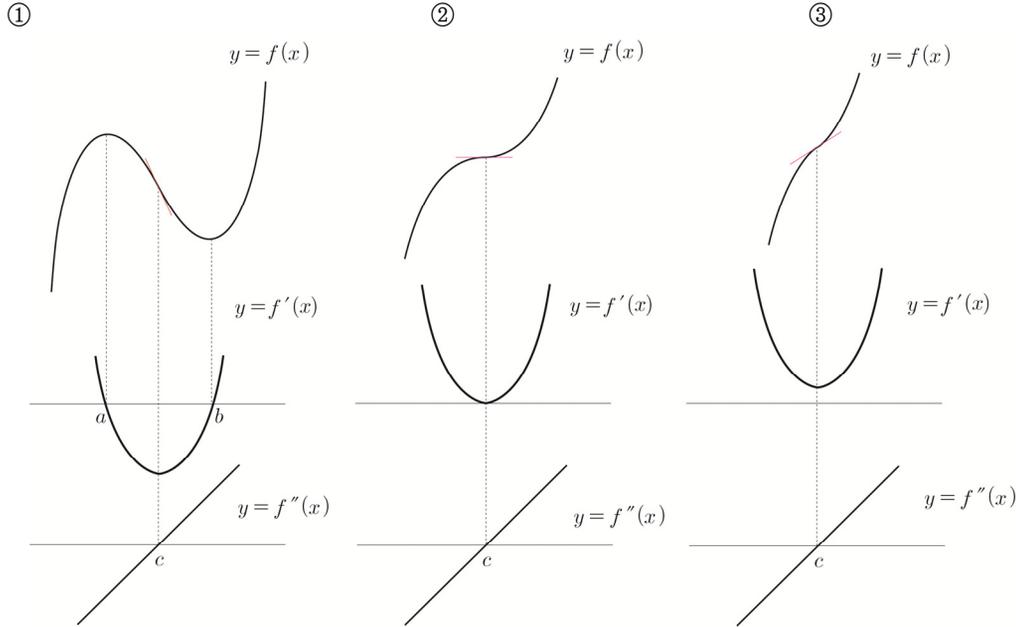


개념 파악하기

(13) 삼차함수의 그래프는 어떠한 특징을 가지고 있을까?

삼차함수의 그래프의 개형

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근의 개수에 따라 case분류할 수 있다.



Tip 1 위의 세 유형은 머릿속에 완벽히 각인 시켜야한다. 삼차함수 개형은 몇 가지? 3가지!

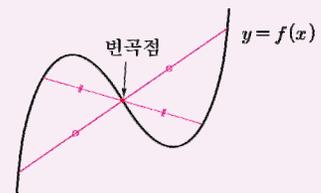
Tip 2 ①에서 $(c, f(c))$ 가 $y=f(x)$ 의 변곡점이다. $y=f''(x)$ 를 그리지 않고도 $y=f(x)$ 의 변곡점을 찾을 수 있다. $x=c$ 에서 $f''(x)$ 의 부호가 변하므로 $x=c$ 에서 $f'(x)$ 는 극값을 갖는다. 즉, $f'(x)$ 가 극값을 갖는 점의 x 값이 $y=f(x)$ 의 변곡점의 x 값이 된다.

Tip 3 (1) 증가함수 (2) 감소함수 (최고차항의 계수가 음수일 때) (3) 일대일 대응
 (4) 역함수 존재 (5) 극값 존재 X
 ⇒ ②, ③ 개형
 ⇒ 방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 해로 갖는다. (판별식 $D \leq 0$)

Tip 4 ③에서 $y=f'(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표가 c 이므로 $(c, f(c))$ 은 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

Tip 5 삼차함수를 두 번 미분하면 일차함수이므로 $f''(x)=Ax+B$ 는 반드시 x 축과 만나고, x 축과 만나는 점을 경계로 부호가 변하므로 모든 삼차함수는 변곡점을 갖는다.

Tip 6 모든 삼차함수는 변곡점에 대하여 대칭되어 있다.



삼차함수의 변곡점임을 알려주는 식

(i) $f(x) + f(2a - x) = 2b$

위의 식은 $f(x)$ 는 점 (a, b) 에 대칭되어 있다는 뜻이다. 모든 삼차함수는 변곡점에 대하여 대칭되어 있으므로 (a, b) 는 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

(ii) $f(x)$ 가 삼차함수일 때, $f'(x)$ 는 $x = a$ 에서 음수인 최솟값을 갖는다.

$f'(x)$ 가 $x = a$ 에서 최솟값, 최댓값을 갖는다는 의미는 $f'(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표가 a 라는 의미이므로 $(a, f(a))$ 가 $y = f(x)$ 의 변곡점임을 알려주지만
굳이 음수라고 한 이유는 극대와 극소를 모두 가지고 있는 삼차함수의 개형(①개형)임을 알려주기 위함이다.

(iii) $f(x)$ 가 삼차함수일 때, $f'(x) = f'(2a - x) \Leftrightarrow f'(a - x) = f'(a + x)$

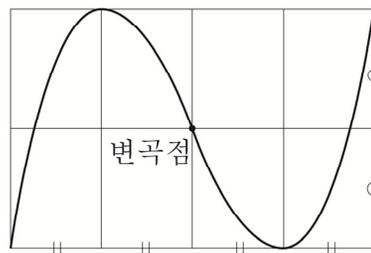
$f'(x)$ 가 $x = a$ 에 대하여 대칭되어 있다는 의미이다. 즉, $f'(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표가 a 이므로 $(a, f(a))$ 는 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

(iv) $f(x)$ 가 삼차함수일 때, $f'(1) = 0, f'(3) = 0$

$f'(x)$ 는 이차함수이므로 꼭짓점의 x 좌표는 $x = 1$ 과 $x = 3$ 의 중점인 $x = 2$ 이다.
따라서 $(2, f(2))$ 는 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

삼차함수의 비율관계

극소와 극대를 모두 가지는 삼차함수는 아래 BOX에 넣을 수 있다.



Tip 1 작은 사각형은 직사각형이 될 수도 있고 정사각형이 될 수도 있다.
즉, 문제조건에 따라 달라진다.

Tip 2 위 BOX를 통해 자연스럽게 삼차함수의 비율관계를 알 수 있다.

극값차 공식

오른쪽 그림과 같이 $f'(x)$ 가 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_{\alpha}^{\beta} |f'(x)| dx = S$ (표현형)

$\int_{\alpha}^{\beta} -f'(x) dx = f(\alpha) - f(\beta)$ 이므로 넓이 S 는 극값차이다.

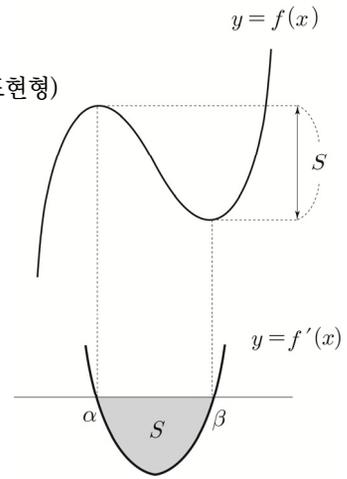
여기서 넓이 S 를 구할 때 우리가 자주 쓰는 적분 공식을 적용시켜 보자.

$f'(x)$ 의 최고차항의 계수를 A 라고 하면 $S = \frac{|A|}{6}(\beta - \alpha)^3$ (p294 참고)

여기서 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 $3a = A$ 이므로

즉, $S = \frac{|a|}{2}(\beta - \alpha)^3$ 이다.

따라서 극값차 = $\frac{|a|}{2}(\beta - \alpha)^3$ 이다.



Tip

적분을 배우지 않은 학생은 우선 공식만이라도 외워두도록 하자.
계산과정을 현격하게 줄여줄 수 있으니 외우는 것을 추천한다.

ex 삼차함수 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 $x=1, x=2$ 에서 극값을 가지고 $f(1) = 10$ 일 때,
 $f(2)$ 의 값을 구하시오.

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고, $x=2$ 에서 극소이므로

$$f(1) - f(2) = \frac{|4|}{2}(2-1)^3 \Rightarrow f(2) = 10 - 2 = 8$$

Tip

물론 $f'(1) = 0, f'(2) = 0, f(1) = 10$ 을 이용하여 상수 a, b, c 를 찾아서 $f(2)$ 를 구해도 된다.

식세우기 Technique

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1일 때,

① $f(1) = f(2) = f(3)$

$$f(1) = f(2) = f(3) = k \text{라 두면 } f(1) - k = 0, f(2) - k = 0, f(3) - k = 0$$

$$f(x) - k = g(x) \text{라 하면 } g(1) = 0, g(2) = 0, g(3) = 0 \text{을 만족하므로}$$

$g(x)$ 는 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 를 인수로 갖는다.

$-k$ 는 $f(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

따라서 $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x) - k = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이다.

② $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$

$$f(1) - 1 = 0, f(2) - 2 = 0, f(3) - 3 = 0$$

$$f(x) - x = g(x) \text{라 하면 } g(1) = 0, g(2) = 0, g(3) = 0 \text{을 만족하므로}$$

$g(x)$ 는 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 를 인수로 갖는다.

$-x$ 는 $f(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

따라서 $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이다.

③ 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$

기함수이므로 x^n (n 은 홀수)만 존재해야 한다. 즉, $f(x) = x^3 - ax$ 이다.

Tip 만약 $f(x) = x^3 + ax$ 라 두면 $f'(x) = 3x^2 + a$ 이므로

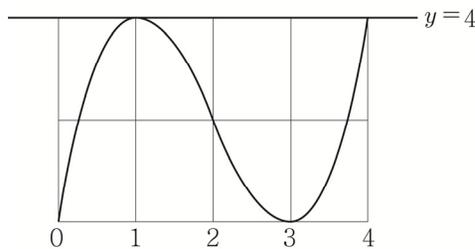
방정식 $f'(x) = 3x^2 + a = 0$ 의 해가 $x = \pm \sqrt{\frac{-a}{3}}$ 이 된다. 물론 $a < 0$ 라는 전제 조건을 사용하여 식을 전개해도 되지만 루트 안에 $-$ 가 있어 실수하기 쉽다.

따라서 처음부터 $f(x) = x^3 - ax$ 라 두면 방정식 $f'(x) = 0$ 의 해가 $x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$ ($a > 0$)이므로 실수할 여지를 줄일 수 있다.

물론 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 일 때는 $f(x) = x^3 + ax$ 라 두는 편이 좋긴 하지만 빈도수면에서 $f(x) = x^3 - ax$ 가 유리하다. (\because 극값을 갖는 개형의 빈도가 더 多)

④ $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때, 극댓값 4를 갖고, $x=3$ 일 때, 극솟값을 갖는다.

박스를 그리면 다음과 같다.



방정식 $f(x) = 4$ 는 $x=1$ 에서 중근과 $x=4$ 에서 하나의 실근을 갖는다.

$f(x) - 4 = g(x)$ 라 하면 방정식 $g(x) = 0$ 은 $x=1$ 에서 중근과 $x=4$ 에서 하나의 실근을 가지므로

$g(x)$ 는 $(x-1)^2(x-4)$ 를 인수로 갖는다.

따라서 $g(x) = (x-1)^2(x-4) \Rightarrow f(x) - 4 = (x-1)^2(x-4)$ 이다.

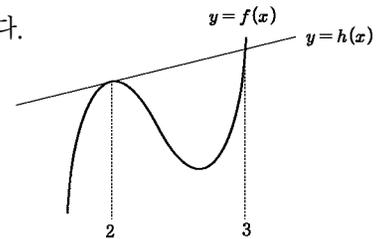
⑤ 직선 $h(x)$ 가 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $x=2$ 에서 접하고 $x=3$ 에서 $f(x)$ 와 만난다.

방정식 $f(x) = h(x)$ 는 $x=2$ 에서 중근 $x=3$ 에서 실근을 갖는다.

$f(x) - h(x) = g(x)$ 라 하면 방정식 $g(x) = 0$ 은 $x=2$ 에서 중근과

$x=3$ 에서 하나의 실근을 가지므로 $g(x)$ 는 $(x-2)^2(x-3)$ 를 인수로 갖는다.

따라서 $g(x) = (x-2)^2(x-3) \Rightarrow f(x) - h(x) = (x-2)^2(x-3)$ 이다.

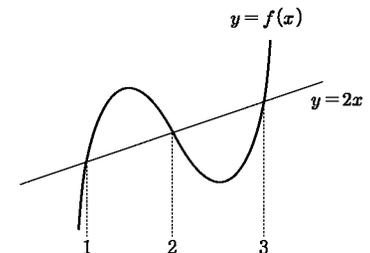


⑥ $y=2x$ 와 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1, 2, 3$ 에서 만난다.

$g(x) = f(x) - 2x$ 라 하면 $g(1) = 0, g(2) = 0, g(3) = 0$ 이므로

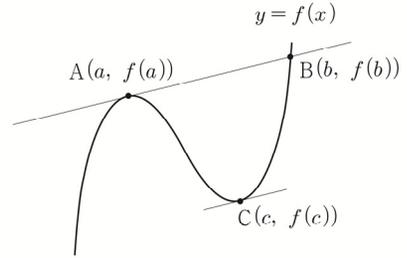
$g(x)$ 는 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 를 인수로 갖는다.

따라서 $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x) - 2x = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이다.



식세우기 응용

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 한 점 $A(a, f(a))$ 에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중 접점이 아닌 점을 $B(b, f(b))$ 라 하자. 함수 $f(x)$ 의 구간 $[a, b]$ 에서의 평균변화율과 $x=c$ 에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, c 를 a, b 로 표현해보자.



$$f'(a) = f'(c) = m$$

$$\text{접선의 방정식은 } y = f'(a)(x-a) + f(a) = g(x)$$

$$\text{최고차항의 계수를 } k \text{라 두고 식을 세우면 } f(x) - g(x) = k(x-a)^2(x-b)$$

양변을 미분하면

$$f'(x) - g'(x) = 2k(x-a)(x-b) + k(x-a)^2 \Rightarrow f'(x) - m = 2k(x-a)(x-b) + k(x-a)^2$$

$$x=c \text{를 대입하면 } f'(c) - m = 2k(c-a)(c-b) + k(c-a)^2$$

$$0 = k(c-a)(2(c-b) + c-a) \Rightarrow 0 = k(c-a)(3c-2b-a)$$

$a \neq c$ 이므로 $c = \frac{a+2b}{3}$ 이다. 즉, c 는 선분 AB의 2:1내분점의 x 좌표와 같다.

Tip 위에서 배운 박스를 이용하면 $c = \frac{a+2b}{3}$ 임이 자명하다.

Training – 1 step

필수 유형편

2. 도함수의 활용

1 Theme 접선의 기울기

001

곡선 $y = 2x^3 - ax^2 + 3x + b$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나고 이 점에서의 접선의 기울기가 -1 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

002

곡선 $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ 위의 두 점 $(-1, 4), (1, -2)$ 에서의 접선이 서로 평행할 때, $a-3b+4c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.)

003

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} = 4$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, a)$ 에서의 기울기는 m 이다. $a+m$ 의 값을 구하시오. (단, a, m 은 상수이다.)

004

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ 의 접선의 기울기의 최솟값을 m 이라 하면 이때 접점의 좌표는 (a, b) 이다. $m+2a+3b$ 의 값을 구하시오. (단, m, a, b 는 상수이다.)

005

곡선 $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x + 1$ 의 접선의 기울기의 최댓값이 $2a$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

006

곡선 $y = x^3 - 3x + 2$ 에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 할 때, 접점의 개수를 $f(m)$ 이라 하자. $f(-3)+f(-1)+f(1)$ 의 값을 구하시오.

2 Theme 접선의 방정식-곡선 위의 점이 주어질 때

007

곡선 $y = x^3 - 6x + 5$ 위의 점 $(-1, 10)$ 에서의 접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 할 때, $m + 3n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 상수이다.)

008

곡선 $y = -2x^3 + 4x$ 위의 점 $(1, a)$ 에서의 접선이 점 $(-5, b)$ 를 지날 때, ab 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

009

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2$ 위의 두 점 $(-1, -2), (1, 0)$ 에서의 접선을 각각 l_1, l_2 라 할 때, 두 직선 l_1, l_2 의 교점은 (a, b) 이다. $3a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

010

함수 $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(0, f(0))$ 에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중에서 P 가 아닌 점을 Q 라 하자. $\overline{PQ} = \sqrt{17}$ 일 때, 점 Q 의 y 좌표를 구하시오. (단, a 는 양의 상수이다.)

011

곡선 $y = x^3 - 2x^2 + 1$ 위의 점 $P(2, 1)$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 Q 라 할 때, 삼각형 OPQ 의 넓이를 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

012

곡선 $y = -2x^3 + 4x$ 위의 점 $(1, 2)$ 를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $4ab$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

013

곡선 $y = x^3 + ax + b$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{7}$ 일 때, $b - 2a$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

014

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 4} = -4$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = mx + n$ 이다. $m + 2n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 상수이다.)

071



상수 $a(a > 0)$ 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^3(x+4a) & (x < 0) \\ x^2(x-3a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, $81a$ 의 값을 구하시오.

072



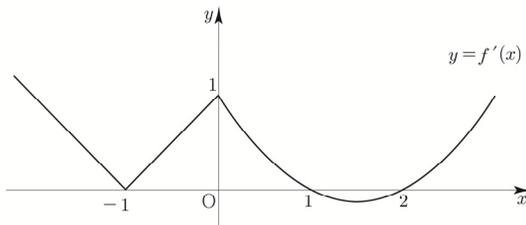
함수 $f(x)$ 의 도함수

$$f'(x) = \begin{cases} |x+1| & (x < 0) \\ \frac{1}{2}(x-1)(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 $f'(x)$ 는 3개의 극값을 갖는다.
- ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 증가한다.
- ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 과 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.
- ㄹ. 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 2개의 극값을 갖는다.
- ㅁ. 두 함수 $y = f(x)$, $y = f(1)$ 의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.



12^{Theme}

함수의 극대, 극소의 활용

073



함수 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$ 는 $x = a$ 에서 극댓값

b 를 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$ 에서의 접선을 l 이라 할 때, 점 (a, b) 와 직선 l 사이의 거리는 d 이다. $10d^2$ 의 값을 구하시오.

074



다항함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$

(나) $x = 0$ 과 $x = 2$ 에서 극값을 갖는다.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1-2h)}{h}$ 의 값을 구하시오.

075



최고차항의 계수가 자연수인 삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $(x^2+2)f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극값 6을 갖는다.

(나) 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극값을 갖지 않는다.

(다) $\frac{12}{f'(2)}$ 는 자연수이다.

$f(4)$ 의 값을 구하시오.

095



두 함수 $f(x) = x^4 - k$, $g(x) = -4x^2 + 2$ 에 대하여
집합 S 는

$$S = \{x \mid f(x) = g(x) \text{ 이고 } -2 < x < 1\}$$

이다. $n(S) = 1$ 이 되도록 하는 정수 k 의 개수를 구하시오.

096



함수 $f(x) = x^3 + k$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 두 함수
 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서
만나도록 하는 모든 실수 k 의 값의 곱이 $-a$ 일 때,
 $81a$ 의 값을 구하시오.

097



함수 $f(x) = x^2 - 3x$ 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$x |f(x)| = \frac{k}{2}$$

의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되지 않도록 하는
모든 정수 k 의 개수를 구하시오.

16 Theme 방정식의 활용

098



방정식 $2x^3 - 3x^2 + k = 0$ 이 열린구간 $(0, 2)$ 에서
적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k 의 개수를
구하시오.

099



서로 다른 두 실수 a, b 가 사차방정식 $f(x) = 0$ 의
근일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. 다항식 $f(x)$ 는 $(x-a)(x-b)$ 으로 나누어 떨어진다.
- ㄴ. $f'(a) = 0$ 이면 다항식 $f(x)$ 는 $(x-a)^2(x-b)$ 으로
나누어 떨어진다.
- ㄷ. $f'(a)f'(b) = 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 허근을
갖지 않는다.
- ㄹ. $f'(a) = 0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 갖지 않
으면 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㅁ. $f'(a)f'(b) > 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른
네 실근을 갖는다.
- ㅂ. 방정식 $f(x) = 0$ 이 허근을 갖지 않고 서로 다른
두 실근을 가지면 함수 $f(x)$ 는 극솟값을 가진다.

113



수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t > 0)$ 에서의

위치 x 가 $x = \frac{1}{4}t^4 - t^3 - \frac{9}{2}t^2$ 이다.

$0 < t \leq 4$ 에서 점 P의 속도를 v 라 할 때,

$|v|$ 의 최댓값을 구하시오.

114



수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t > 0)$ 에서의

위치 x 가 $x = t^3 + at + b$ 이다. 점 P가 원점을 지날 때의

속도와 가속도가 각각 13, 12일 때, $a - b$ 의 값을

구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

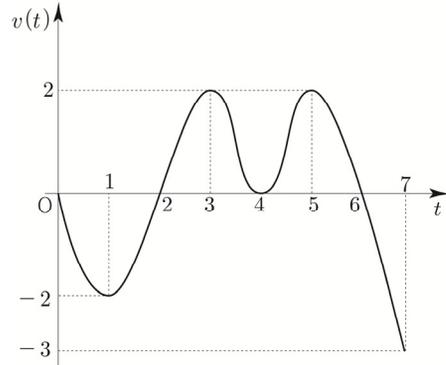
115



원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의

시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.



| 보기 |

- ㄱ. $t=1$ 일 때와 $t=3$ 일 때, 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.
- ㄴ. $0 < t < 7$ 일 때, 점 P의 가속도가 0이 되는 순간은 4번이다.
- ㄷ. $5 < t < 7$ 일 때, 점 P의 속도는 감소한다.
- ㄹ. $t=6$ 일 때, 점 P의 가속도는 음의 값이다.
- ㅁ. $t=2$ 일 때, 점 P는 원점을 지난다.
- ㅂ. 점 P는 7초 동안 운동 방향을 2번 바꾼다.
- ㅅ. $t=3$ 일 때, 점 P는 정지한다.
- ㅇ. $t=3$ 일 때와 $t=5$ 일 때, 점 P의 위치는 서로 같다.

Master step

심화 문제편

2. 도함수의 활용

235 | 2022학년도 수능 공통

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 이 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) + \lim_{t \rightarrow a^-} g(t) \leq 2$ 이다.
 (나) $g(f(1))=g(f(4))=2, g(f(0))=1$

$f(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

236 | 2019학년도 수능 나형

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 0)$ 에서의 접선은 모두 x 축이다.
 (나) 점 $(2, 0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 개수는 2이다.
 (다) 방정식 $f(x)=g(x)$ 는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq kx - 2 \leq f(x)$ 를 만족시키는 실수 k 의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta = a + b\sqrt{2}$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]

237 | 2020년 고3 4월 교육청 나형

양의 실수 t 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t}$ 이라 하자.

두 함수 $f(x)$ 와 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(t)$ 의 최솟값은 0이다.
 (나) x 에 대한 방정식 $f'(x)=g(a)$ 를 만족시키는 x 의 값은 a 와 $\frac{5}{3}$ 이다. (단, $a > \frac{5}{3}$ 인 상수이다.)

자연수 m 에 대하여 집합 A_m 을

$$A_m = \{x \mid f'(x) = g(m), 0 < x \leq m\}$$

이라 할 때, $n(A_m)=2$ 를 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합을 구하시오. [4점]

238 | 2022학년도 수능예비시험

함수 $f(x) = x^3 - 3px^2 + q$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q 의 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 함수 $|f(x)|$ 가 $x=a$ 에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a 의 개수는 5이다.
 (나) 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은 같다.

Training – 1 step

필수 유형편

1. 부정적분과 정적분

12 Theme 정적분으로 정의된 함수-New 함수

055

함수 $f(x) = \int_{\sqrt{2}}^x \{3|t| - t\} dt$ 에 대하여
 원점에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접선을 그을 때,
 접점을 A라 하자. \overline{OA}^2 의 값을 구하시오.
 (단, 점 O는 원점이다.)

056

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x) = \int_{-1}^1 |t-x| dt$ 의
 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

057

함수 $f(x) = \begin{cases} -2x-2 & (x < 0) \\ x^2-x-2 & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여
 방정식 $\int_a^x f(t) dt = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록
 하는 상수 a 의 개수를 구하시오.

058

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가
 $g(x) = \int_0^x |f'(t)| dt$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을
 있는 대로 고르시오.

보기
ㄱ. $g(0) = 0$ ㄴ. $0 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) + f'(x) = 0$ 이다. ㄷ. 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ 이다. ㄹ. 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. ㅁ. $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $g(x_1) < g(x_2)$ 이다. ㅂ. 함수 $g(x)$ 의 역함수는 존재하지 않는다. ㅅ. 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극값을 갖는다. ㅇ. 함수 $ g(x) - g(2) $ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. ㅈ. $g(-1) + g(1) + g(4) = 22$

Training – 2 step

기출 적용편

1. 부정적분과 정적분

059 | 2020학년도 고3 9월 평가원 나형

$\int_0^2 (3x^2 + 6x) dx$ 의 값은? [3점]

- ① 20 ② 22 ③ 24
 ④ 26 ⑤ 28

060 | 2018학년도 고3 9월 평가원 나형

함수 $f(x) = \int_1^x (t-2)(t-3) dt$ 에 대하여

$f'(4)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

061 | 2013년 고3 7월 교육청 A형

함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 - 2x + \int_0^1 t f(t) dt$ 를

만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{17}{6}$
 ④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

062 | 2014학년도 수능 A형

실수 a 에 대하여

$$\int_{-a}^a (3x^2 + 2x) dx = \frac{1}{4}$$

일 때, $50a$ 의 값을 구하시오. [3점]

063 | 2016학년도 고3 9월 평가원 A형

함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \int_0^x (2at+1) dt$ 이고

$f'(2) = 17$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

064 | 2012년 고3 7월 교육청 나형

실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가

$f(x) = f(x+4)$ 를 만족하고

$$f(x) = \begin{cases} -4x+2 & (0 \leq x < 2) \\ x^2-2x+a & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

일 때, $\int_9^{11} f(x) dx$ 의 값은? [3점]

- ① -8 ② $-\frac{26}{3}$ ③ $-\frac{28}{3}$
 ④ -10 ⑤ $-\frac{32}{3}$

065 | 2013학년도 수능 나형

함수 $f(x) = x+1$ 에 대하여

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx = k \left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right)^2$$

일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

095 | 2008년 고3 10월 교육청 가형

모든 실수 x 에 대하여 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)g(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
 (나) $f'(x) = 1$
 (다) $g(x) = 2 \int_1^x f(t) dt$

$\int_0^3 3g(x) dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

096 | 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 전체에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^2 g(x) dx$ 의 값은? [4점]

(가) $g(x) = \begin{cases} -f(x+1) + 1 & (-1 < x < 0) \\ f(x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+2) = g(x)$ 이다.

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$
 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

097 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t) dt$$

를 만족시킨다. $f(1) = \int_0^1 f(t) dt$ 일 때, $a + f(3)$ 의 값은?

(단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

098 | 2020학년도 수능 나형

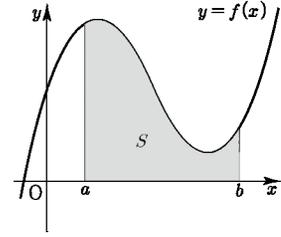
다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $\int_1^x f(t) dt = \frac{x-1}{2} \{f(x) + f(1)\}$ 이다.
 (나) $\int_0^2 f(x) dx = 5 \int_{-1}^1 xf(x) dx$

$f(0) = 1$ 일 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

곡선과 x 축 사이의 넓이

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구해 보자.

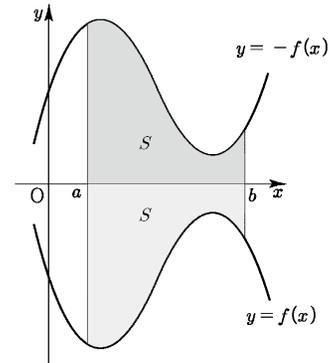


① 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 일 때, 정적분과 넓이의 관계에 따라

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

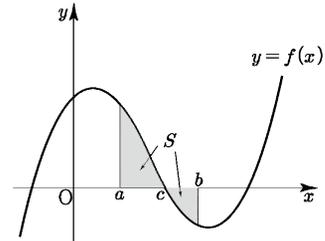
② 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 는 곡선 $y=-f(x)$ 와 x 축에 대하여 대칭이고 $-f(x) \geq 0$ 이므로

$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx = \int_a^b |f(x)| dx$$



③ 닫힌구간 $[a, c]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고, 닫힌구간 $[c, b]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 일 때,

$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \{-f(x)\} dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx$$



곡선과 x 축 사이의 넓이 요약

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $S = \int_a^b |f(x)| dx$ 이다.

Tip 1 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때는 $f(x)$ 의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 적분 구간을 나누어 계산한다.

Tip 2 $\int_a^b |f(x)| dx$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 나타내는 **표현형**이다. 즉, 보자마자 x 축으로 둘러싸인 넓이라고 Reading할 수 있어야 한다. 실제 계산할 때는 절댓값을 벗긴 후 계산하고 이때 절댓값을 벗긴 적분형태인

① $\int_a^b f(x) dx$, ② $\int_a^b \{-f(x)\} dx$, ③ $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b \{-f(x)\} dx$ 는

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 나타내는 **계산형**이다.

Tip 3 $\int_a^b |f(x)| dx$ 는 함수 $|f(x)|$ ($y=f(x)$ 에서 x 축 아래에 있는 부분을 x 축 위로 접어올린 형태)를 a 에서 b 까지 적분했다고 볼 수도 있다.

■ 예제 2

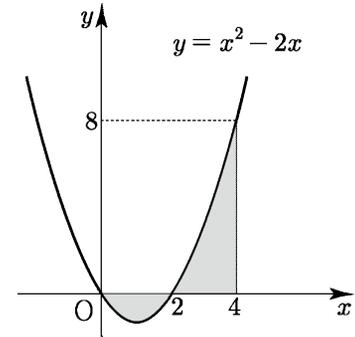
곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 0, x = 4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

■ 풀이 ■

곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x = 0, x = 2$
 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $y \leq 0$, 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로
 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^4 (x^2 - 2x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^4$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 8$$



■ 개념 확인문제 2

다음 곡선과 x 축 및 두 직선 $x = 0, x = 2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(1) $y = -x^2 + 3x - 2$

(2) $y = x^3 - x$

개념 파악하기

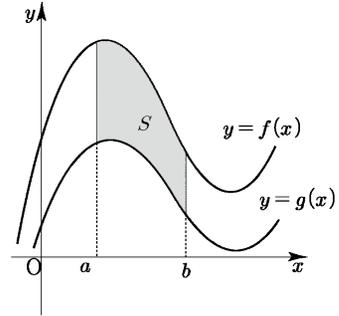
(3) 두 곡선 사이의 넓이는 어떻게 구할까?

두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구해 보자.

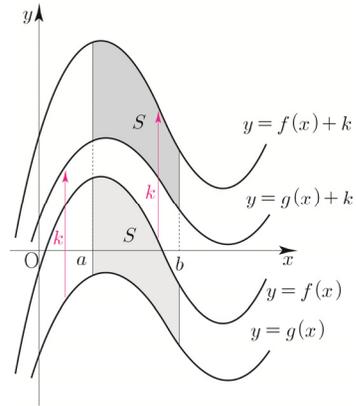
① 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq g(x) \geq 0$ 일 때,

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$



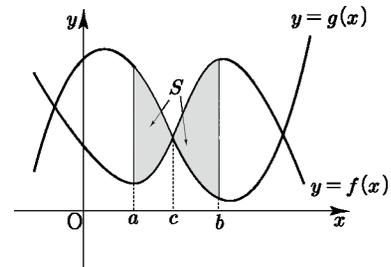
② 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 이고 $g(x)$ 의 값이 음수인 경우가 있을 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하여 $f(x)+k \geq g(x)+k \geq 0$ 이 되도록 할 수 있다.

$$S = \int_a^b \{f(x)+k\}dx - \int_a^b \{g(x)+k\}dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$



③ 닫힌구간 $[a, c]$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 이고, 닫힌구간 $[c, b]$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 일 때,

$$\begin{aligned} S &= \int_a^c \{g(x) - f(x)\}dx + \int_c^b \{f(x) - g(x)\}dx \\ &= \int_a^c |f(x) - g(x)|dx + \int_c^b |f(x) - g(x)|dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \end{aligned}$$



두 곡선 사이의 넓이 요약

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ 이다.

Tip 1 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 대소가 바뀔 때는 $f(x) - g(x)$ 의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 구한다.

Tip 2 $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ 는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 나타내는 **표현형**이다. 즉, 보자마자 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 으로 둘러싸인 넓이라고 Reading할 수 있어야 한다.

실제 계산할 때는 절댓값을 벗긴 후 계산하고 이때 절댓값을 벗긴 적분형태인

① $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$, ② $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$, ③ $\int_a^c \{g(x) - f(x)\}dx + \int_c^b \{f(x) - g(x)\}dx$ 는

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 나타내는 **계산형**이다.

■ 예제 3

두 곡선 $y = x^2 - x$, $y = -x^2 + 3x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

|| 풀이 ||

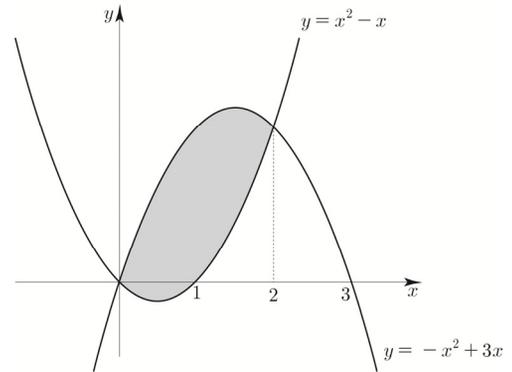
$$x^2 - x = -x^2 + 3x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 2x(x - 2) = 0$$

두 곡선의 교점의 x 좌표는 $x = 0, x = 2$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $x^2 - x \leq -x^2 + 3x$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_0^2 \{(-x^2 + 3x) - (x^2 - x)\} dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$



Tip 위에 있는 그래프에서 아래에 있는 그래프를 뺀 후 적분한다.

■ 개념 확인문제 3

곡선 $y = -x^2 + 2$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

■ 예제 4

곡선 $y = x^2 + 2x$ 와 세 직선 $y = x$, $x = -1$, $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

|| 풀이 ||

$$x^2 + 2x = x \Rightarrow x^2 + x = x(x + 1) = 0$$

곡선 $y = x^2 + 2x$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 $x = -1, x = 0$

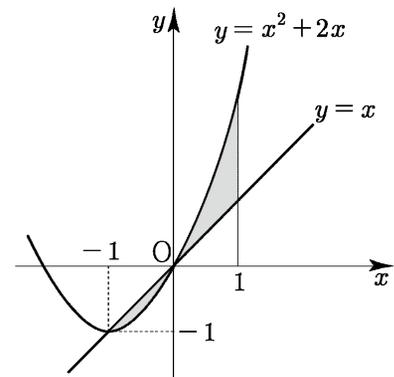
닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $x^2 + 2x \leq x$, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서

$x^2 + 2x \geq x$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^0 \{x - (x^2 + 2x)\} dx + \int_0^1 \{(x^2 + 2x) - x\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx + \int_0^1 (x^2 + x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$



■ 개념 확인문제 4

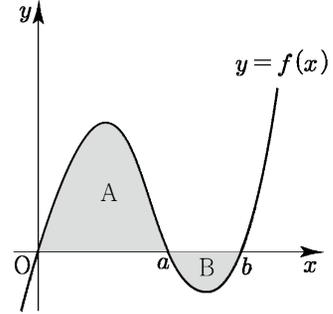
두 곡선 $y = -x^2$, $y = x^2 - 2x$ 와 두 직선 $x = -1$, $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

개념 파악하기

(4) 두 곡선 사이의 넓이를 활용하여 문제를 어떻게 해결할까?

두 곡선 사이의 넓이의 활용

오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.



① A의 표현형은 $\int_0^a |f(x)|dx$ 이고 계산형은 $\int_0^a f(x)dx$ 이다.

B의 표현형은 $\int_a^b |f(x)|dx$ 이고 계산형은 $\int_a^b \{-f(x)\}dx$ 이다.

Tip

여기서 $\int_a^b f(x)dx = -B$ 인 것을 쉽게 알 수 있다.

즉, $f(x) \leq 0$ 일 때(x 축 아래에 있을 때) 정적분을 하면 넓이에 마이너스가 붙는다.

② $\int_0^b f(x)dx = A - B$

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_a^b \{-f(x)\}dx = A - B$$

Tip

위와 같이 식으로 접근할 수도 있지만 자연스럽게 곡선 $y=f(x)$ 가 $a \leq x \leq b$ 에서 x 축 아래에 있으므로 $\int_a^b f(x)dx = -B$ (넓이에 마이너스)이니 A에서 B를 빼면

$\int_0^b f(x)dx = A - B$ 가 된다. 라는 사고과정으로 접근하는 것을 추천한다.

즉, A에서 B만큼의 넓이가 상쇄된다고 생각하면 된다.

③ A가 B보다 크니 $\int_0^b f(x)dx > 0$ 이다.

Tip

부정적분과 정적분 단원에서 $f(x) = x^3 - x$ 라 할 때, $f(x) = x^3 - x$ 가 기함수이므로 식 계산에 의해 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ 임을 보였다.

이와 달리 위에서 배운 개념을 바탕으로 넓이로 접근해보자.

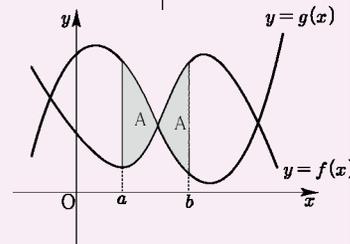
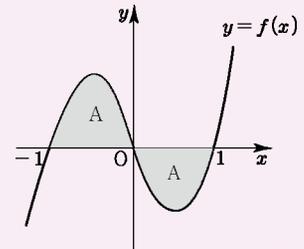
곡선 $y=f(x)$ 는 기함수이므로 $\int_{-1}^0 f(x)dx = A$ 라 하면

$$\int_0^1 f(x)dx = -A \text{ 이므로 } \int_{-1}^1 f(x)dx = A - A = 0 \text{ 이라고}$$

볼 수도 있다. 즉, A에서 A만큼의 넓이가 상쇄되니 0이 된다.

이와 마찬가지로 만약 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 으로 이루어진

두 부분의 넓이가 서로 같을 때, $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx = A - A = 0$ 이다.



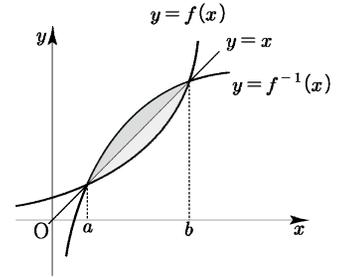
개념 파악하기

(5) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 사이의 넓이는 어떻게 구할까?

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$ 와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 사이의 넓이의 2배이다. (대칭성 활용)

$$S = \int_a^b |f(x) - f^{-1}(x)| dx = 2 \int_a^b |x - f(x)| dx$$

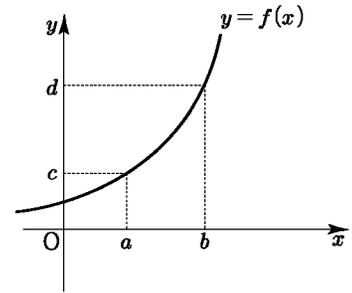


Tip

역함수를 직접 구해서 적분하는 것이 아니라 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=f(x)$ 사이의 넓이를 2배하여 계산하는 것이 핵심이다. (by 대칭성)

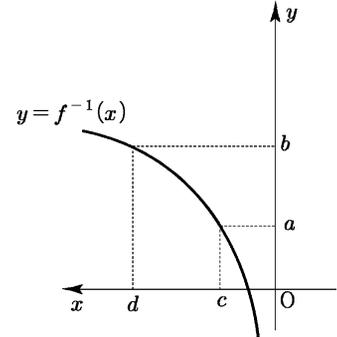
함수 $y=f(x)$ 의 그래프로 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 해석하기

오른쪽 그림과 같이 증가함수 $y=f(x)$ 가
 $f(a)=c$, $f(b)=d$ 일 때, a, b 를 역함수로 표현하면?
단순히 x 좌표와 y 좌표를 서로 바꾸어 일차원적으로
 $f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$ 라고 할 수도 있다.



이와 달리 그래프로 접근하는 방법을 알아보자.

$y=f(x)$ 를 $y=x$ 에 대하여 대칭시키면 $y=f^{-1}(x)$ 가 되는 것을 알고 있다.
즉, x 대신 y 를 넣고 y 대신 x 를 넣어서 역함수를 구할 수 있다.
여기서 아이디어를 얻어 x 축을 y 축으로 보고 y 축을 x 축으로 봐도 된다.
이를 이행하려면 시계반대방향으로 90° 회전을 시켜주기만 하면 된다.
즉, 너무나 자명하게 $y=f^{-1}(x)$ 에 $x=c$, $x=d$ 를 대입하면 함숫값이
 $f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$ 가 된다는 것을 바로 알 수 있다.

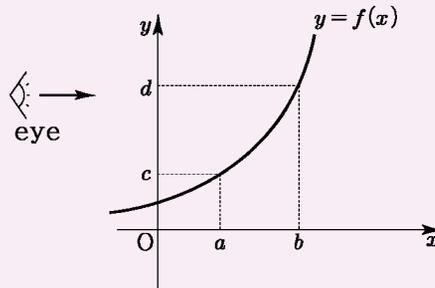


Tip 1

실제 $y=x$ 에 대하여 대칭시켜서 역함수를 구하면 오른쪽 그림에서
좌우 반전된 그림이 나온다. 시계 반대 방향으로 90° 만큼 회전시켰기에 x 축이 오른쪽에서
왼쪽으로 증가하기 때문이다. 정확한 그래프 개형이 중요한 것이 아니라 $y=f^{-1}(x)$ 에 $x=c$, $x=d$ 를
대입하면 함숫값이 $f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$ 가 된다는 사실이 중요하다.

Tip 2

실전에서는 아래와 같이 옆에서 바라본다고 생각하면 된다.



개념 파악하기

(6) $f'(x)$ 의 넓이와 $f(x)$ 의 함숫값의 차이는 어떤 관계가 있을까?

$f'(x)$ 의 넓이와 $f(x)$ 의 함숫값의 차이

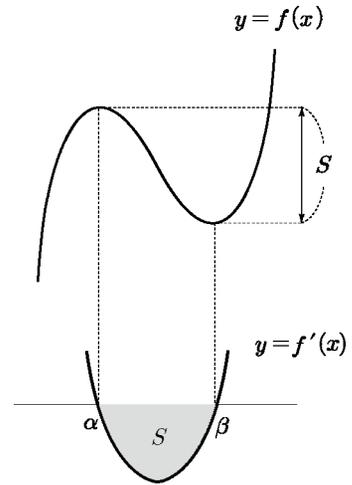
$y = f'(x)$ 와 x 축과 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |f'(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} \{-f'(x)\} dx = [-f(x)]_{\alpha}^{\beta} \\ = -f(\beta) - (-f(\alpha)) = f(\alpha) - f(\beta)$$

즉, 극값차가 S 이다. $f'(x)$ 의 넓이는 $f(x)$ 의 함숫값의 차이와 같다.

$f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 열린구간 (α, β) 에서 감소한다.

이때 얼마만큼 감소할까? 넓이 S 만큼 감소한다. (p176 참고)



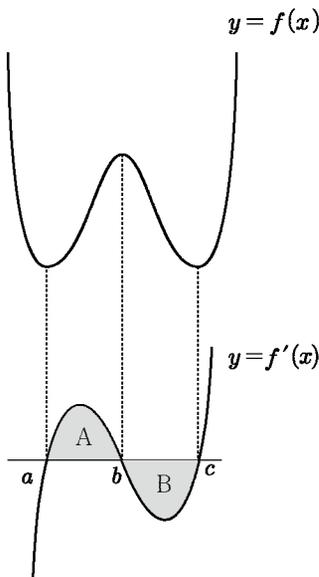
$f'(x)$ 의 넓이 차이에 따른 $f(x)$ 의 그래프 개형

$$A = \int_a^b |f'(x)| dx, \quad B = \int_b^c |f'(x)| dx \text{ 라 하면}$$

A와 B의 대소관계에 따라 $f(x)$ 의 그래프 개형은 달라진다.

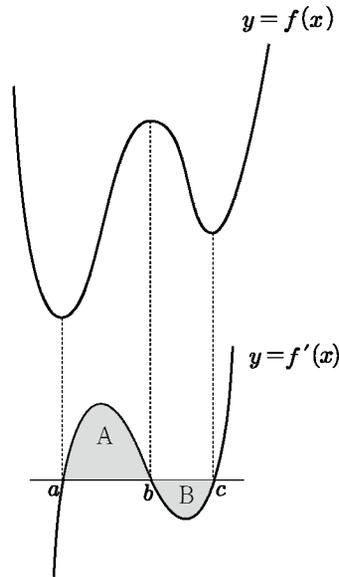
① $A = B$

$$\int_a^c f'(x) dx = f(c) - f(a) = 0 \Rightarrow f(a) = f(c)$$



② $A > B$

$$\int_a^c f'(x) dx = f(c) - f(a) > 0 \Rightarrow f(c) > f(a)$$



예제 7

좌표가 1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서 속도가 $v(t) = 2 - t$ 일 때, 다음을 구하시오.

- (1) 시각 $t=3$ 에서 점 P의 위치
- (2) 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량
- (3) 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리

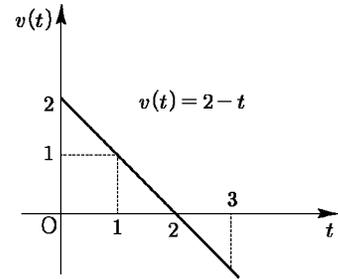
풀이

풀이1) $v(t)$ 를 활용하는 방법

$$(1) 1 + \int_0^3 (2-t) dt = 1 + \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^3 = \frac{5}{2}$$

$$(2) \int_1^3 (2-t) dt = \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^3 = 0$$

$$(3) \int_1^3 |2-t| dt = \int_1^2 (2-t) dt + \int_2^3 (-2+t) dt = \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^2 + \left[-2t + \frac{1}{2}t^2 \right]_2^3 = 1$$



Tip

무조건 공식을 외우지 말고 $v(t) = 2 - t$ 의 그래프를 그려서 판단하는 편이 좋다. 즉, 이해를 하자! 괜히 적분단원에 있을 리가 없다! 앞에서 배운 것과 완벽하게 똑같다. 얼마만큼 증가하나? 도함수의 넓이만큼 증가한다! 얼마만큼 감소하나? 도함수의 넓이만큼 감소한다!

(1) 처음 좌표가 1이라고 했다. 0에서 2초까지 위치는 $\int_0^2 v(t) dt$ 만큼 증가하고 2에서 3초까지 위치는

$\int_2^3 -v(t) dt$ 만큼 감소한다. 즉, $1 + \int_0^2 v(t) dt - \int_2^3 -v(t) dt = 1 + \int_0^3 v(t) dt$ 와 같다.

(2) $v(t)$ 그래프를 보면 $\int_1^2 |v(t)| dt = \int_2^3 |v(t)| dt$ 이므로 위치의 증가와 감소량이 서로 같다.

따라서 0이다.

(3) 움직인 거리이므로 감소량과 증가량을 모두 더해야 하므로 $\int_1^3 |v(t)| dt$ 를 계산하면 된다.

풀이2) $x(t)$ 를 활용하는 방법

공식을 쓰지 않고 적분상수 C 를 찾고 $x(t)$ 를 직접 구해도 된다.

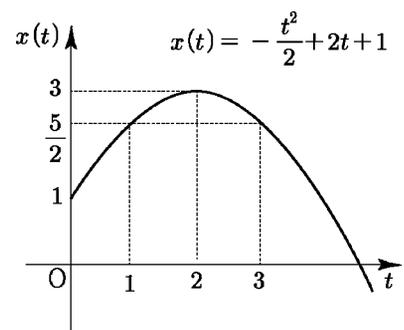
$$(1) v(t) \text{의 부정적분 } x(t) = 2t - \frac{t^2}{2} + C, x(0) = 1$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 1 \Rightarrow x(3) = \frac{5}{2}$$

$$(2) x(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 1 \Rightarrow x(1) = x(3) = \frac{5}{2} \text{ 이므로 } x(3) - x(1) = 0$$

$$(3) x(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 1 \text{ 이므로 } x(2) - x(1) = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}, x(2) - x(3) = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

이동거리는 $\{x(2) - x(1)\} + \{x(2) - x(3)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 이다.



1 Theme 곡선과 x 축 사이의 넓이

001

함수 $y = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

002

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = 3x^2 - 4$ 이고 $f(0) = 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

003

곡선 $y = 8x^3$ 과 x 축 및 두 직선 $x = -1, x = a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 34일 때, 양의 상수 a 의 값을 구하시오.

004

곡선 $y = n(x-2)^2(x-3)$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 자연수가 되도록 하는 50 이하의 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

005

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f'(0) = f'(4) = 0$
- (나) 곡선 $y = f'(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 6이다.

$f(0) = 10$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

006

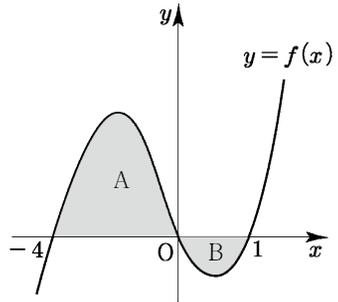
곡선 $y = (x-1)|x-2|$ 과 x 축 및 두 직선 $x = 0, x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 k 이다. $12k$ 의 값을 구하시오.

007

아래 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 A, B라 하자.

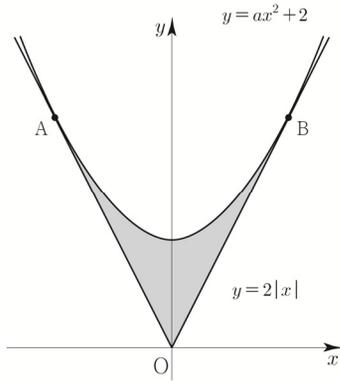
$A = 10, B = 2$ 일 때, $\int_{-4}^1 \{2f(x) + |f(x)| - 3\} dx$ 의

값을 구하시오.



037 | 2020년 고3 3월 교육청 가형

그림과 같이 두 함수 $y = ax^2 + 2$ 와 $y = 2|x|$ 의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y = ax^2 + 2$ 와 $y = 2|x|$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a 는 상수이다.) [3점]



- ① $\frac{13}{6}$
- ② $\frac{7}{3}$
- ③ $\frac{5}{2}$
- ④ $\frac{8}{3}$
- ⑤ $\frac{17}{6}$

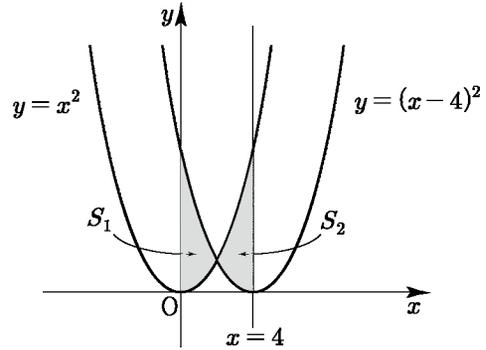
038 | 2021학년도 사관학교 나형

곡선 $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ 에 접하는 직선 중에서 기울기가 최대인 직선을 l 이라 하자. 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{3}{2}$
- ② 2
- ③ $\frac{5}{2}$
- ④ 3
- ⑤ $\frac{7}{2}$

039 | 2020학년도 사관학교 나형

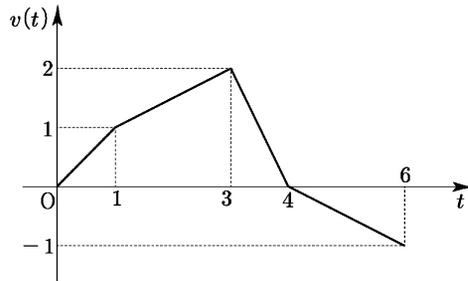
두 곡선 $y = x^2$, $y = (x-4)^2$ 과 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 두 곡선 $y = x^2$, $y = (x-4)^2$ 과 직선 $x = 4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_1 + S_2$ 의 값은? [3점]



- ① 30
- ② 32
- ③ 34
- ④ 36
- ⑤ 38

040 | 2014학년도 수능예비시험 A형

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($0 \leq t \leq 6$)에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 그림과 같다. 점 P가 시간 $t=0$ 에서 시간 $t=6$ 까지 움직인 거리는? [3점]



- ① $\frac{3}{2}$
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ $\frac{7}{2}$
- ④ $\frac{9}{2}$
- ⑤ $\frac{11}{2}$

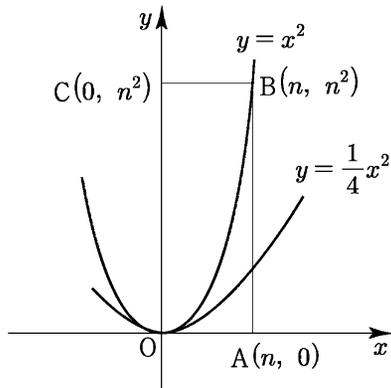
041 | 2018년 고3 10월 교육청 나형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 x 가 $x = t^4 + at^3$ (a 는 상수)이다.
 $t=2$ 에서 점 P의 속도가 0일 때, $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

- ① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 8
 ④ $\frac{28}{3}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

042 | 2014학년도 고3 9월 평가원 A형

그림은 두 곡선 $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ 과 꼭짓점의 좌표가 $O(0, 0)$, $A(n, 0)$, $B(n, n^2)$, $C(0, n^2)$ 인 직사각형 OABC를 나타낸 것이다. (단, n 은 자연수이다.)



$n=4$ 일 때, 두 곡선 $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ 과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① 14 ② 16 ③ 18
 ④ 20 ⑤ 22

043 | 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = 3t^2 - 4t + k$ 이다. 시각 $t=0$ 에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$ 에서 점 P의 위치는 -3 이다. 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k 는 상수이다.) [3점]

044 | 2021학년도 수능 나형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = 2t - 6$ 이다. 점 P가 시각 $t=3$ 에서 $t=k(k > 3)$ 까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

045 | 2018학년도 수능 나형

곡선 $y = -2x^2 + 3x$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
 (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

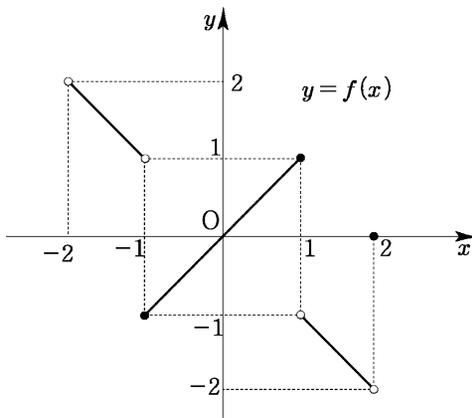
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} \times S(t)}{2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} \times 2(\sqrt{t+4} - \sqrt{t})}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+4t} - t}{1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t}{(\sqrt{t^2+4t} + t)} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

답 ④

072

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$
 $\Rightarrow y = f(x)$ 는 기함수(원점대칭)

이를 바탕으로 그림을 그리면

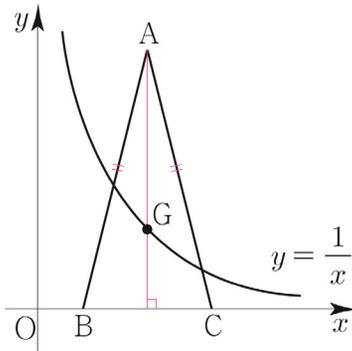


따라서 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 - 2 = -3$ 이다.

답 ①

073

무게중심 $G(t, \frac{1}{t})$ 이므로 $A(t, \frac{3}{t})$ 이다.



삼각형 ABC의 넓이 $= 3t$, $\overline{BC} = f(t)$ 이므로

$$3t = \frac{1}{2} \times f(t) \times \frac{3}{t} \Rightarrow f(t) = 2t^2$$

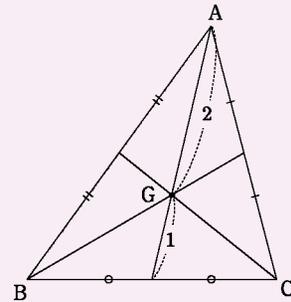
따라서 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - 2t}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t^2 - 2t}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t}{1} = 2$ 이다.

답 ③

Tip 삼각형의 무게중심은 출제자 입장에서 굉장히 매력적인 소재이다.

<삼각형의 무게중심>

- ① 삼각형의 중선
 \Rightarrow 삼각형에서 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분
- ② 삼각형의 무게중심
 \Rightarrow 삼각형의 세 중선의 교점
- ③ 삼각형의 무게중심의 성질
 \Rightarrow 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 2:1로 나눈다.



- ④ 삼각형의 무게중심과 넓이
 $\Rightarrow \triangle ABG = \triangle BCG = \triangle CAG = \frac{1}{3} \triangle ABC$
- ⑤ $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ 일 때,
삼각형 ABC의 무게중심은
 $G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$ 이다.

074

점 A는 $y = -x^2 + 6$ 과 $y = x$ 의 교점이므로
 $-x^2 + 6 = x \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 0$
 $\Rightarrow x = 2$ (\because 제 1사분면 위의 점)
 $A(2, 2)$, $B(2, 0)$, $P(a, a) \Rightarrow Q(2, a)$

$$\overline{PQ} = 2 - a, \overline{PR} = -a^2 + 6 - a = -(a+3)(a-2)$$

$$\lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{-(a-2)}{-(a+3)(a-2)} = \lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{1}{a+3} = \frac{1}{5}$$

답 ②

038

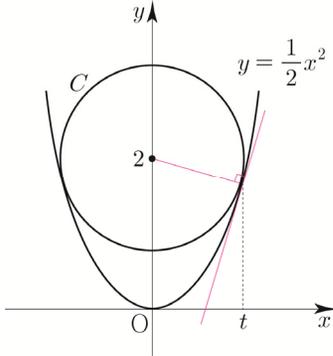
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 라 하면

$f'(x) = x$

접점의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면

두 점 $(t, \frac{1}{2}t^2)$, $(0, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기와

$(t, \frac{1}{2}t^2)$ 에서의 접선의 기울기는 서로 수직이다.



$\frac{\frac{1}{2}t^2 - 2}{t - 0} \times t = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$ ($\because t > 0$)

$(t, \frac{1}{2}t^2) \Rightarrow (\sqrt{2}, 1)$

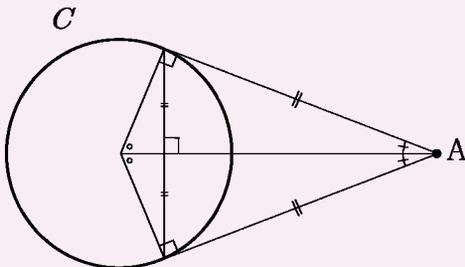
두 점 $(\sqrt{2}, 1)$, $(0, 2)$ 사이의 거리가 원 C 의 반지름 r 이므로 $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3}$ 이다.

원 C 의 넓이는 3π 이므로 $a = 3$ 이다.

답 3

Tip 원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선은 문제를 풀어나가는 key point일 때가 많다. 즉, 반드시 그어야 하는 보조선 중 하나이다.

아래 그림과 같이 점 A 에서 원 C 에 접선을 그었을 때, 그어야 하는 보조선은 다음과 같다.



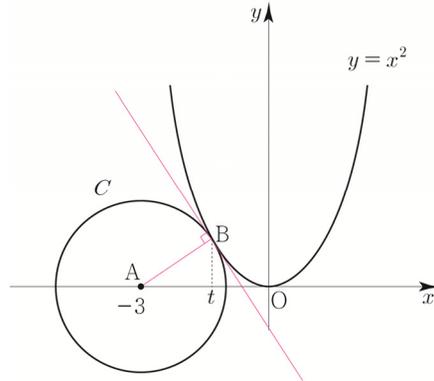
자주 출제되는 도형이니 반드시 기억하자.

039

반지름의 길이가 r 이고 중심의 좌표가 $A(-3, 0)$ 인

원 C 와 곡선 $y = x^2$ 가 점 B 에서 접한다.

점 B 의 x 좌표를 t 라 하자.



두 점 $A(-3, 0)$, $B(t, t^2)$ 를 지나는 직선의 기울기와 $B(t, t^2)$ 에서의 접선의 기울기는 서로 수직이다.

$\frac{t^2}{t+3} \times 2t = -1 \Rightarrow 2t^3 + t + 3 = 0$

$\Rightarrow (t+1)(2t^2 - 2t + 3) = 0 \Rightarrow t = -1$

$B(t, t^2) \Rightarrow B(-1, 1)$

$r = \overline{AB} = \sqrt{5}$ 이고,

삼각형 OAB 의 넓이 $S = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $r^2 + 20S = 5 + 30 = 35$ 이다.

답 35

040

$\overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{5}$, $\cos(\angle APB) = \frac{3}{5}$

$\overline{AB} = x$ 라 하자.

삼각형 ABP 에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos(\angle APB) = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - x^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}$

$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{10 - x^2}{10} \Rightarrow 30 = 50 - 5x^2 \Rightarrow x = 2$ ($\because x > 0$)

$\overline{AB} = 2$ 이고 삼각형 ABP 는 이등변삼각형이므로

$A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 이다.

$\overline{OP} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{OB}^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$

즉, $P(0, 2)$

③ 판별식 $D \leq 0$ 이므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 은 중근을 갖거나 서로 다른 두 개의 허근을 갖는다. 즉, $y = f'(x)$ 와 x 축이 접하거나 만나지 않아야 한다.

④ $f'(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수 $\frac{1}{2}$ 이므로

$y = f'(x)$ 가 x 축과 접하면
모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이다.

$y = f'(x)$ 가 x 축과 만나지 않으려면
 x 축 위에 있어야 하므로
모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이다.

053

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x$$

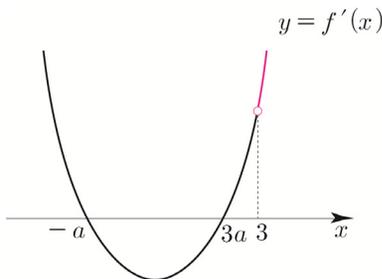
$$f'(x) = x^2 - 2ax - 3a^2 = (x-3a)(x+a)$$

$3 < x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$f(x_1) < f(x_2)$ 이므로 $x > 3$ 에서 $f(x)$ 가 증가한다.

즉, $x > 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$

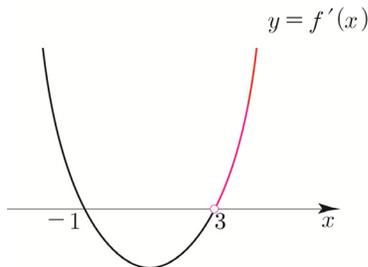
$a > 0$ 이므로 $f'(x)$ 를 그리면



조건을 만족하려면 $3a < 3$ 이어야 하므로 $a < 1$ 이다.

위와 같은 그림은 직관적으로 당연하게 받아들일 수 있지만

만약 $3a = 3$ 일 때에도 조건을 만족시킬 수 있을까?



$3a = 3 \Rightarrow a = 1$ 이어도 조건을 만족시킨다.

$0 < a \leq 1$ 이므로 a 의 최댓값은 1이다.

답 1

Tip 항상 경계를 조심해야 한다.

a 가 자연수나 정수일 때, a 의 개수나 합을 물어보는 문제에서 특히 조심해야 한다.

위 문제에서는 $a = 1$ 일 때가 경계가 되는데

$a = 1$ 인 상황을 그려보고 특히 유의하면서 판단하면 된다.

054

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = -x^2 + kx - 4$$

$f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 실수 전체에서 감소함수나

증가함수이어야 한다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 감소함수이어야 한다.

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 를 만족시키면 된다.

판별식을 사용하면

$$D \leq 0 \Rightarrow k^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow (k+4)(k-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq k \leq 4$$

따라서 정수 k 의 개수는 9이다.

답 9

Tip 왜 판별식을 쓸까?

<생략된 사고과정>

① 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$

② y 를 붙여서 함수로 해석하면 $y = f'(x)$ 는 x 축과 접하거나 x 축 아래에 있어야 한다.

③ 판별식 $D \leq 0$ 이므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 은 중근을 갖거나 서로 다른 두 개의 허근을 갖는다.

즉, $y = f'(x)$ 와 x 축이 접하거나 만나지 않아야 한다.

④ $f'(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수 $-\frac{1}{3}$ 이므로

$y = f'(x)$ 가 x 축과 접하면

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이다.

$y = f'(x)$ 가 x 축과 만나지 않으려면

x 축 위에 있어야 하므로

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이다.

닫힌구간 $[-4, 1]$ 에서 최댓값 $5a-b=2$
 최솟값 $-27a-b = -30$ 이므로
 두 식을 연립하면 $a=1, b=3$ 이다.
 따라서 $a+3b=10$ 이다.

답 10

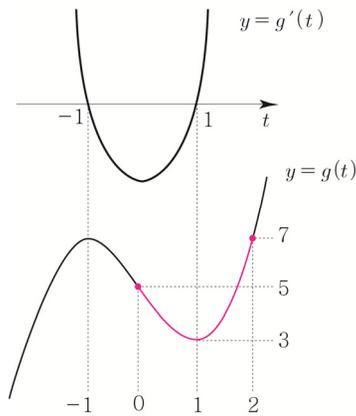
082

$f(x) = (2\sin x)^3 - 6\sin x + 5$
 $2\sin x = t$ 라 치환하면 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 t 의 범위는
 $0 \leq t \leq 2$ 이다.

즉, $0 \leq t \leq 2$ 에서 $g(t) = t^3 - 3t + 5$ 의 최댓값과
 최솟값을 구하는 것과 동일하다.

$g'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$
 $g(0) = 5, g(1) = 3, g(2) = 7$

$g'(t)$ 를 바탕으로 $g(t)$ 를 그리면



$0 \leq t \leq 2$ 에서 $g(t)$ 의 최댓값 $M=7$, 최솟값 $m=3$
 이므로 $Mm=21$ 이다.

083

$P\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)$

$\overline{AP} = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4}{2} + x^2 - 4x + 4}$

$f(x) = \frac{x^4}{2} + x^2 - 4x + 4$ 라 하면

$f'(x) = 2x^3 + 2x - 4 = 2(x^3 + x - 2)$
 $= 2(x-1)(x^2 + x + 2)$

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + x + 2 > 0$ 이므로
 Semi 도함수는 $(x-1)$ 이다.
 (실질적으로 부호에 영향을 주는 도함수를 Semi 도함수라
 하기로 Guide step에서 약속함)

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최소이고 최솟값은 $f(1) = \frac{3}{2}$

이므로 \overline{AP} 의 최솟값은 $\sqrt{\frac{3}{2}} = m$ 이다.

따라서 $10m^2 = 15$ 이다.

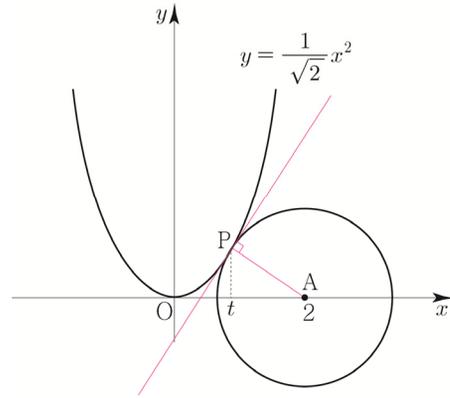
답 15

다르게 풀어보자.

한 점에서 거리가 같은 점들의 집합은 원이다.
 즉, 점 $A(2, 0)$ 을 중심으로 하는 원의 반지름의

길이를 점점 키웠을 때, 곡선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$ 에

접하는 순간 \overline{AP} 는 최소이다.



P 의 x 좌표를 t 라 하면 $P\left(t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\right)$

직선 AP 의 기울기는 점 P 에서의 접선의 기울기와
 수직이므로

$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}t^2}{t-2} \times \frac{2}{\sqrt{2}}t = -1 \Rightarrow t^3 + t - 2 = 0$

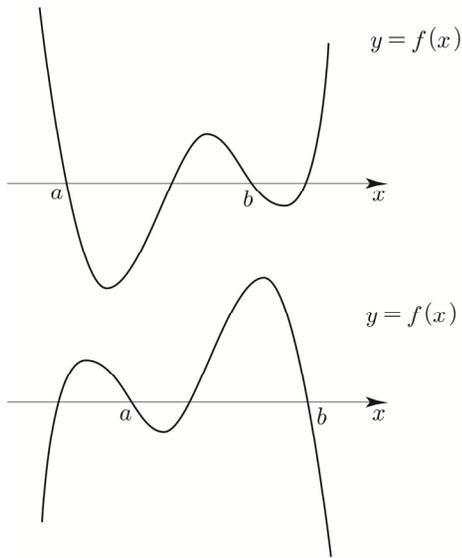
$\Rightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) = 0 \Rightarrow t = 1$

따라서 $P\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 일 때,

\overline{AP} 은 최솟값은 $\sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ 이다.

Tip 원은 거리를 나타내는 틀이다.

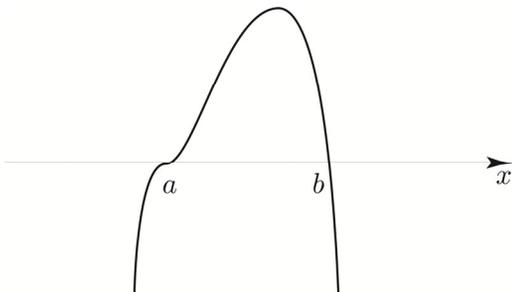
② $f'(a) < 0, f'(b) < 0$



$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수일 때와 음수일 때 모두 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 네 실근을 갖는다. 따라서 \square 은 참이다.

나. 방정식 $f(x)=0$ 이 허근을 갖지 않고 서로 다른 두 실근을 가지면 함수 $f(x)$ 는 극솟값을 가진다.

반례) $f(x) = -(x-a)^3(x-b) \quad (a < b)$



따라서 \square 은 거짓이다.

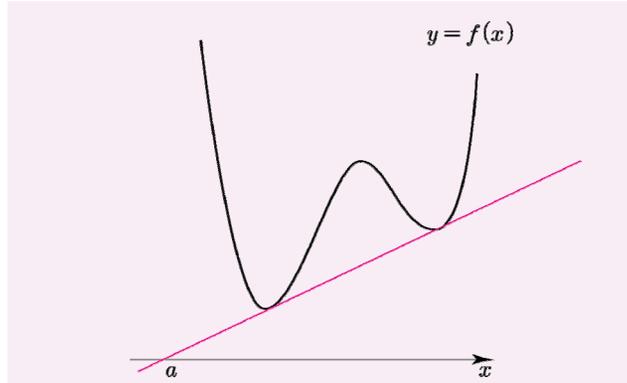
답 가, 나, 다, 라, 마

100

삼차함수의 접선의 개수는 접점의 개수와 같으므로 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있도록 하려면 서로 다른 두 개의 접점이 존재하면 된다.

Tip 접선의 개수 = 접점의 개수?

접선의 개수와 접점의 개수가 반드시 같은 것은 아니다. 예를 들어 $f(x)$ 가 사차함수일 때, 아래와 같은 경우가 가능하다.



즉, 접점이 2개여도 접선이 1개일 수 있다.

하지만 $f(x)$ 가 삼차함수라면 위와 같은 경우가 발생하지 않으므로 접선의 개수와 접점의 개수는 같다. (이때, 접점의 개수는 접점의 x 좌표의 개수로 판단할 수 있다.)

그렇기 때문에 보통 접선의 개수를 물어보는 문제는 $f(x)$ 가 삼차함수인 경우가 대부분이다.

접점의 x 좌표를 t 라 하면 접선의 방정식은

$$y = 3t^2(x-t) + t^3 - 4$$

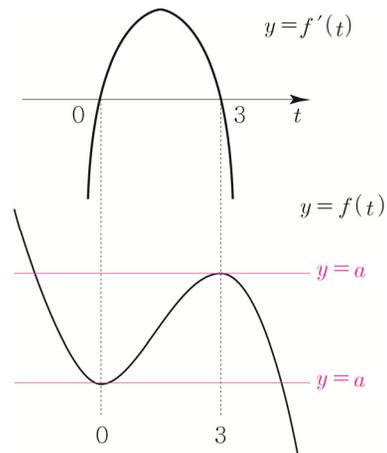
접선이 점 $(3, a)$ 을 지나므로

$$a = 3t^2(3-t) + t^3 - 4 = -2t^3 + 9t^2 - 4$$

$f(t) = -2t^3 + 9t^2 - 4$ 라 하면

$$f'(t) = -6t^2 + 18t = -6t(t-3)$$

$f'(t)$ 를 바탕으로 $f(t)$ 를 그리면



$$a = f(0) = -4 \text{ or } a = f(3) = 23$$

a 는 양수이므로 23이다.

답 23

Tip <범위가 있을 때, 판별식 유의사항>

아마 판별식 $D \leq 0$ 이라고 푼 학생이 있을 수 있다.
이 문제에는 범위가 $t \geq 0$ 이기 때문에

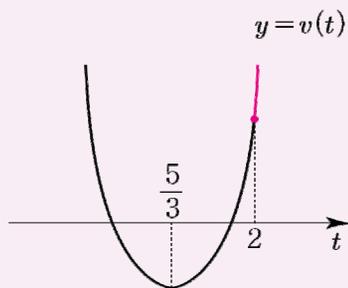
$t = \frac{5}{3}$ 를 포함하므로 판별식 $D \leq 0$ 을 써도 맞지만

만약 범위가 $t \geq 2$ 라면 판별식을 쓸 수 없다.

도대체 왜 그럴까?

판별식은 단순 무시해서 정의역이 실수 전체라고 가정하고 서로 다른 실근의 개수를 알려주기 때문이다.
즉, 위 문제에서 판별식 $D \leq 0$ 을 써도 괜찮은 이유는 $t \geq 0$ 인 경우 정의역이 실수 전체일 때와 마찬가지로 $v(t) \geq 0$ 가 성립하려면 t 축에 접하거나 위로 뿜어져야하기 때문이다.

예를 들어 범위를 $t \geq 2$ 라 해보자.



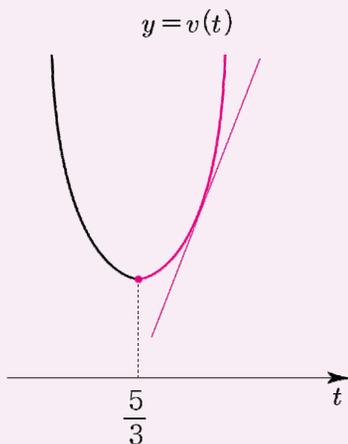
위와 같은 그림일 때, 판별식을 쓰면 방정식 $v(t) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는다고 알려주지만 실제로는 정의역이 $t \geq 2$ 이므로 실근을 갖지 않는다.

위에서 배운 내용을 적용시켜 보자.

만약 $v(t)$ 의 정의역이 $t \geq \frac{5}{3}$ 이고 기울기가 1인

직선 $f(t)$ 와 접한다고 했을 때,

방정식 $v(t) = f(t) \Rightarrow v(t) - f(t) = 0$ 에서 판별식을 쓸 수 있을까?



정답은“쓸 수 있다”이다. $t \geq \frac{5}{3}$ 이지만 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 동일하기 때문이다.

<요약>

1. 범위가 있을 때는 판별식 사용에 각별히 유의해야 하고 함수의 그래프를 그려 접근하도록 하자.
2. 범위가 있어도 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 같다면 판별식을 쓸 수 있다.

144

$$f(x) = x^3 - 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2$$

접점의 좌표를 t 라 하면 접선의 방정식은

$$y = 3t^2(x-t) + t^3 - 2$$

접선이 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4 = -2t^3 - 2 \Rightarrow 2t^3 = 2 \Rightarrow t = 1$$

$$y = 3(x-1) - 1 \Rightarrow y = 3x - 4 \text{이}$$

$(a, 0)$ 을 지나므로 $a = \frac{4}{3}$ 이다.

답 ②

145

$$x(t) = 2t^3 - kt^2$$

$$v(t) = 6t^2 - 2kt$$

$$v'(t) = 12t - 2k$$

$$v(1) = 0 \Rightarrow 6 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3$$

따라서 가속도는 $v'(3) = 36 - 6 = 30$ 이다.

답 30

$$xf(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

$$\{xf(x)\}' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$$

곡선 $y = xf(x)$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선은
 $y = (4a + 3b + 2c)(x - 1) + 2$

$$cx = (4a + 3b + 2c)(x - 1) + 2$$

$$\Rightarrow cx = (4a + 3b + 2c)x - 4a - 3b - 2c + 2$$

$$4a + 3b + 2c = c \cdots \text{㉠}$$

$$-4a - 3b - 2c + 2 = 0 \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $-c + 2 = 0 \Rightarrow c = 2$

$c = 2$ 를 ㉠에 대입하면 $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$
 $c = 2$ 를 ㉡에 대입하면 $4a + 3b = -2$

연립하면 $a = -2, b = 2, c = 2$

$$f'(x) = -6x^2 + 4x + 2 \text{이므로}$$

$$f'(2) = -24 + 8 + 2 = -14 \text{이다.}$$

답 ⑤

152

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15|x - 2a| + 3$$

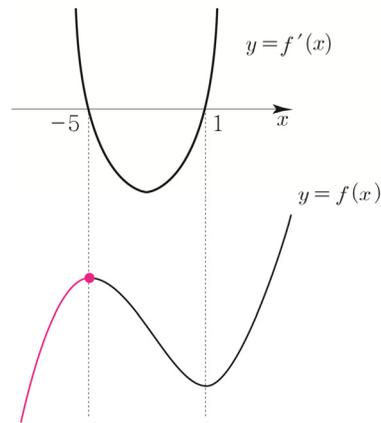
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 15x - 30a + 3 & (x > 2a) \\ x^3 + 6x^2 - 15x + 30a + 3 & (x \leq 2a) \end{cases}$$

$x > 2a$ 에서 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 30a + 3$ 이고,
 모든 실수 x 에 대하여
 $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 = 3(x^2 + 4x + 5) > 0$ 이므로
 $x > 2a$ 에서 $f(x)$ 는 증가함수이다.

따라서 $x \leq 2a$ 에서 $f(x)$ 가 증가하면 $f(x)$ 는 실수 전체의
 집합에서 증가한다.

$x \leq 2a$ 에서 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 30a + 3$ 이고
 $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x + 5)(x - 1)$ 이므로

$f'(x)$ 를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면



$x \leq 2a$ 에서 $f(x)$ 가 증가하려면

$$2a \leq -5 \Rightarrow a \leq -\frac{5}{2}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$ 이다.

답 ①

Tip1 $\langle f(x)$ 는 $x = 2a$ 에서 미분가능해야 할까? \rangle

$x = 2a$ 에서 미분가능해야 $f(x)$ 가 증가하는 것은 아니다.

Guide step에서 배운 내용을 다시 상기시켜보자.
 (개념 파악하기 - (4) 함수의 증가와 감소는
 어떻게 알 수 있을까?)
 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수
 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$ 이면
 $f(x)$ 는 그 구간에서 **증가**한다고 학습하였다.

즉, 미분가능해야 증가하는 것이 아니라 위 조건만
 만족시키면 그 구간에서 증가한다고 볼 수 있다.

다만 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능할 때,
 그 구간의 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이면
 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다고 학습하였다.

만약 $f(x)$ 가 상수함수가 아닌 다항함수라면
 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건
 은 이 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$
 라고 학습하였다.

Tip2 위 풀이가 이해가 잘 안 된다면
 아래 해설강의를 참고하도록 하자.

T2 152번 해설강의

<https://youtu.be/bnmiT2Gp3D8>



$$f(x) - 9 = (x-a)(x-ar)(x-ar^2)$$

$$f(x) = (x-a)(x-ar)(x-ar^2) + 9$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow -a^3r^3 + 9 = 1 \Rightarrow (ar)^3 = 8 \Rightarrow ar = 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-ar)(x-ar^2) + (x-a)(x-ar^2) + (x-a)(x-ar) \\ &= (x-2)(x-2r) + (x-a)(x-2r) + (x-a)(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) = -2 &\Rightarrow (2-a)(2-2r) = -2 \\ &\Rightarrow 4 - 2a - 4r + 2ar = -2 \\ &\Rightarrow 4 - 2a - 4r + 4 = -2 \\ &\Rightarrow a + 2r = 5 \end{aligned}$$

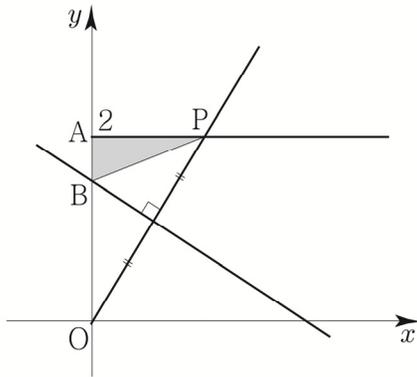
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-2)(x-2r) + 9 \text{ 이므로} \\ f(3) &= (3-a)(3-2r) + 9 = 18 - 3(a+2r) + 2ar \\ &= 18 - 15 + 4 = 7 \end{aligned}$$

이다.

답 ②

165

$$\begin{aligned} 0 < t < 2 \\ A(0, 2), P(t, 2) \end{aligned}$$



직선 OP의 기울기는 $\frac{2}{t}$, 선분 OP의 중점은 $(\frac{t}{2}, 1)$

선분 OP의 수직이등분선은

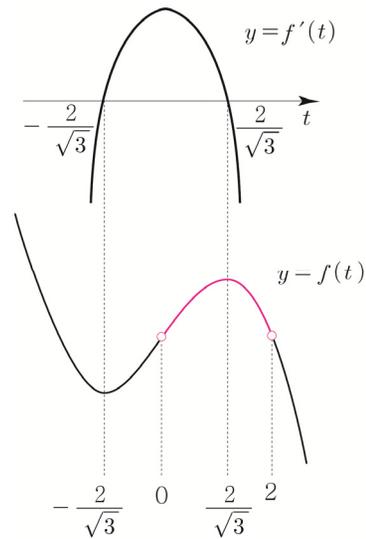
$$y = -\frac{t}{2}\left(x - \frac{t}{2}\right) + 1 \Rightarrow y = -\frac{t}{2}x + \frac{t^2}{4} + 1$$

$B\left(0, \frac{t^2}{4} + 1\right)$ 이므로

$$f(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \times t = \frac{1}{8}(4t - t^3)$$

$$f'(t) = \frac{1}{8}(4 - 3t^2) = -\frac{3}{8}\left(t - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$f'(t)$ 를 바탕으로 $f(t)$ 를 그리면



$0 < t < 2$ 에서 $f(t)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{b}{a}\sqrt{3}$$

따라서 $a+b=11$ 이다.

답 11

Tip <만약 $t > 2$ 이면 어떻게 될까?>

점 B의 y 좌표는 $\frac{t^2}{4} + 1$ 이므로 $t=2$ 일 때, 2이고

$t > 2$ 일 때, y 좌표는 2보다 크다.

B의 y 좌표가 A의 y 좌표보다 크기 때문에

$$\overline{AB} = \frac{t^2}{4} - 1 \text{이다.}$$

따라서 만약 $t > 0$ 라고 조건을 변경하면

선분 AB는 길이는 양수이므로 절댓값을 취해서

$$\overline{AB} = \left|1 - \frac{t^2}{4}\right| \text{라고 해야 한다.}$$

길이는 양수이므로 절댓값을 취해줘야 한다.

이를 항상 유의하도록 하자.

166

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 2x + k$$

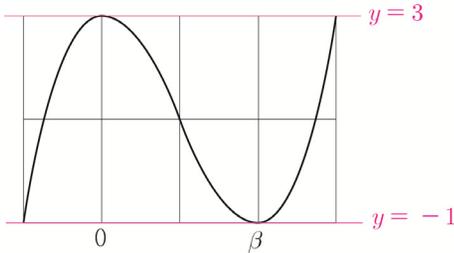
$$x^3 - 3x^2 - 3 = k$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

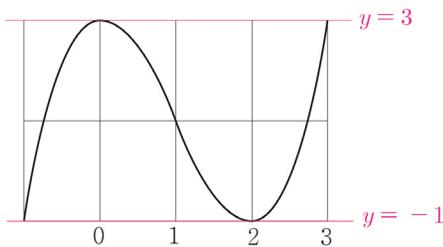
지금까지 배운 Technique들을 활용해서 실전적으로 풀어보자.

$f(0) = 3$, $f'(0) = 0$ 과 직선 $y = -1$ 와 곡선 $y = f(x)$ 가 접한다. 라는 정보를 바탕으로 Box를 그리면



극값차 공식에 의해서

$$\frac{11}{2}(\beta-0)^3 = 3 - (-1) = 4 \Rightarrow \beta^3 = 8 \Rightarrow \beta = 2$$



마지막으로 식세우기 Technique에 의해

$$f(x) - 3 = x^2(x-3) \Rightarrow f(4) = 16 + 3 = 19$$

181

$$g(x) = (x^3 + 2)f(x)$$

$$g'(x) = 3x^2f(x) + (x^3 + 2)f'(x)$$

$g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극솟값 24를 가지므로

$$g'(1) = 0 \Rightarrow 3f(1) + 3f'(1) = 0 \Rightarrow f(1) + f'(1) = 0$$

$$g(1) = 24 \Rightarrow 3f(1) = 24 \Rightarrow f(1) = 8$$

$$f(1) = 8 \text{이므로 } f'(1) = -8 \text{이다.}$$

따라서 $f(1) - f'(1) = 8 - (-8) = 16$ 이다.

답 16

182

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$$

$$f'(x) = -3x^2 + 8x - 3$$

점 B(3, 0)에서의 접선의 기울기는

$$f'(3) = -6 = -\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

$$\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 1 \Rightarrow 3\overline{DB} = \overline{AD} \text{ 이므로}$$

$$\text{직선 AC의 기울기는 } \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{3\overline{DB}} = \frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{이다.}$$

$$f'(a) = 2 \text{이므로 } -3a^2 + 8a - 3 = 2 \Rightarrow 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

따라서 조건을 만족시키는 a 의 값들의 곱은 $\frac{5}{3}$ 이다.

답 ⑤

183

최고차항의 계수가 a 인 이차함수 $f(x)$

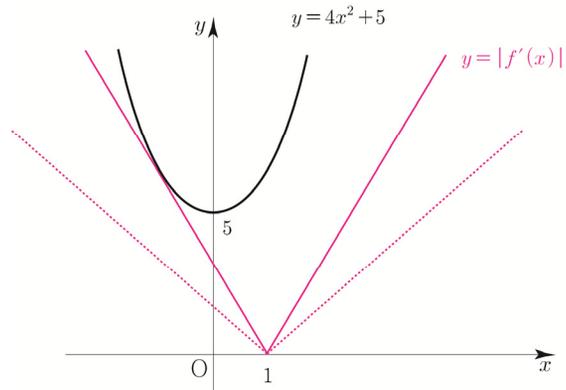
$y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 직선 $x = 1$ 이므로

$$f(x) = a(x-1)^2 + C$$

$$f'(x) = 2a(x-1)$$

모든 실수 x 에서 $|f'(x)| \leq 4x^2 + 5$ 이므로

$y = |f'(x)|$, $y = 4x^2 + 5$ 의 그래프를 그리면



a 의 최댓값을 구하는 것이므로 $a > 0$ 일 때라고 가정하고 답을 구해보자.

$y = |2a(x-1)|$ 는 a 에 관계없이 $(1, 0)$ 을 지나고

a 가 커지면 커질수록 기울기가 가팔라진다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $|2a(x-1)| \leq 4x^2 + 5$ 를

만족시키면서 실수 a 가 최대일 때는

$$y = -2a(x-1) \text{와 } y = 4x^2 + 5 \text{와 접할 때이다.}$$

$g(x) = 4x^2 + 5$ 라 하면

$$g'(x) = 8x$$

접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$g'(t) = -2a \Rightarrow 8t = -2a \Rightarrow t = -\frac{1}{4}a$$

$$\begin{aligned}
 g(t) = -2a(t-1) &\Rightarrow 4t^2+5 = -2a(t-1) \\
 &\Rightarrow \frac{a^2}{4}+5 = -2a\left(-\frac{1}{4}a-1\right) \\
 &\Rightarrow a^2+8a-20=0 \\
 &\Rightarrow (a+10)(a-2)=0 \\
 &\Rightarrow a=2 \quad (\because a>0)
 \end{aligned}$$

답 ②

조건을 만족시키는 실수 a 의 범위를 구해보자.

- ① $a > 0$ 일 때
 $0 < a \leq 2$ 이면 주어진 조건을 만족시킨다.
- ② $a = 0$ 일 때
 $0 \leq 4x^2+5$ 이므로 마찬가지로 주어진 조건을 만족시킨다.
- ③ $a < 0$ 일 때
 포인트는 $a < 0$ 일 때인데 $y = |2a(x-1)|$ 이므로
 a 의 절댓값만 같으면 $a < 0$ 와 $a > 0$ 는
 서로 같은 그래프가 그려진다.

예를 들어

$$a=1 \Rightarrow y = |2(x-1)|$$

$$a=-1 \Rightarrow y = |-2(x-1)| = |2(x-1)|$$

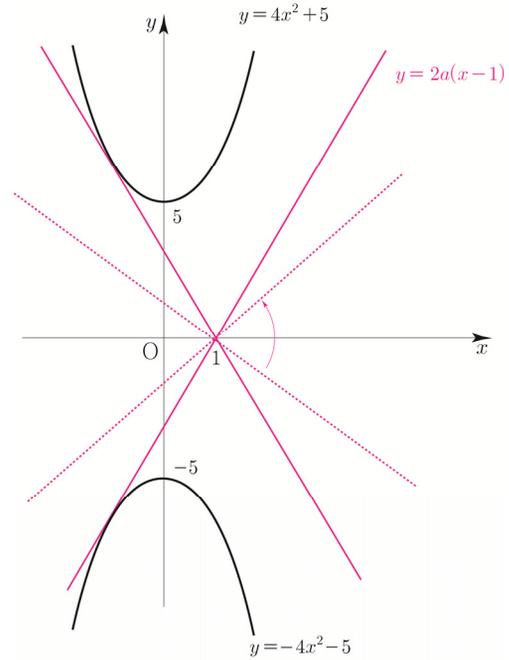
즉, $a < 0$ 일 때는 $-2 \leq a < 0$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 a 의 범위를 구하면
 $-2 \leq a \leq 2$ 이다.

다른 방법으로 구해보자.

$$\begin{aligned}
 |f'(x)| \leq 4x^2+5 &\Rightarrow -4x^2-5 \leq f'(x) \leq 4x^2+5 \\
 &\Rightarrow -4x^2-5 \leq 2a(x-1) \leq 4x^2+5
 \end{aligned}$$

직선 $y = 2a(x-1)$ 는 a 와 관계없이 항상 지나는 정점이
 $(1, 0)$ 이고 기울기가 $2a$ 인 일차함수로 해석할 수 있다.
 즉, 점 $(1, 0)$ 을 고정시켜 빙글빙글 돈다고 볼 수 있다.



a 의 최대는 $a > 0$ 일 때, $y = -4x^2-5$ 와 접할 때이고
 a 의 최소는 $a < 0$ 일 때, $y = 4x^2+5$ 와 접할 때이다.

첫 번째 풀이처럼 접점을 이용하여 풀어도 되고
 이차함수이니 판별식으로 풀어도 된다.

이번에는 판별식으로 풀어보자.

$$\begin{aligned}
 \text{① } a > 0 \text{일 때} \\
 2a(x-1) &= -4x^2-5 \\
 &\Rightarrow 4x^2+2ax-2a+5=0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} &= a^2+8a-20=0 \\
 &\Rightarrow (a+10)(a-2)=0 \Rightarrow a=2 \quad (\because a>0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{② } a < 0 \text{일 때} \\
 2a(x-1) &= 4x^2+5 \\
 &\Rightarrow 4x^2-2ax+2a+5=0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} &= a^2-8a-20=0 \\
 &\Rightarrow (a-10)(a+2)=0 \Rightarrow a=-2 \quad (\because a<0)
 \end{aligned}$$

따라서 조건을 만족시키는 a 의 범위는 $-2 \leq a \leq 2$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선은 점 $(2, f(2))$ 를 지나므로
 c 은 참이다.

답 ⑤

Tip <삼차방정식의 근과 계수의 관계 응용>

도함수의 활용 Training 1step 015번 문제 해설에서 배운 내용을 다시 복습해보자.

방정식 $f(x) = f(2)$ 과 방정식 $f(x) = mx + n$ 의 실근의 합은 같다. 우변을 좌변으로 넘겼을 때, x^2 의 계수에 영향을 주지 못하기 때문이다. 이를 이용하면 식세우기 Technique을 사용하지 않아도 된다.

방정식 $f(x) = f(2)$ 의 실근의 합이 $2+2-4=0$ 이므로 $f(x) = mx + n$ 의 실근의 합은 $-1-1+b=0$ 이다. 따라서 $b=2$ 이다.

197

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

$$g(x) = f(x) + |f'(x)|$$

$$(가) f(0) = g(0) = 0$$

$g(x) = f(x) + |f'(x)|$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$g(0) = f(0) + |f'(0)| \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

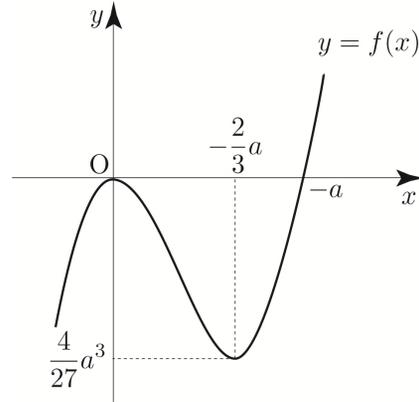
$$\text{즉, } f(x) = x^3 + ax^2 = x^2(x+a), \quad f'(x) = x(3x+2a)$$

(나) 방정식 $f(x) = 0$ 은 양의 실근을 갖는다.

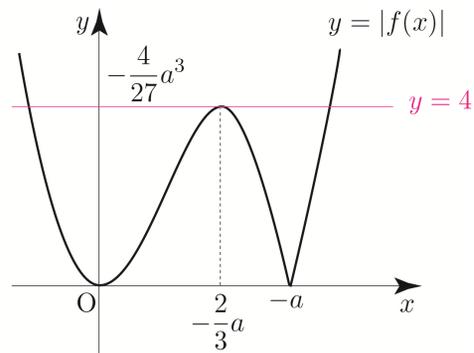
$$f(x) = x^2(x+a) \text{이므로 } -a > 0 \Rightarrow a < 0 \text{이다.}$$

$$f(0) = 0, \quad f(-a) = 0, \quad f\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{27}a^3$$

이를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면



함수 $|f(x)|$ 를 그리면 다음과 같다.



(다) 방정식 $|f(x)| = 4$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(라) 조건을 만족시키려면 $\left|f\left(-\frac{2}{3}a\right)\right| = 4$ 이어야 하므로

$$-\frac{4}{27}a^3 = 4 \Rightarrow a^3 = -27 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = x^2(x-3) \text{이므로}$$

$$g(x) = x^2(x-3) + |3x(x-2)| \text{이다.}$$

따라서 $g(3) = 9$ 이다.

답 ①

198

$$p > 0, \quad q > 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 12$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f(-1) = -7$$

이를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면 다음과 같다.

도함수의 활용 | Master step

201	31	220	243
202	108	221	⑤
203	④	222	105
204	④	223	39
205	①	224	42
206	10	225	③
207	⑤	226	51
208	③	227	④
209	④	228	36
210	④	229	38
211	160	230	147
212	④	231	65
213	①	232	19
214	⑤	233	61
215	②	234	108
216	④	235	9
217	④	236	5
218	32	237	35
219	⑤	238	14

해설

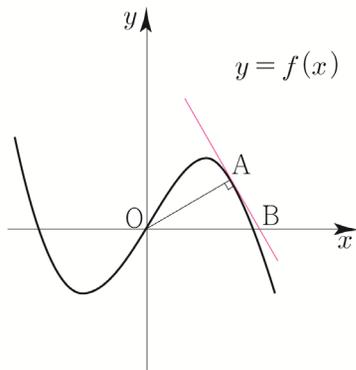
201

$$f(x) = -\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3}x$$

$$f'(x) = -3\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3} = -3\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a, f(a))$ 에서의 접선을 l

원점 O 와 직선 l 사이의 거리가 직선 OA 의 길이와 같으려면 직선 OA 의 기울기와 직선 l 의 기울기가 수직이어야 한다.



$$\frac{f(a)}{a} \times f'(a) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}a^3 + \sqrt{3}a}{a} \times (-3\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}) = -1$$

$$\Rightarrow 3(a^2-1)(3a^2-1) = -1 \Rightarrow 9a^4 - 12a^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (3a^2-2)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ or } a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$f(x)$ 는 기함수이므로 원점에 대하여 대칭되어 있다.

따라서 $a = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 일 때와 $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 일 때 삼각형 OAB 의 넓이는 서로 같다.

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{라 하면}$$

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$y = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

접선 l 의 x 절편은 $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ 이므로

$$B\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, 0\right)$$

삼각형 OAB 의 넓이는

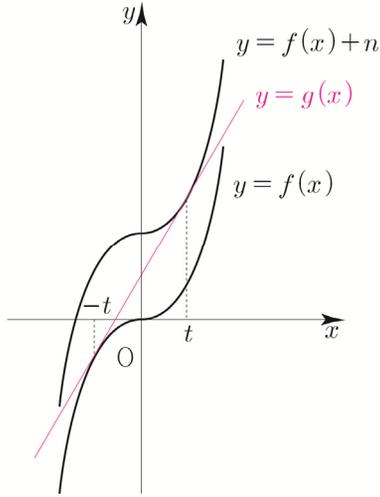
$$\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{9\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{27} = \frac{q}{p}\sqrt{3} \text{이므로}$$

$p+q=31$ 이다.

답 31

202

함수 $f(x) = x^3$ 와 자연수 n 에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x)+n$ 의 그래프와 모두 접하는 직선 $y=g(x)$



곡선 $y=f(x)+n$ 과 직선 $y=g(x)$ 가 접하는 접점의 x 좌표를 t 라 하면

접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 접하는 접점의 x 좌표를 T 라 하면

접선의 기울기는 $f'(T)=3T^2$ 이다.

두 접선이 동일하므로 접선의 기울기가 서로 같다.

$$f'(t)=f'(T) \Rightarrow 3t^2=3T^2 \Rightarrow T=-t \quad (T \neq t)$$

함수 $y=f(x)+n$ 위의 점 (t, t^3+n) 에서의 접선의 방정식은

$$y=3t^2(x-t)+t^3+n \Rightarrow y=3t^2x-2t^3+n$$

함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(-t, -t^3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=3t^2(x+t)-t^3 \Rightarrow y=3t^2x+2t^3$$

두 접선이 동일하므로 접선의 y 절편이 서로 같다.

$$-2t^3+n=2t^3 \Rightarrow 4t^3=n$$

모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) \leq 27$ 이 되려면

$$g'(x)=3t^2 \text{이므로}$$

$$3t^2 \leq 27 \Rightarrow t^2 \leq 9 \Rightarrow (t-3)(t+3) \leq 0$$

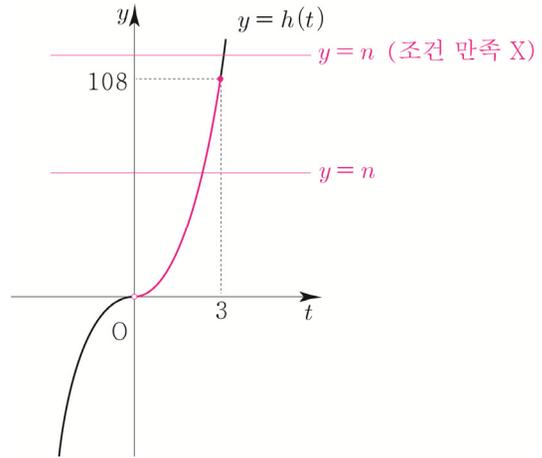
$$\Rightarrow 0 < t \leq 3 \quad (\because t > 0)$$

이면 된다.

즉, t 에 대한 방정식 $4t^3=n$ 에서 실근 t 가

$0 < t \leq 3$ 이 되도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하면 된다.

$h(t)=4t^3$ 라 하고 $y=h(t)$ 를 그리면



만약 $n > 108$ 이라면 $4t^3=n$ 의 실근 t 가 $t > 3$ 이므로 $0 < t \leq 3$ 를 만족시키지 않는다.

조건을 만족시키는 n 의 범위는 $1 \leq n \leq 108$ 이므로 모든 자연수 n 의 개수는 108이다.

답 108

203

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이다.

$f(x)$ 는 기함수이고 원점에 대하여 대칭이므로

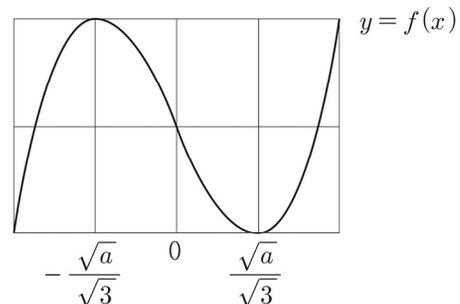
$$f(x)=x^3-ax$$

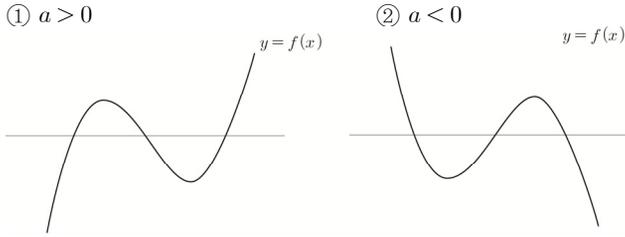
$$f'(x)=3x^2-a=3\left(x^2-\frac{a}{3}\right)=3\left(x-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\right)$$

(Guide step에서 x^3+ax 보다 x^3-ax 를 추천한 이유에 대하여 학습하였다.)

방정식 $|f(x)|=2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4이려면 삼차함수 $f(x)$ 는 극값이 존재하는 ①번 개형이어야 한다.

이를 바탕으로 Box를 그리면



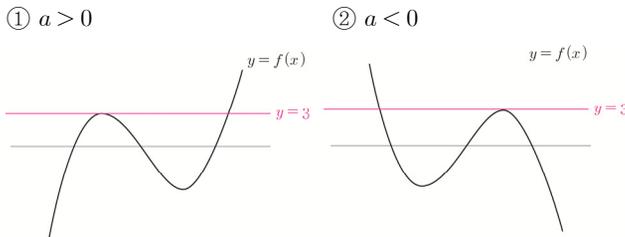


(나) 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때,
방정식 $g(f(x))=m$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(x)$ 는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖기 때문에 $g(f(x))$ 의 최솟값은 $g(x)$ 의 최솟값과 같다.
 $g(x) = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 1을 가지므로 $g(f(x))$ 는 $f(x)=3$ 에서 최솟값 $m=1$ 을 가진다.

즉, 방정식 $g(f(x))=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=3$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

따라서 직선 $y=3$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(다) 방정식 $g(f(x))=17$ 의 서로 다른 세 실근을 갖는다.

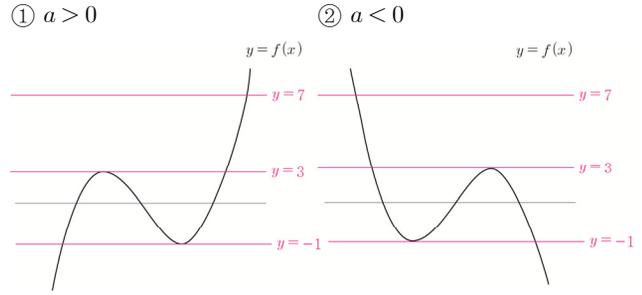
$$g(x) = 17 \Rightarrow x^2 - 6x + 10 = 17 \Rightarrow (x-7)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ or } x = 7$$

이므로 $f(x) = -1$ or $f(x) = 7$ 이다.

(다) 조건에서 방정식 $g(f(x))=17$ 의 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$ 의 실근의 개수를 조사하면 1이므로 $f(x)=-1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

즉, 세 직선 $y=-1, y=3, y=7$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 3이고 극솟값은 -1이므로 극댓값과 극솟값의 합은 $3+(-1)=2$ 이다.

답 ①

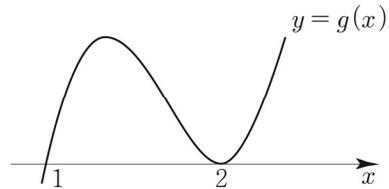
206

두 삼차함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x)g(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$
 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이고,
 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가진다.

$g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 $g'(2)=0$
 $g(x) = 3(x-a)(x-b)^2$ 꼴이어야 하므로
 $g'(2)=0$ 를 만족시키려면 $g(x)$ 는 $(x-2)^2$ 을 인수로 가져야 한다.

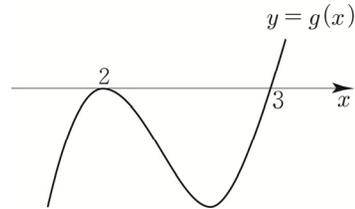
즉, $g(x) = 3(x-1)(x-2)^2$ or $g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$

① $g(x) = 3(x-1)(x-2)^2$



$g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$



$g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

즉, $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$f'(0) = \frac{7}{3} = \frac{q}{p} \text{ 이므로 } p+q=10 \text{ 이다.}$$

답 10

Tip <숨겨진 조건 해석>

“ $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가진다.”
로 알려주고자 하는 조건은 다음과 같다.

① $g'(2)=0$ ② $x=2$ 에서 **극댓값**
즉, 두 조건 모두 사용되어야 한다.

출제자 입장에서 $g'(2)=0$ 만 알려주고자 했다면
극댓값보다는 극값을 갖는다고 했을 것이다.

이렇게 평가원은 한 조건($x=2$ 에서 극댓값)에
다른 조건($g'(2)=0$)을 숨겨서 제시하는 것을 좋아한다.

ex 함수 $g(x) = \int_0^x tf(t)dt$ 라는 조건은

① $g(0)=0$ ② $g'(x) = xf(x)$

위 두 조건 말고도 ③ $g'(0)=0$ 이라는

숨겨진 조건도 내포하고 있다.

즉, 모든 조건은 이유가 있으니 조건을 꼼꼼히 해석하자.

207

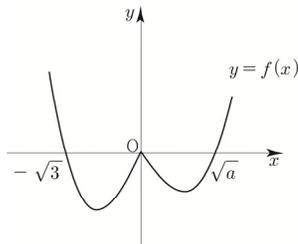
$$f(x) = \begin{cases} a(3x-x^3) & (x < 0) \\ x^3-ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

a 를 모르기 때문에 $f(x)$ 를 그리기 곤란하므로
 a 의 범위에 따라 case분류하면

① $a > 0$

$$f(x) = \begin{cases} -ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & (x < 0) \\ x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $f(x)$ 를 그리면

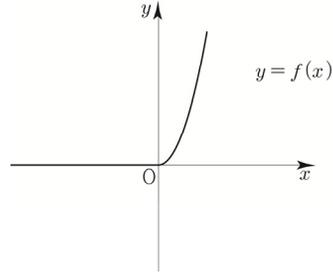


$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 0을 가지므로
조건을 만족시키지 않는다.

② $a = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^3 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $f(x)$ 를 그리면



$x=0$ 에서 극솟값 0을 갖고, $x=b(b < 0)$ 에서
극값(극댓값, 극솟값 모두 가능) 0을 가지므로
조건을 만족시키지 않는다.

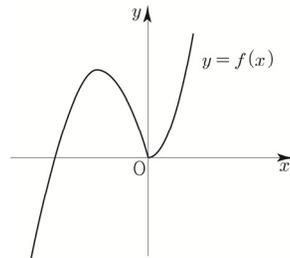
(위 설명이 이해가 되지 않았다면 Guide step
개념파악하기 - (6) 함수의 극대와 극소란 무엇일까?
파트를 다시 복습하길 권한다.)

③ $a < 0$

$$f(x) = \begin{cases} -ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & (x < 0) \\ x^3-ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$y = x^3 - ax$$

$y' = 3x^2 - a > 0$ ($\because a < 0$) 이므로 $f(x)$ 를 그리면



$x < 0$ 에서

$$f'(x) = a(3-3x^2) = -3a(x+1)(x-1)$$

$f'(-1) = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 5를 가진다.

$$f(-1) = 5 \Rightarrow a(-3+1) = 5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}(3x-x^3) & (x < 0) \\ x^3 + \frac{5}{2}x & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $f(2) = 8+5 = 13$ 이다.

답 ⑤

208

자연수 n

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

(가) $f(n) = 0$

$f(x)$ 는 $(x-n)$ 을 인수로 가져야한다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $(x+n)f(x) \geq 0$ 이다.

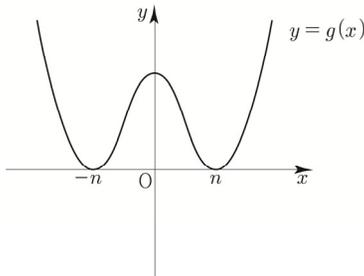
$$(x+n)f(x) = (x+n)(x-n)(x^2+ax+b)$$

$$g(x) = (x+n)(x-n)(x^2+ax+b)$$
라 하면

$g(x)$ 는 사차함수이고 $g(-n) = g(n) = 0$ 이므로

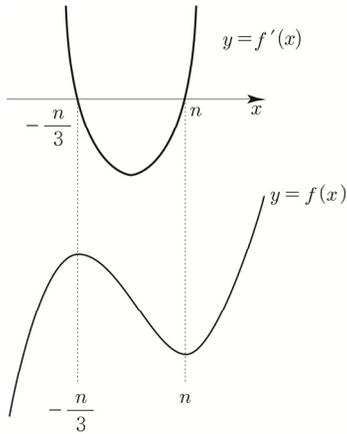
모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 가 되려면

$$g(x) = (x+n)^2(x-n)^2$$
이어야 한다.



$$f(x) = (x+n)(x-n)^2$$

$$f'(x) = (x-n)^2 + 2(x+n)(x-n) = 3(x-n)\left(x + \frac{n}{3}\right)$$



$f(x)$ 는 $x = -\frac{n}{3}$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f\left(-\frac{n}{3}\right) = \frac{2}{3}n \times \frac{16}{9}n^2 = \frac{32}{27}n^3 = a_n$$

따라서 a_n 이 자연수가 되도록 하는 n 의 최솟값은 3이다.

답 ③

209

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = (3t^2 + 2at + b)(x-t) + t^3 + at^2 + bt$$

접선이 y 축과 만나는 점을 P

$$P(0, -2t^3 - at^2)$$
이므로

$$g(t) = \sqrt{(-2t^3 - at^2)^2} = |-2t^3 - at^2| = |2t^3 + at^2|$$

(가) $f(1) = 2$

$$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

(나) 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

Tip <함수 $|h(x)|$ 의 미분가능성>

Q. 미분가능한 함수 $h(x)$ 에 대하여 함수 $|h(x)|$ 가 $x = k$ 에서 미분이 가능한지 불가능한지 확인하려면 어떻게 해야 할까?

$h(k)$ 의 함숫값에 따라 크게 2가지 case가 존재한다.

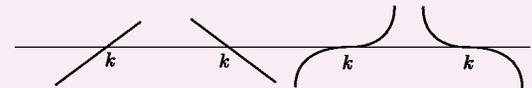
① $h(k) \neq 0$

$h(k) \neq 0$ 인 경우에는 미분가능한 함수를 x 축 아래 부분을 접어 올리지만 하는 것이므로 실수 전체에서 미분가능하면 $h'(k)$ 도 당연히 존재한다.

② $h(k) = 0$

문제는 ② case인데 $h(k) = 0$ 일 때에는 case분류를 해줘야 한다.

i) $x = k$ 를 경계로 부호가 바뀔 때는 총 4가지의 개형이 가능하다.

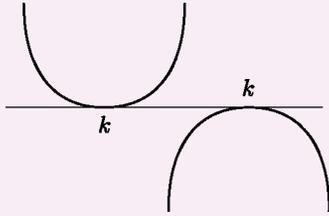


첫 번째와 두 번째 개형은 $h'(k) \neq 0$ 이므로 접어 올렸을 때 좌미분계수와 우미분계수가 같아질 수 없다. ($h'(k) = -h'(k) \Rightarrow h'(k) = 0$ 모순!)

결국 미분가능하려면 세 번째와 네 번째 개형과 같이 $h'(k) = 0$ 이어야 한다.

즉, $x = k$ 에서 뚫는 접선이 나와야 한다.

ii) $x = k$ 를 경계로 부호가 바뀌지 않을 때는 총 2가지 개형이 가능하다.



(예초에 $h(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능하다고 했기 때문에 첨점(뾰족점)은 나올 수가 없다.)

결국 ② case에서 미분가능하려면 i), ii) 모두 $h'(k) = 0$ 이어야 한다.

$$g(t) = \left| 2t^2 \left(t + \frac{a}{2} \right) \right|$$

$$h(t) = 2t^2 \left(t + \frac{a}{2} \right) \text{라 하면}$$

$$h'(t) = 4t \left(t + \frac{a}{2} \right) + 2t^2$$

$$h' \left(-\frac{a}{2} \right) = 0 \text{이고 } x = -\frac{a}{2} \text{에서 미분가능해야 하므로}$$

$$h' \left(-\frac{a}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow a = 0$$

(물론 삼차함수 개형을 바탕으로 생각하면 $a = 0$ 인 것이 자명하다.)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$a + b = 1 \text{이고 } a = 0 \text{이므로 } b = 1 \text{이다.}$$

$$f(x) = x^3 + x \text{이므로 } f(3) = 30 \text{이다.}$$

답 ④

210

$$f(x) = x^3 - x, \text{ 상수 } a (a > -1)$$

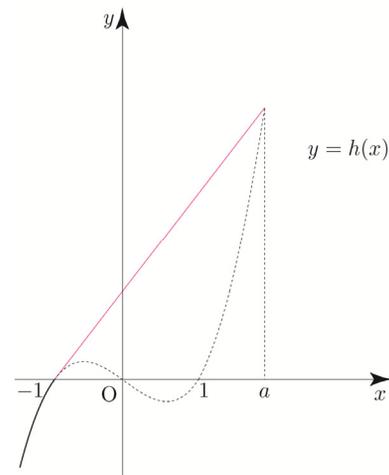
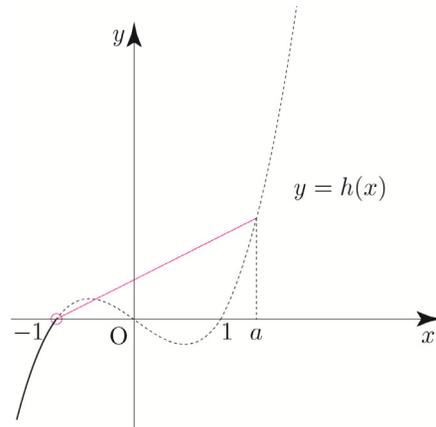
$y = f(x)$ 위의 두 점 $(-1, f(-1)), (a, f(a))$ 를 지나는 직선을 $y = g(x)$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < -1) \\ g(x) & (-1 \leq x \leq a) \\ f(x-m)+n & (x > a) \end{cases}$$

(가) 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능 하다.

만약 아래와 같이 직선 $y = g(x)$ 의 기울기가 함수 $f(x)$ 위의

점 $(-1, 0)$ 에서의 기울기와 같지 않으면 함수 $h(x)$ 는 $x = -1$ 에서 미분가능하지 않으므로 (가) 조건을 만족시키지 않는다. 즉, 직선 $y = g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 위의 점 $(-1, 0)$ 에서의 접선과 같아야 한다.



training - 1step 015번 해설에서 배운 근과 계수의 관계 Technique을 적용시켜 a 를 구해보자.

$$f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow x^3 - x - (px + q) = 0 \Rightarrow x^3 - (p+1)x - q = 0$$

점 $(-1, 0)$ 에서 접하므로 위 방정식은 -1 (접점의 x 좌표)을 중근으로 갖는다. 다른 실근이 a 이므로 세 근의 합을 구하면 $-1 - 1 + a = 0 \Rightarrow a = 2$ 이다.

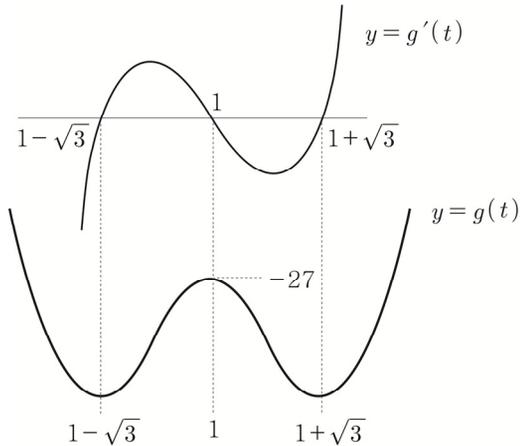
이번에는 $f(x-m)+n (x > 2)$ 를 해석해보자.

함수 $f(x-m)+n$ 의 그래프는 함수 $f(x)$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

(가) 조건을 만족시키려면 $x = 2$ 에서 미분가능해야 하므로 함수 $f(x-m)+n$ 위의 점 $(2, 6)$ 에서의 접선의 기울기가 함수 $f(x)$ 위의 점 $(-1, 0)$ 에서의 접선의 기울기와 같아야 한다. $f'(-1) = f'(1)$ 이므로 두 가지 case가 존재한다.

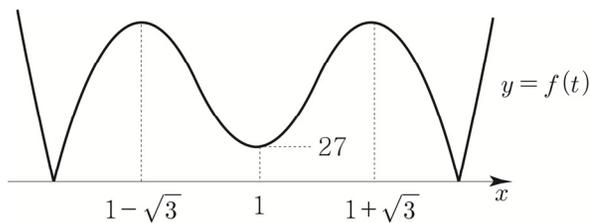
$$\begin{aligned}
 g'(t) &= 4t^3 - 12t^2 + 8 = 4(t^3 - 3t^2 + 2) \\
 &= 4(t-1)(t^2 - 2t - 2) \\
 &= 4(t-1)(t - (1 - \sqrt{3}))(t - (1 + \sqrt{3})) \\
 g(1) &= 1 - 4 + 8 - 32 = -27
 \end{aligned}$$

$g'(t)$ 를 바탕으로 $g(t)$ 를 그리면



($y = g'(t)$ 의 그래프가 (1, 0)에 대하여 점대칭이므로 $y = g(t)$ 는 $t = 1$ 에 대하여 대칭이다. 이는 Guide Step 개념파악하기 - (14) 사차함수의 그래프는 어떠한 특징을 가지고 있을까? 에서 학습하였다.)

$g(t)$ 의 그래프를 바탕으로 $f(t) = |g(t)|$ 를 그리면



$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq 0$$

case분류하면

$$\textcircled{1} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = 0$$

위 조건은 우미분계수와 좌미분계수가 둘 중에 하나만 0이면 되지만 함수 $f(t)$ 는 우미분계수와 좌미분계수 모두 0으로 같은 경우만 가능하다.

(두 개의 점점빼고 다른 점에서는 미분가능하므로)

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 1 - \sqrt{3} \text{ or } t = 1 \text{ or } t = 1 + \sqrt{3}$$

$$\textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} < 0$$

우미분계수와 좌미분계수의 부호가 서로 달라야 한다.

(미분가능하지 않은 점부터 조사하면 된다.)

방정식 $f(t) = 0$ 의 근 중 서로 다른 두 실근의 합은 함수 $y = f(t)$ 의 그래프의 특징으로 빠르게 찾을 수 있다. $y = f(t)$ 는 $t = 1$ 에 대칭되어 있으므로 두 실근의 합은 $1 \times 2 = 2$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 t 의 값의 합은

$$1 - \sqrt{3} + 1 + 1 + \sqrt{3} + 2 = 5 \text{이다.}$$

답 ④

Tip <좌미분계수 × 우미분계수>

$$\text{Q1. } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$$

이때 $x = a$ 에서 미분이 가능할까?

답은 “아니다”이다.

예를 들어 우미분계수가 0이고 좌미분계수가 1이면 조건을 만족시키지만 $x = a$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\text{Q2. } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$$

의 조건은 $x = a$ 에서 미분가능하지 않다는 조건과 완벽히 동일할까?

답은 “아니다”이다. 좌미분계수와 우미분계수가 같을 수 없으므로 $x = a$ 에서 미분가능하지 않은 것은 맞지만 반드시 부호가 달라야 한다.

예를 들어 우미분계수가 1이고 좌미분계수가 2이면 $x = a$ 에서 미분가능하지 않지만 위 조건을 만족시키지 않는다.

즉, “미분가능하지 않다”는 조건보다 더 tight한 조건이다.

$$\text{Q3. } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

이때 $x = a$ 에서 미분이 가능할까?

답은 “아니다”이다.

예를 들어 우미분계수가 2이고 좌미분계수가 3이면 위 조건을 만족시키지만 $x = a$ 에서 미분가능하지 않을 수 있다.

$f(x) = 4x + t \Rightarrow f(x) - 4x = t$
 $h(x) = f(x) - 4x$ 라 하자. (New 함수 Technique!)
 $f(x)$ 와 $-4x$ 는 기함수이므로 $h(x)$ 는 기함수이다.

$$h(x) = \begin{cases} x(x+a)^2 - 4x & (x < 0) \\ x(x-a)^2 - 4x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x\{(x+a)^2 - 4\} & (x < 0) \\ x\{(x-a)^2 - 4\} & (x \geq 0) \end{cases}$$

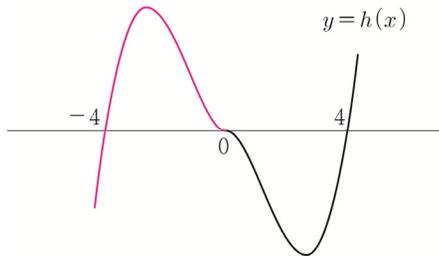
$$h(x) = \begin{cases} x(x+a-2)(x+a+2) & (x < 0) \\ x(x-a-2)(x-a+2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$h(x)$ 는 기함수이므로 $x < 0$ 인 부분을 따로 그리지 않아도
 $x \geq 0$ 인 부분을 원점에 대하여 대칭시켜 그릴 수 있다.
 (대칭성 적극활용!)

$x \geq 0$ 에서 $h(x) = x(x-a-2)(x-a+2)$ 의
 x절편은 0, $a+2$, $a-2$ 이다.
 이때 $a-2 < a+2$ 이고, a 는 양수이므로 $0 < a+2$ 이다.

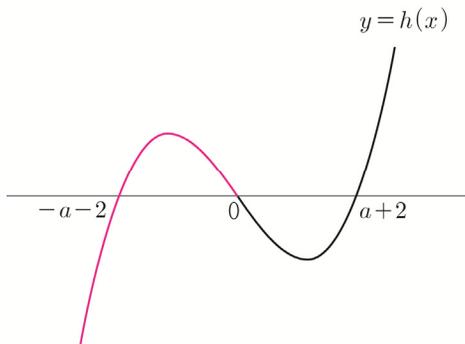
$a-2$ 와 0의 대소 관계에 따라 case분류하면

① $a-2 = 0 \Rightarrow a = 2$



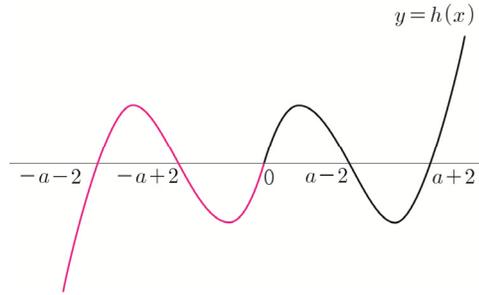
곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = t$ 의 서로 다른 교점의 개수의
 최댓값이 3이므로 (가) 조건을 만족시키지 않는다.

② $a-2 < 0 \Rightarrow a < 2$



곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = t$ 의 서로 다른 교점의 개수의
 최댓값이 3이므로 (가) 조건을 만족시키지 않는다.

③ $a-2 > 0 \Rightarrow a > 2$

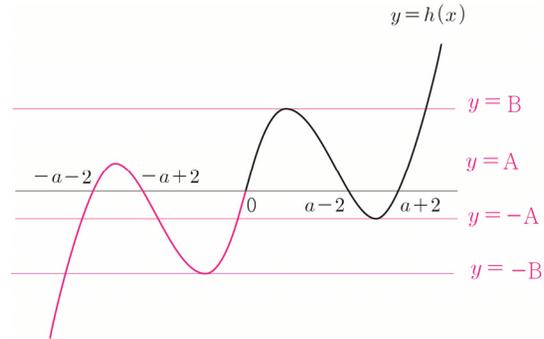


곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = t$ 의 서로 다른 교점의 개수의
 최댓값이 5이므로 (가) 조건을 만족시킨다.

(나) 조건을 해석하기 위해서 $x > 0$ 에서 극댓값과
 |극솟값|의 대소관계에 따라 case분류하면

③- i) $x > 0$ 에서 극댓값 $>$ |극솟값| 일 때

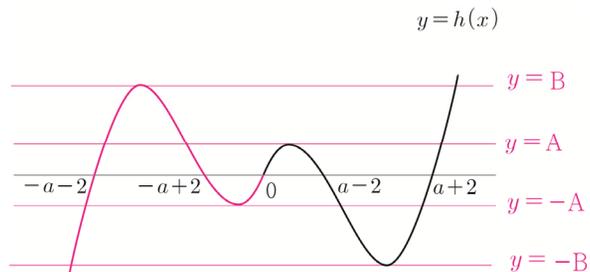
$x > 0$ 에서 $h(x)$ 의 극댓값을 B, 극솟값을 $-A$ 라 하면



함수 $g(t)$ 는 $t = -B, t = -A, t = A, t = B$ 에서 불연속이다.
 함수 $g(t)$ 가 $t = \alpha$ 에서 불연속인 α 의 개수는
 4이므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다.

③- ii) $x > 0$ 에서 극댓값 $<$ |극솟값| 일 때

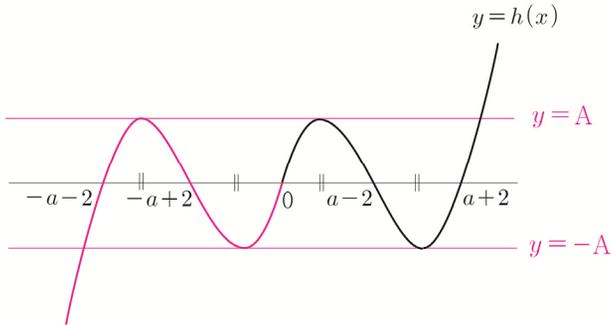
$x > 0$ 에서 $h(x)$ 의 극댓값을 B, 극솟값을 $-A$ 라 하면



함수 $g(t)$ 는 $t = -B, t = -A, t = A, t = B$ 에서 불연속이다.
 함수 $g(t)$ 가 $t = \alpha$ 에서 불연속인 α 의 개수는 4이므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다.

③-iii) $x > 0$ 에서 극댓값 = |극솟값| 일 때

$x > 0$ 에서 $h(x)$ 의 극댓값을 A, 극솟값을 $-A$ 라 하면



위 그림과 같이 (나) 조건을 만족시킨다.

극댓값 = |극솟값| 이려면 두 점 $(0, 0), (a+2, 0)$ 의 중점이 $(a-2, 0)$ 이어야 하므로

$$\frac{(a+2)+0}{2} = a-2 \Rightarrow a=6$$

$$f(x) = \begin{cases} x(x+6)^2 & (x < 0) \\ x(x-6)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (x+6)^2 + 2x(x+6) & (x < 0) \\ (x-6)^2 + 2x(x-6) & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$f'(0) = 36$ 이다.

답 36

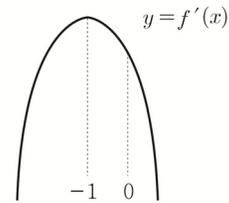
Tip1 대칭성은 출제자 입장에서 정말 매력적인 소재 중 하나이다. 이 문제의 경우에도 출제자는 문제를 설계하기 전부터 ‘원점 대칭을 이용한 문제를 내야겠다.’는 밑그림을 그린 후 문제를 제작했을 가능성이 높다.

Tip2 전형적인 case분류, 대칭성, New 함수 Technique이 모두 적용된 종합세트 같은 문제이다. 처음부터 잘하는 사람은 없다. 아무것도 아니게 느껴질 때까지 주기적으로 반복하여 확실히 체화하도록 하자.

229

$h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이고 $x=0$ 에서 미분가능하다.
 $\Rightarrow f(0) = g(0), f'(0) = g'(0)$

이차함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이므로 $f'(0) < 0$ 이다. $f'(0) = g'(0) \Rightarrow g'(0) < 0$



삼차함수 $g(x)$ 는 이차항의 계수가 0이므로 $g(x) = ax^3 + bx + c$ 라 하면

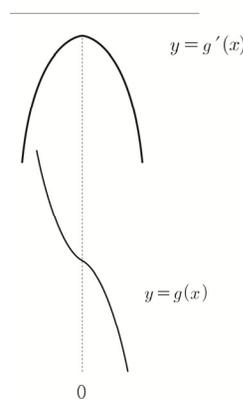
$$g'(x) = 3ax^2 + b$$

$$g'(0) < 0 \Rightarrow b < 0$$

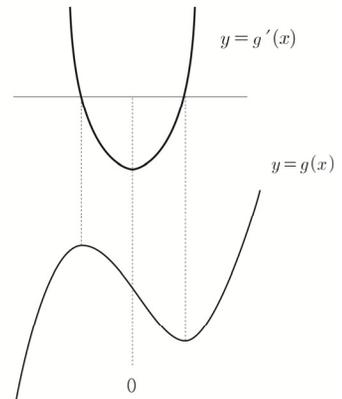
a 의 부호에 따라 case분류하면

(함수 $g'(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 것이 핵심이다.)

① $a < 0$

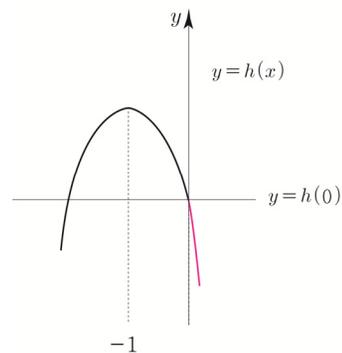


② $a > 0$



a 의 범위에 따라 $h(x)$ 를 그리면

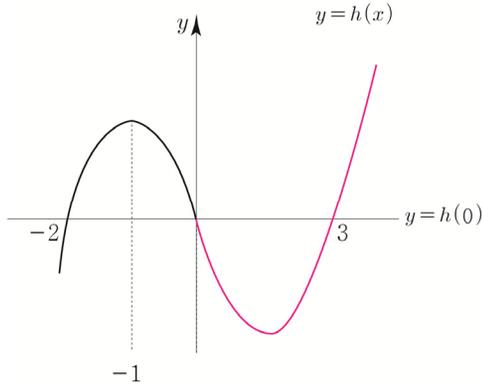
① $a < 0$



(가) 조건을 만족시키지 않는다.

② $a > 0$

(가) 조건을 만족시키려면 방정식 $h(x) = h(0)$ 의 해는 $-2, 0, 3$ 이어야 한다.



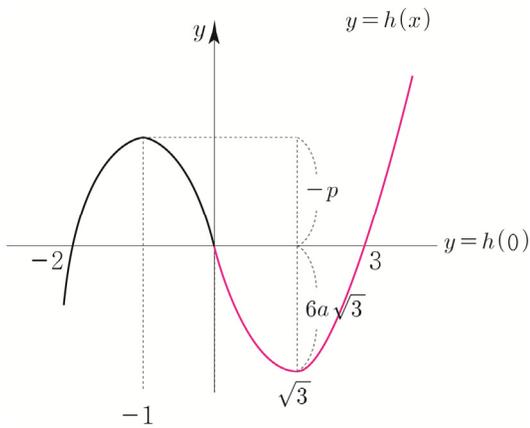
$g(x)$ 는 점 $(0, g(0))$ 에 대하여 대칭이므로
 $g(x) - g(0) = ax(x+3)(x-3)$

$$g'(x) = 3a(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \text{ 이므로}$$

$$g(\sqrt{3}) - g(0) = -6a\sqrt{3} \Rightarrow g(0) - g(\sqrt{3}) = 6a\sqrt{3}$$

$f(x)$ 의 최댓값을 q 라 하고 최고차항의 계수를 p 라 하면
 $f(x) = p(x+1)^2 + q \Rightarrow f(-1) - f(0) = -p$

닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 차는
 $\{f(-1) - f(0)\} + \{g(0) - g(\sqrt{3})\} = -p + 6a\sqrt{3}$



(나) 조건에 의해서 $-p + 6a\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} \dots \textcircled{㉠}$

$$f'(x) = 2p(x+1) \Rightarrow f'(0) = 2p$$

$$g'(x) = 3a(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \Rightarrow g'(0) = -9a$$

$$f'(0) = g'(0) \Rightarrow p = -\frac{9}{2}a \dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하면 $\frac{9}{2}a + 6a\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3}$ 이므로

$$a = \frac{2}{3}, p = -3 \text{ 이다.}$$

$$f'(x) = -6(x+1)$$

$$g'(x) = 2(x^2 - 3)$$

$$h'(-3) = f'(-3) = 12$$

$$h'(4) = g'(4) = 26$$

이므로 $h'(-3) + h'(4) = 38$ 이다.

답 38

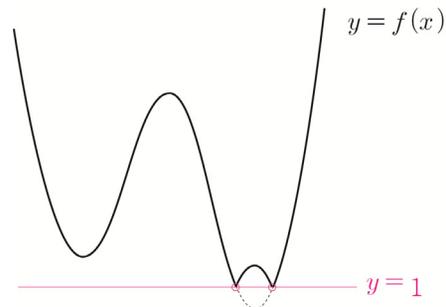
Tip 삼차함수 $g(x)$ 의 이차항의 계수가 0이므로 $g'(x)$ 가 y 축에 대하여 대칭이라는 것을 알 수 있고 이를 바탕으로 $x=0$ 의 위치를 알 수 있다. 즉, $x=0$ 의 위치를 직접적으로 알려주지 않고 간접적으로 제시하여 난이도를 높였다. 이름하여 포장의 기술!

230

최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 3, f'(3) < 0$ 인
 사차함수 $f(x)$

$S = \{a \mid \text{함수 } |f(x) - t| \text{가 } x=a \text{에서 미분가능하지 않다.}\}$
 $n(S) = g(t)$

예를 들어 $t=1$ 일 때,
 두 그래프 $y=f(x)$ 와 $y=1$ 이 아래 그림과 같다면

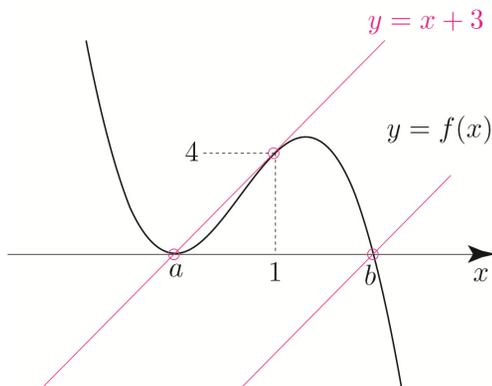


($y=t$ 를 x 축으로 보고 $y=t$ 보다 아래에 있는 부분을 접어 올리면 함수 $|f(x) - t|$ 의 그래프를 빠르게 구할 수 있다.)

위 그림에서 함수 $|f(x) - 1|$ 는 두 점에서 미분가능하지 않으므로 $n(S) = 2 \Rightarrow g(1) = 2$ 이다.

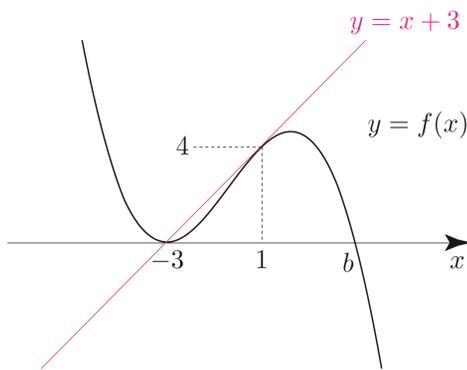
$f'(0) > 1$ 을 만족시키지 않는다.

④ - ii)



$f'(0) > 1$ 을 만족시킬 수 있다.

점 $f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = x + 3$ 이므로 $a = -3$ 이다.



식세우기 Technique에 의해서

$$f(x) - (x+3) = k(x+3)(x-1)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = k(x+3)(x-1)^2 + x + 3$$

$$f'(x) = k(x-1)^2 + 2k(x+3)(x-1) + 1$$

곡선 $y = f(x)$ 는 x 축과 $x = -3$ 에서 접하므로

$$f'(-3) = 0 \Rightarrow 16k + 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{16}$$

$$f(x) = -\frac{1}{16}(x+3)(x-1)^2 + x + 3 \text{ 이므로}$$

$$f(0) = -\frac{3}{16} + 3 = \frac{45}{16} \text{ 이다.}$$

따라서 $p+q=61$ 이다.

답 61

234

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

$$g(x) = f(x-3) \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$$

$|f(x)| = J(x)$ 라 하자.

미분계수와 도함수 training - 1step 049번 해설에서 배웠던 우미분계수와 좌미분계수로 쪼개서 보는 관점으로

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h} \text{ 을 해석해보자.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(x+h) - J(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(x+h) - J(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(x-h) - J(x)}{-h}$$

$$= J(x) \text{의 우미분계수} + J(x) \text{의 좌미분계수}$$

$$= |f(x)| \text{의 우미분계수} + |f(x)| \text{의 좌미분계수}$$

($t = -h$ 라 하면 $h \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow 0^-$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(x-h) - J(x)}{-h} = \lim_{h \rightarrow t^-} \frac{J(x+t) - J(x)}{t}$$

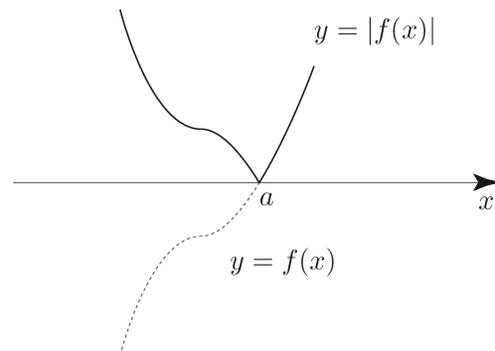
(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속

함수 $f(x-3)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

($|f(x)|$ 의 우미분계수 + $|f(x)|$ 의 좌미분계수)가 불연속인 점을 조사하면 된다.

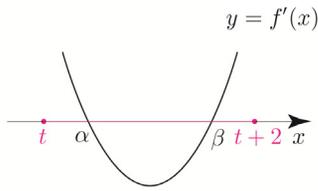
같은 잡기 위해서 $f(x)$ 가 아래 그림과 같을 때,

($|f(x)|$ 의 우미분계수 + $|f(x)|$ 의 좌미분계수)을 분석해보자.

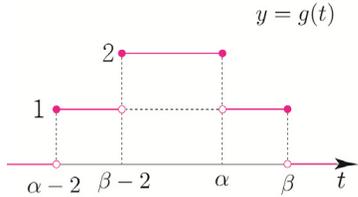


함수 $|f(x)|$ 가 미분가능한 점에서는 우미분계수와 좌미분계수가 서로 같으므로 자연스럽게 연결되지만 $x = a$ 와 같이 첨점이 생겨 미분가능하지 않으면

① $\beta - \alpha < 2$ 일 때



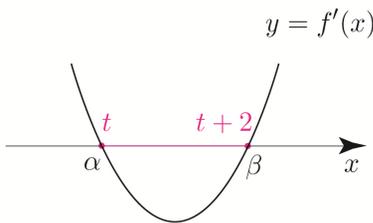
함수 $g(t)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



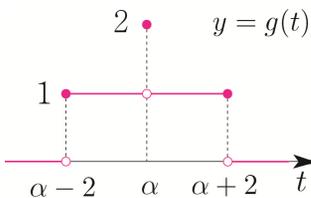
(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) + \lim_{t \rightarrow a^-} g(t) \leq 2$

$\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) = 1, \lim_{t \rightarrow a^-} g(t) = 2$ 이므로 (가) 조건을 만족시키지 않는다.

② $\beta - \alpha = 2 \Rightarrow \beta = \alpha + 2$ 일 때



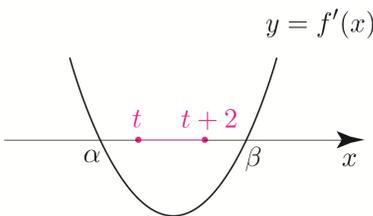
함수 $g(t)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



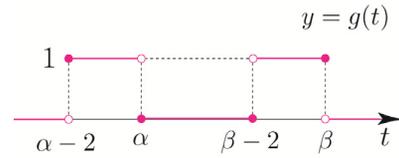
(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) + \lim_{t \rightarrow a^-} g(t) \leq 2$

이 경우 (가) 조건을 만족시킨다.

③ $\beta - \alpha > 2$ 일 때



함수 $g(t)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) + \lim_{t \rightarrow a^-} g(t) \leq 2$

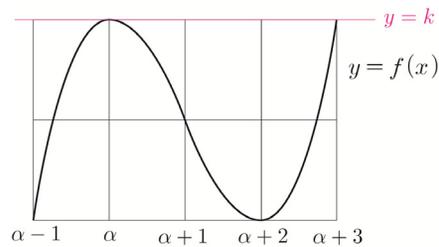
이 경우 (가) 조건을 만족시키지만 $g(t)$ 의 치역은 0과 1이므로 (나) 조건에서 $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$ 를 만족시킬 수 없다.

즉, ② $\beta - \alpha = 2 \Rightarrow \beta = \alpha + 2$ 이어야 한다.

(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2, g(f(0)) = 1$
 $g(\alpha) = 2 \Rightarrow f(1) = f(4) = \alpha$

$f'(\alpha) = f'(\alpha + 2) = 0$ 이므로

Box를 그리면 다음과 같다.



$f(\alpha) = k$ 라 하자.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이므로

식세우기 technique을 사용하면

$$f(x) - k = \frac{1}{2}(x - \alpha)^2(x - \alpha - 3)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x - \alpha)^2(x - \alpha - 3) + k$$

$$f(1) = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2(-2 - \alpha) + k$$

$$f(4) = \frac{1}{2}(4 - \alpha)^2(1 - \alpha) + k$$

$$f(1) = f(4) = \alpha$$

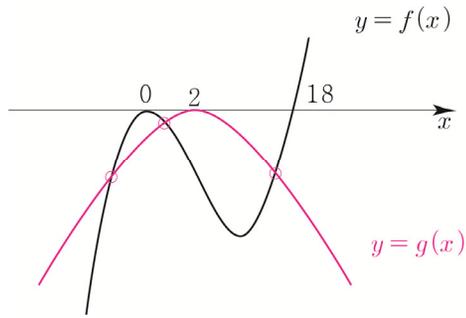
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2(-2 - \alpha) + k = \frac{1}{2}(4 - \alpha)^2(1 - \alpha) + k$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2(-2 - \alpha) - (4 - \alpha)^2(1 - \alpha) = 0$$

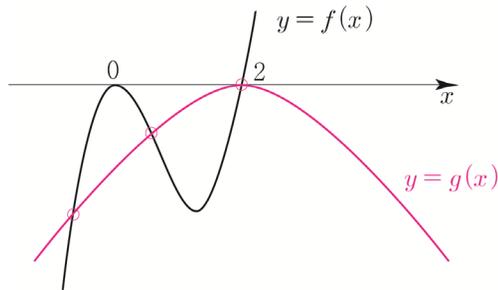
$$\Rightarrow (1 - \alpha)\{(1 - \alpha)(-2 - \alpha) - (4 - \alpha)^2\} = 0$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)(9\alpha - 18) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ or } \alpha = 2$$



①- ii) $c = -2$
 $f(x) = x^2(x-2)$

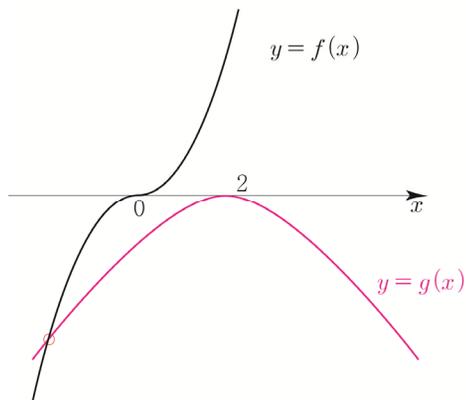


(다) 방정식 $f(x) = g(x)$ 는 오직 하나의 실근을 가진다.

①- i), ①- ii)의 경우 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나므로 (다)조건을 만족시키지 않는다.

② 방정식 $2t^2 + (c-6)t - 4c = 0$ 이 0과 0이 아닌 하나의 실근을 갖는 경우

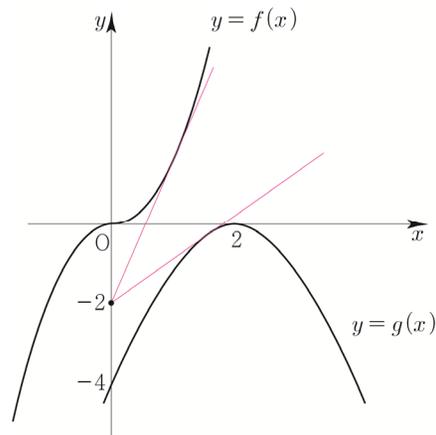
방정식에 $t=0$ 을 대입하면 $c=0$ 이므로 $f(x) = x^3$



$y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로 (다) 조건을 만족시킨다.

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq kx - 2 \leq f(x)$ 직선 $y = kx - 2$ 는 k 와 관계없이 항상 지나는 점이 $(0, -2)$ 이다. 즉, k 를 “정점 $(0, -2)$ 을 지나는 직선의

기울기”로 해석할 수 있다. (정점 Technique !)



따라서 직선 $y = kx - 2$ 가 $y = f(x)$ 의 그래프에 접할 때 k 의 값이 최대이고, $y = g(x)$ 의 그래프에 접할 때 k 의 값이 최소이다.

❶ 직선 $y = kx - 2$ 가 $y = f(x)$ 의 그래프에 접할 때, 접점의 x 좌표를 p 라 하면

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(p) = k \Rightarrow 3p^2 = k$$

$$f(p) = kp - 2 \Rightarrow p^3 = kp - 2$$

위 두식을 연립하면

$$p^3 = 3p^3 - 2 \Rightarrow p = 1$$

$$k = 3 \text{이므로 } \alpha = 3$$

❷ 직선 $y = kx - 2$ 가 $y = g(x)$ 의 그래프에 접할 때, 접점의 x 좌표를 q 라 하면

$$g(x) = -(x-2)^2$$

$$g'(x) = -2(x-2)$$

$$g'(q) = k \Rightarrow -2q + 4 = k$$

$$g(q) = kq - 2 \Rightarrow -(q-2)^2 = kq - 2$$

위 두식을 연립하면

$$-q^2 + 4q - 4 = -2q^2 + 4q - 2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \sqrt{2} (\because q > 0)$$

$$k = -2\sqrt{2} + 4 \text{이므로 } \beta = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\alpha - \beta = 3 - (4 - 2\sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2} = a + b\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = 5 \text{이다.}$$

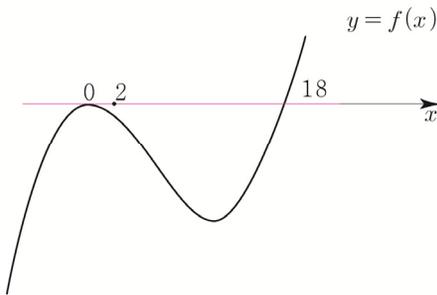
답이 나왔지만 여기서 한 가지 의문점이 든다.

과연 ①- i) $c = -18$ ($f(x) = x^2(x-18)$) 일 때,
점 $(2, 0)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 개수는 2일까?

한번 확인해보자.

$t\{2t^2 + (c-6)t - 4c\} = 0$ 에 $c = -18$ 을 대입하면
 $t(2t^2 - 24t + 72) = 0 \Rightarrow t(t-6)^2 = 0$ 이므로
접점의 x 좌표는 $t = 0$ or $t = 6$ 이다.

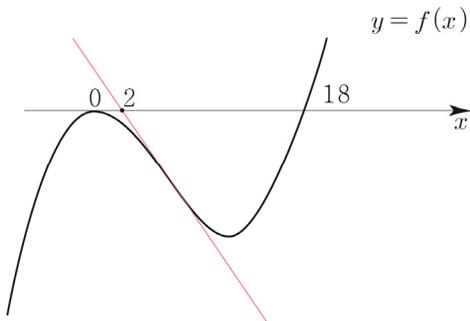
$t = 0$ 일 때,
 $y = (3t^2 - 36t)(x-t) + t^3 - 18t^2 \Rightarrow y = 0$ 이므로
다음 그림과 같이 $y = 0$ 이 접선이 된다.



$t = 6$ 일 때,
 $y = (3t^2 - 36t)(x-t) + t^3 - 18t^2 \Rightarrow y = -108x + 216$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 18x^2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 36x \\ f''(x) &= 6x - 36 \\ f''(6) &= 0 \end{aligned}$$

$f(x)$ 의 변곡점은 $(6, f(6))$ 이므로 접점이 변곡점이고
다음 그림과 같이 $y = -108x + 216$ 은 변곡접선이 된다.



따라서 점 $(2, 0)$ 에서 곡선 $y = x^2(x-18)$ 에 그은 접선의 개수는 2이다.

237

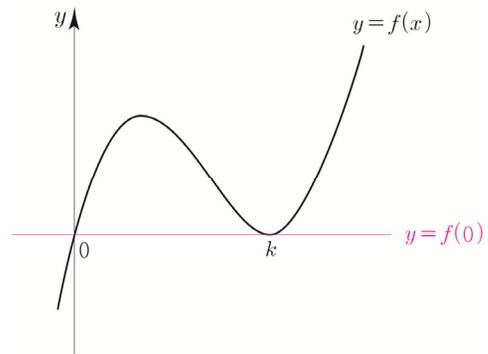
$t > 0$, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{f(t) - f(0)}{t-0} \text{ 이므로}$$

$g(t)$ 는 두 점 $(0, f(0)), (t, f(t))$ 의 기울기로 해석할 수 있다.

Guide step에서 배웠듯이 삼차함수의 개형은 3가지인데
(가)조건을 만족시키려면 극댓값과 극솟값을 갖는 ①번 개형이어야 한다.

또한 (가) 조건에 의해서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 점 $(k, f(k))$ 에서 직선 $y = f(0)$ 과 접한다.



$$f(x) - f(0) = x(x-k)^2$$

$$f'(x) = (x-k)^2 + 2x(x-k) = (3x-k)(x-k)$$

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{t(t-k)^2}{t} = (t-k)^2$$

(나) 조건에 의해서

$$f'(a) = g(a) \Rightarrow (3a-k)(a-k) = (a-k)^2$$

$$\Rightarrow 2a(a-k) = 0 \Rightarrow a = k \left(\because a > \frac{5}{3} \right)$$

$$g(a) = 0 \text{ 이고 } f'\left(\frac{k}{3}\right) = f'(k) = 0 \text{ 이므로}$$

(나) 조건에 의해서

$$f'\left(\frac{5}{3}\right) = f'(a) = 0 \Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow k = 5$$

$$A_m = \{x \mid f'(x) = g(m), 0 < x \leq m\}$$

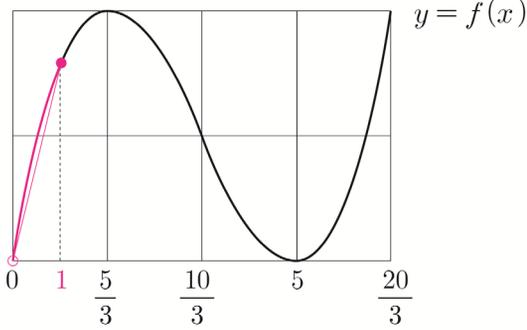
m 에 값을 넣어보면서 파악해보자.

$m = 1$ 이면

$$A_1 = \{x \mid f'(x) = g(1), 0 < x \leq 1\}$$

Box를 그려서 파악해보자.

(Box를 그리면 삼차함수의 비율관계를 손쉽게 알 수 있어 $x = 1$ 의 위치를 대략적으로 알 수 있다.)

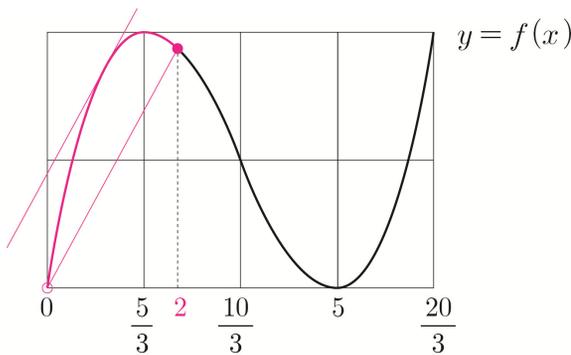


$0 < x \leq 1$ 에서 방정식 $f'(x) = g(1)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $n(A_1) = 1$ 이다.

(여기서 $f(1)$ 과 $f(\frac{10}{3})$ 의 대소관계는 중요한 사항이 아니다. 즉, 정확하게 점 $(1, f(1))$ 의 위치를 찾지 않아도 된다.)

$m = 2$ 이면

$$A_2 = \{x \mid f'(x) = g(2), 0 < x \leq 2\}$$



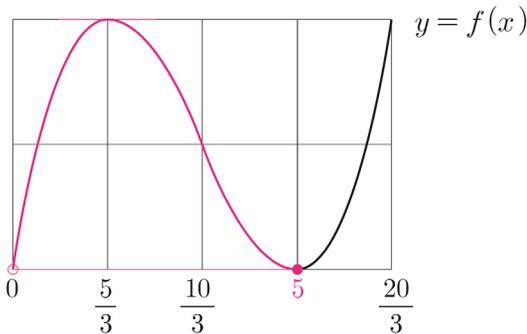
$0 < x \leq 2$ 에서 방정식 $f'(x) = g(2)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_2) = 1$ 이다.

$m = 3, m = 4$ 일 때도 마찬가지로

$$n(A_3) = n(A_4) = 1 \text{이다.}$$

$m = 5$ 이면

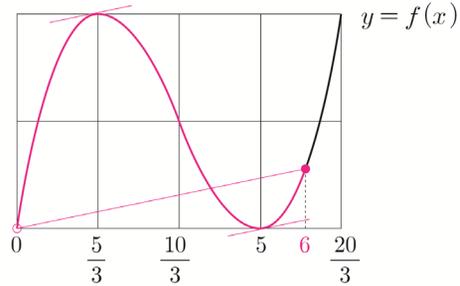
$$A_5 = \{x \mid f'(x) = g(5), 0 < x \leq 5\}$$



$0 < x \leq 5$ 에서 방정식 $f'(x) = g(5)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_5) = 2$ 이다.

$m = 6$ 이면

$$A_6 = \{x \mid f'(x) = g(6), 0 < x \leq 6\}$$



$0 < x \leq 6$ 에서 방정식 $f'(x) = g(6)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_6) = 2$ 이다.

$m > 6$ 이면 그래프를 그렸을 때, $m = 6$ 과 마찬가지로 방정식 $f'(x) = g(m)$ 을 만족시키는

$x < \frac{5}{3}$ or $5 < x < m$ 인 서로 다른 두 실근이 존재한다.

(by 평균값 정리)

여기서 조심해야 할 것은 x 의 범위인데

$0 < x \leq m$ 이므로 실근이 0 이하가 되면 집합에 포함되지 않는다.

즉, 경계(실근이 $x = 0$)일 때의 상황을 조사해 봐야 한다.

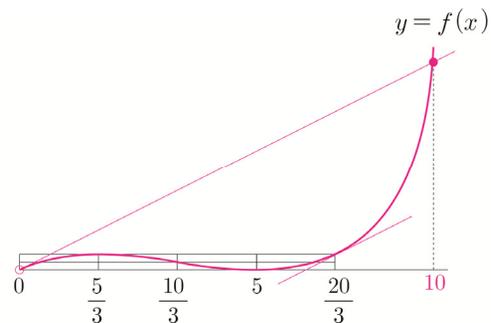
$f'(0) = g(m)$ 임을 만족시키는 m 을 구해보자.

$$f'(x) = (3x - 5)(x - 5), g(t) = (t - 5)^2$$

$$f'(0) = g(m) \Rightarrow 25 = (m - 5)^2 \Rightarrow m = 10 (\because m > 0)$$

$m = 10$ 이면

$$A_{10} = \{x \mid f'(x) = g(10), 0 < x \leq 10\}$$



$x = 0$ 일 때 $f'(0) = g(10)$ 이지만 $0 < x \leq 10$ 의 범위에 포함되지 않는다.

$0 < x \leq 10$ 에서 방정식 $f'(x) = g(10)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $n(A_{10}) = 1$ 이다.

$g(m)$ 의 값이 커질수록 (직선의 기울기가 커질수록) $x < \frac{5}{3}$ 에서 $f'(x) = g(m)$ 을 만족시키는 x 의 값은 작아진다.

$$\left(\because x_1 < x_2 < \frac{5}{3} \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2) \right)$$

즉, $m > 10$ 이면 $x < \frac{5}{3}$ 에서 $f'(x) = g(m)$ 을 만족시키는 x 의 값은 0보다 작아지므로 $n(A_m) = 1$ 이다.

($5 < m < 10$ 이면 $x < \frac{5}{3}$ 에서 $f'(x) = g(m)$ 을 만족시키는 x 의 값은 0보다 크므로 $n(A_m) = 2$)

따라서 $n(A_m) = 2$ 를 만족시키는 자연수 m 은 5, 6, 7, 8, 9이므로 조건을 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합은 $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$ 이다.

답 35

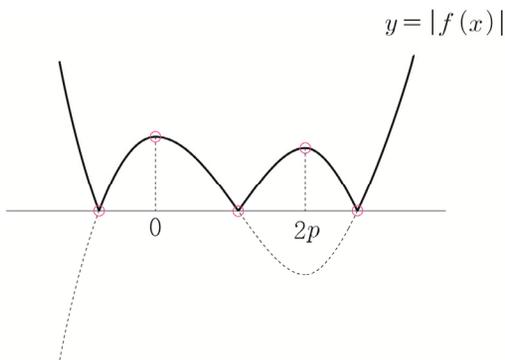
238

p, q 는 25 이하의 자연수

$$f(x) = x^3 - 3px^2 + q$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6px = 3x(x - 2p)$$

(가) 조건을 만족시키려면 $f(x)$ 의 극댓값이 양수이고 극솟값이 음수인 개형이어야 한다.

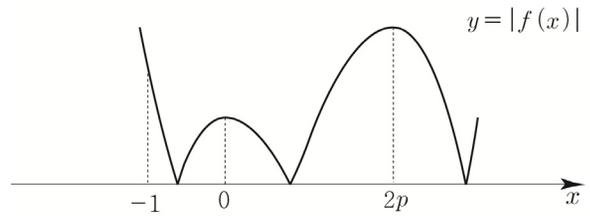


$$\text{극댓값 } f(0) > 0 \Rightarrow q > 0 \text{ (} q \text{는 자연수이므로 무조건 만족)}$$

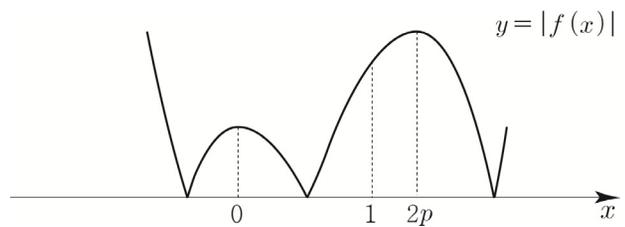
$$\text{극솟값 } f(2p) < 0 \Rightarrow -4p^3 + q < 0 \Rightarrow q < 4p^3$$

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값에 따라 case분류해보자. 최댓값은 $|f(-1)|, |f(1)|, f(0)$ 이렇게 총 3가지 경우가 가능하다.

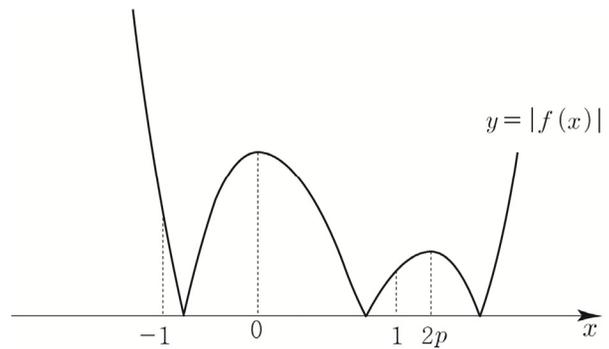
① 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값이 $|f(-1)|$ 이면 $|f(-1)| < |f(-2)|$ 이므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다.



② 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값이 $|f(1)|$ 이면 $|f(1)| < |f(2)| \leq |f(2p)|$ 이므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다. ($\because p$ 는 자연수이므로 $2 \leq 2p$)



①, ②에 의해서 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은 $f(0)$ 이다.



③ 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값이 $f(0)$ 이면 (나) 조건에 의하여 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은 $f(0)$ 이다.

이때 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값이 될 수 있는 후보는 $|f(-2)|, |f(2)|, f(0)$ 이므로 $|f(-2)| \leq f(0), |f(2)| \leq f(0)$ 이다.

③- i)

$$|f(-2)| \leq f(0) \Rightarrow |-8 - 12p + q| \leq q$$

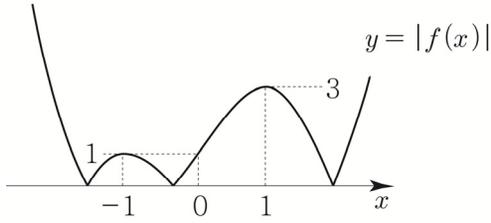
$$\Rightarrow -q \leq -8 - 12p + q \leq q$$

$$\Rightarrow 4 + 6p \leq q \quad \text{and} \quad -8 - 12p \leq 0$$

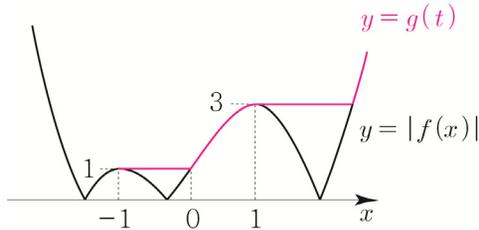
$$\Rightarrow 4 + 6p \leq q$$

실수 $t (t \geq -1)$ 에 대하여
 $-1 \leq x \leq t$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 $g(t)$

우선 $|f(x)|$ 를 그리면



$|f(x)|$ 를 바탕으로 $g(t)$ 를 그리면



$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(t) dt &= \int_{-1}^0 g(t) dt + \int_0^1 g(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 1 dt + \int_0^1 (-t^3 + 3t + 1) dt \\ &= 1 + \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + t \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{13}{4} = \frac{q}{p} \end{aligned}$$

따라서 $p+q=17$ 이다.

답 17

107

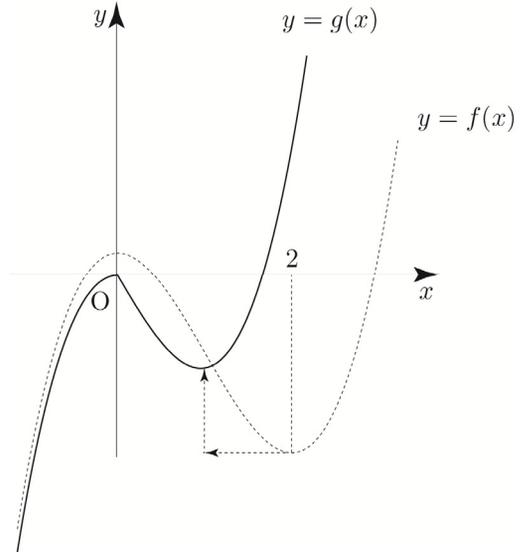
최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$
 $\Rightarrow f'(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x$

$p > 0$ 에 대하여

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \leq 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

두 곡선 $y = f(x) - f(0)$, $y = f(x+p) - f(p)$ 모두
 원점을 지나므로 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$ 이다.

$f(x)$ 가 아래 그림과 같을 때, 위 정보를 바탕으로
 $g(x)$ 를 대략적으로 그려보면 다음과 같다.
 (p 와 $f(x)$ 의 상수항을 알지 못하기 때문에 정확한 $g(x)$ 의
 그래프를 그릴 수는 없지만 감을 찾기 위해서 대략적으로
 그려보자.)



ㄱ. $p=1$ 일 때, $g'(1)=0$ 이다.

$p=1$ 일 때,

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3 - 3x & (x > 0) \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & (x < 0) \\ 3x^2 - 3 & (x > 0) \end{cases}$$

$g'(1)=0$ 이므로 ㄱ은 참이다.

이번에는 그래프적 관점에서 접근해보자.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \leq 0) \\ f(x+1) - f(1) & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $y = f(x+1) - f(1)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의
 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로
 $-f(1)$ 만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.

함수 $f(x)$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한
 함수의 도함수는 함수 $f'(x)$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼
 평행이동한 함수와 같으므로 함수 $f(x+1) - f(1)$ 의
 도함수는 $f'(x+1)$ 이다.

$g'(1) = f'(2) = 0$ 이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는
 양수 p 의 개수는 1이다.

$g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
 $x=0$ 에서도 미분가능해야 한다.

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x & (x > 0) \end{cases}$$

$$A(x) = x^3 - 3x^2 \text{ 라 하면 } A'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = A'(0) = 0 \text{ 이다.}$$

$$B(x) = x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x \text{ 라 하면}$$

$$B'(x) = 3x^2 + 2(3p-3)x + 3p^2 - 6p$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 3p^2 - 6p$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$\Rightarrow 3p^2 - 6p = 0 \Rightarrow 3p(p-2) = 0 \Rightarrow p = 2 \quad (\because p > 0)$$

즉, $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p 는 오직 $p = 2$ 뿐이므로 \hookrightarrow 은 참이다.

이번에는 그래프적 관점에서 접근해보자.

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$$

이어야 한다.

함수 $y = f(x+p) - f(p)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-p$ 만큼, y 축의 방향으로 $-f(p)$ 만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.

함수 $f(x)$ 를 x 축의 방향으로 $-p$ 만큼 평행이동한 함수의 도함수는 함수 $f'(x)$ 를 x 축의 방향으로 $-p$ 만큼 평행이동한 함수와 같으므로 $f(x+p) - f(p)$ 의 도함수는 $f'(x+p)$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f'(0+p) = f'(p) = 0$$

이때 $f'(p) = 0$ 을 만족시키는 양수 p 는 2 뿐이므로 \hookrightarrow 은 참이다.

$$\text{ㄷ. } p \geq 2 \text{ 일 때, } \int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0 \text{ 이다.}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x & (x > 0) \end{cases}$$

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \{x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + (p-1)x^3 + \frac{3p^2-6p}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + (p-1) + \frac{3p^2-6p}{2}$$

$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$$

이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$$

$$= -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - 2$$

$$= \frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

$$p \geq 2 \text{ 일 때, } \int_{-1}^1 g(x) dx = \frac{1}{2}(3p+2)(p-2) \geq 0 \text{ 이므로}$$

\hookrightarrow 은 참이다.

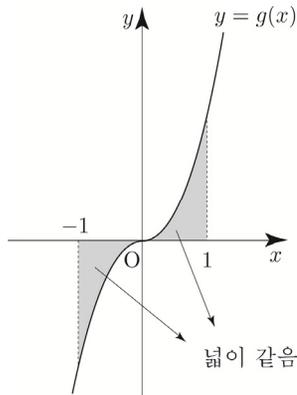
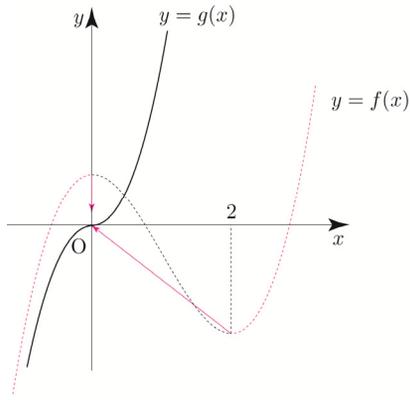
이번에는 그래프적 관점에서 접근해보자.

(정적분을 넓이의 관점에서 접근하는 풀이이므로

정적분의 활용을 배우지 않은 학생의 경우

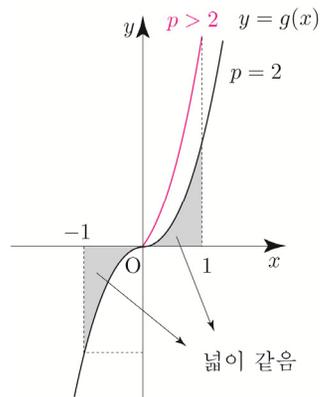
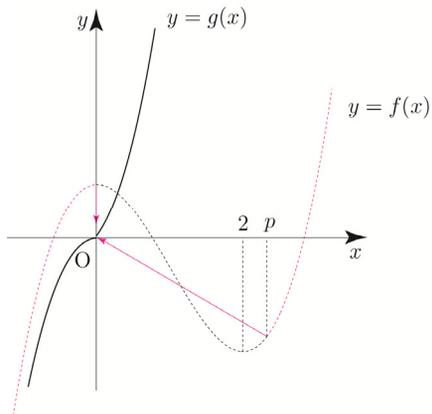
다음 중단원인 정적분의 활용을 배운 후 보도록 하자.)

$p = 2$ 일 때, 함수 $g(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



삼차함수의 대칭성에 의해서 $\int_{-1}^1 g(x)dx = 0$ 이다.

$p > 2$ 일 때, 함수 $g(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



$p > 2$ 일 때 $\int_{-1}^0 g(x)dx$ 의 값과 $p=2$ 일 때

$\int_{-1}^0 g(x)dx$ 의 값은 서로 같고,

$p > 2$ 일 때 $\int_0^1 g(x)dx$ 의 값이 $p=2$ 일 때

$\int_0^1 g(x)dx$ 의 값보다 크다.

$p \geq 2$ 일 때, $\int_{-1}^1 g(x)dx \geq 0$ 이므로 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

108

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

$$g(0) = 0, g'(x) = xf(x)$$

ㄱ. $g'(0) = 0$

$g'(x) = xf(x)$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$g'(0) = 0$ 이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 양수 α 에 대하여 $g(\alpha) = 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, \alpha)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, \alpha]$ 에서 연속이고

열린구간 $(0, \alpha)$ 에서 미분가능하다.

$g(0) = g(\alpha) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의해서

$g'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, \alpha)$ 사이에

적어도 하나 존재한다.

$$g'(c) = cf(c) = 0 \Rightarrow f(c) = 0 \quad (\because 0 < c < \alpha)$$

이므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. 양수 β 에 대하여 $f(\beta) = g(\beta) = 0$ 이면 모든 실수

x 에 대하여 $\int_{\beta}^x tf(t)dt \geq 0$ 이다.

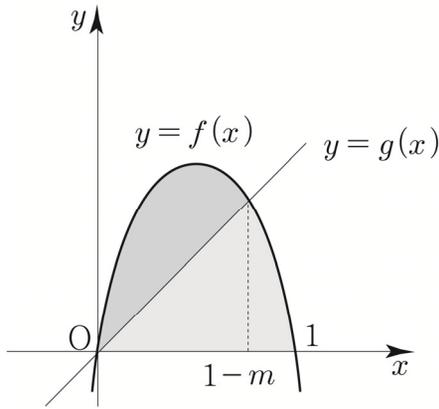
$$h(x) = \int_{\beta}^x tf(t)dt \text{라 하면}$$

$$h(\beta) = 0, h'(x) = xf(x)$$

$f(\beta) = 0$ 이므로 $h'(x) = xf(x)$ 에 $x = \beta$ 를 대입하면

$h'(\beta) = 0$ 이다.

$h(\beta) = h'(\beta) = 0$ 이므로 $h(x)$ 는 $(x - \beta)^2$ 을



$$\int_0^1 f(x)dx = 2 \int_0^{1-m} \{f(x) - g(x)\}dx$$

$$\frac{1}{6}(1-0)^3 = 2 \times \frac{1}{6}(1-m-0)^3$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3}(1-m)^3$$

$$\frac{1}{2} = (1-m)^3$$

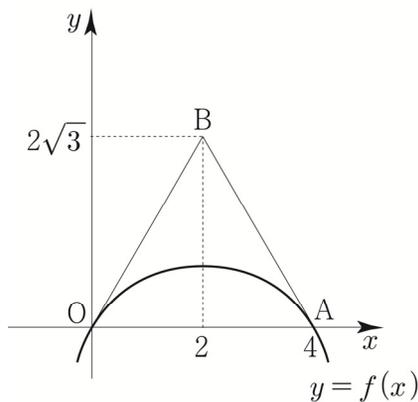
따라서 $4(1-m)^3 = 2$ 이다.

답 2

O26

$O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(2, 2\sqrt{3})$

삼각형 OAB의 넓이가 두 점 O, A를 지나는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 의하여 이등분된다. ($f(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이다.)



삼각형 OAB(정삼각형)의 넓이 S 는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$f(x) = ax(x-4) \quad (a < 0)$$

$$\int_0^4 f(x)dx = \frac{|a|}{6}(4-0)^3 = \frac{32|a|}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{16}\sqrt{3}$$

$$f(x) = -\frac{3}{16}\sqrt{3}x(x-4) \text{ 이므로}$$

$$64f(1)f(2) = 81 \text{ 이다.}$$

답 81

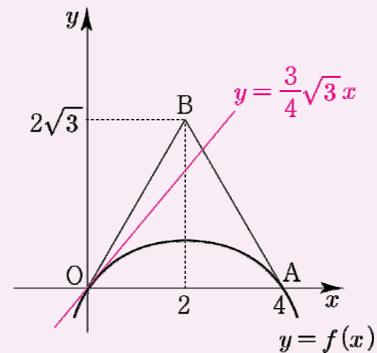
Tip <접선의 기울기를 이용한 위치관계 판단>

Q. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 OB는 $0 < x < 2$ 에서 교점이 존재할까?

물론 직선 OB는 $y = \sqrt{3}x$ 이므로 방정식 $f(x) = \sqrt{3}x$ 을 풀어서 확인할 수도 있지만 $x=0$ 에서의 접선의 기울기를 이용하면 된다.

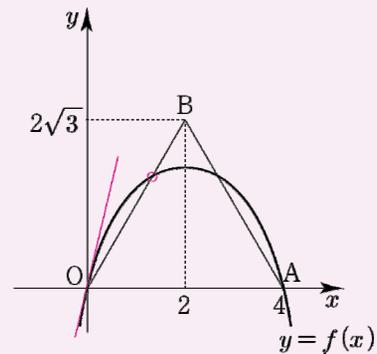
$$f'(x) = -\frac{3}{16}\sqrt{3}(2x-4) \text{ 이므로}$$

$$f'(0) = \frac{3}{4}\sqrt{3} < \sqrt{3} \text{ 이다.}$$

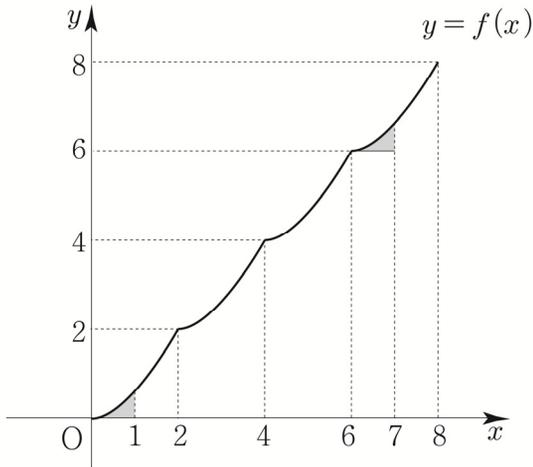


따라서 $0 < x < 2$ 에서 교점이 생기지 않는다.

만약 $f'(0) > \sqrt{3}$ 이면 아래 그림과 같이 교점이 존재한다.

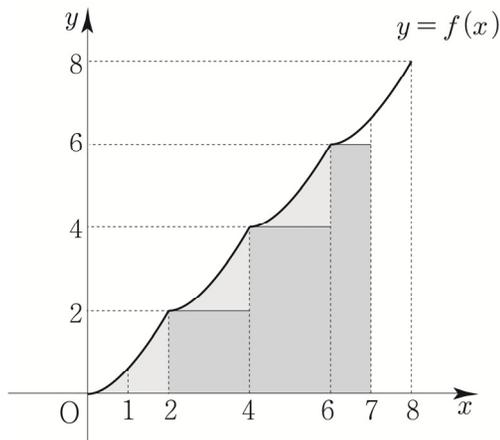


즉, 접선의 기울기는 함수의 위치관계를 판단하는 유용한 도구로 사용될 수 있다.



위 색칠한 두 영역의 넓이가 같으므로

$\int_1^7 f(x)dx$ 는 아래의 색칠한 영역의 넓이와 같다.



위 색칠한 영역의 넓이를 S 라 하면

$$S = 3 \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx + (2 \times 2) + (2 \times 4) + (1 \times 6)$$

$$= 3 \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 + 18 = 22$$

따라서 $\int_1^7 f(x)dx = 22$ 이다.

답 ③

065

$$f(t) = t^2 - t, \quad g(t) = -3t^2 + 6t$$

ㄱ. 점 P는 출발 후 운동 방향을 1번 바꾼다.

$$f(t) = t(t-1)$$

$t=1$ 를 경계로 $f(t)$ 의 부호가 변하므로

점 P는 $t=1$ 에서만 운동 방향을 1번 바꾼다.

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $t=2$ 에서 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q 라 할 때, $pq < 0$ 이다.

$$f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 3 = p$$

$$g'(t) = -6t + 6 \Rightarrow g'(2) = -6 = q$$

$$pq = -18 < 0$$

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $t=0$ 부터 $t=3$ 까지 점 Q가 움직인 거리는 8이다.

$$\int_0^3 |g(t)| dt = \int_0^2 (-3t^2 + 6t) dt + \int_2^3 (3t^2 - 6t) dt$$

$$= [-t^3 + 3t^2]_0^2 + [t^3 - 3t^2]_2^3 = 8$$

따라서 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

066

S_1, S_2, S_3 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항에 의해 $2S_2 = S_1 + S_3$ 이다.

$$3S_2 = S_1 + S_2 + S_3 = \int_{-1}^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{9}{2}$$

따라서 $S_2 = \frac{3}{2}$ 이다.

답 ④

공식을 사용하면

$$3S_2 = \frac{|-1|}{6} \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{3}{2}$$

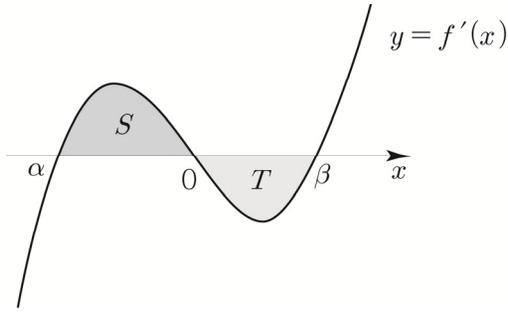
067

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$

$$f'(\alpha) = f'(0) = f'(\beta) = 0$$

$$f'(x) = ax(x-\alpha)(x-\beta) \quad (a > 0, \alpha < 0 < \beta)$$

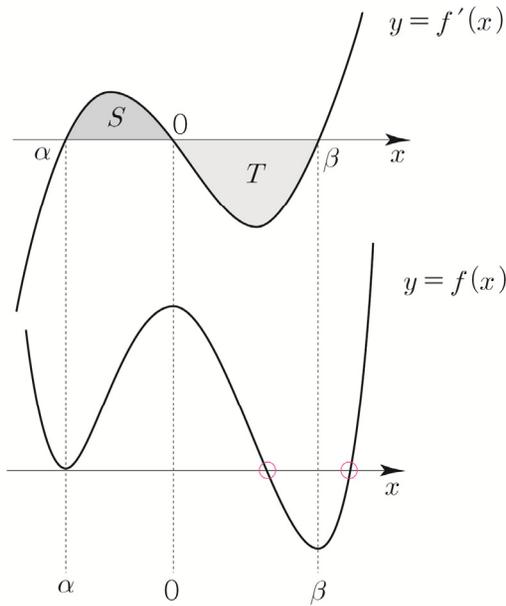
$$S = \int_{\alpha}^0 |f'(x)| dx, \quad T = \int_0^{\beta} |f'(x)| dx$$



ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.
 $f'(x)$ 가 $x=0$ 을 경계로 $+\rightarrow -$ 이므로
 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.
 따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $\alpha + \beta = 0$ 이면 $S = T$ 이다.
 $\alpha + \beta = 0$ 이면 $\alpha = -\beta$
 $f'(x) = ax(x-\beta)(x+\beta)$ ($a > 0$)는 원점에 대하여
 점대칭이므로 (기함수) $S = T$ 이다.
 따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $S < T$ 이고 $f(\alpha) = 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 의
 양의 실근의 개수는 2이다.



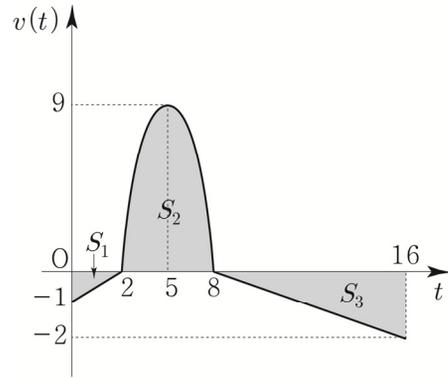
곡선 $y = f(x)$ 는 x 축과 x 좌표가 양수인 두 점에서
 만나므로 방정식 $f(x) = 0$ 의 양의 실근의 개수는
 2개다. 따라서 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

068

원점에서 출발

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t - 1 & (0 \leq t < 2) \\ -t^2 + 10t - 16 & (2 \leq t < 8) \\ 2 - \frac{1}{4}t & (8 \leq t \leq 16) \end{cases}$$



$$\int_0^2 |v(t)| dt = S_1, \int_2^8 |v(t)| dt = S_2, \int_8^{16} |v(t)| dt = S_3$$

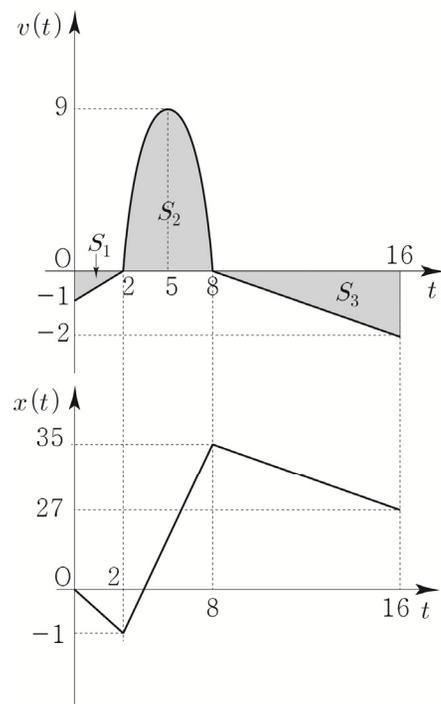
라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

$$S_2 = \frac{|-1|}{6} (8-2)^3 = 36$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$$

$v(t)$ 를 바탕으로 $x(t)$ 를 그리면

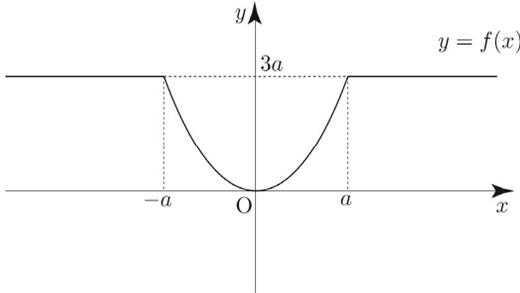


(편의상 $x(t)$ 를 직선으로 나타냈지만 원래는 곡선이다.)

073

$a > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{a}x^2 & (-a \leq x \leq a) \\ 3a & (x < -a \text{ 또는 } x > a) \end{cases}$$



a 와 3의 대소 관계에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $0 < a < 3$ 일 때

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = -3, x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 f(x) dx &= 2 \int_0^3 f(x) dx = 2 \left(\int_0^a \frac{3}{a} x^2 dx + \int_a^3 3a dx \right) \\ &= 2 \left[\frac{1}{a} x^3 \right]_0^a + 2 [3ax]_a^3 = 2a^2 + 2(9a - 3a^2) \\ &= -4a^2 + 18a = 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 9a + 4 = 0 \Rightarrow (2a - 1)(a - 4) = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 3)$$

② $a \geq 3$ 일 때

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = -3, x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 f(x) dx &= 2 \int_0^3 f(x) dx = 2 \int_0^3 \frac{3}{a} x^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{a} x^3 \right]_0^3 = \frac{54}{a} = 8 \end{aligned}$$

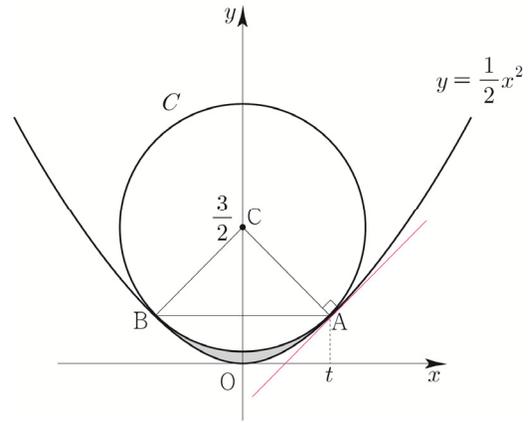
$$\Rightarrow a = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$$

모든 a 의 값의 합 $S = \frac{1}{2} + \frac{27}{4} = \frac{29}{4}$ 이므로

$$40S = 40 \times \frac{29}{4} = 290 \text{이다.}$$

답 290

074



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x) = x$$

접점 A의 x 좌표를 t 라 하면

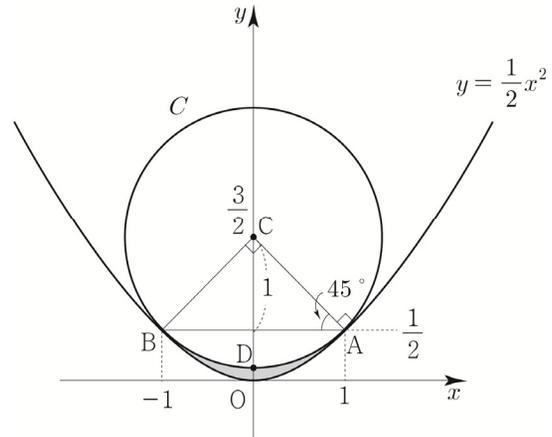
$$\text{직선 AC의 기울기} = \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}}{t - 0}$$

직선 AC와 점 $A(t, \frac{1}{2}t^2)$ 에서의 접선은 서로 수직하므로

$$\frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}}{t - 0} \times f'(t) = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2} = -1$$

$$\Rightarrow t = 1 \quad (\because t > 0)$$

$A(1, \frac{1}{2})$ 이므로 대칭성에 의해서 $B(-1, \frac{1}{2})$



$$\text{원 } C \text{의 반지름의 길이} = \overline{AC} = \sqrt{2}$$

$$\text{부채꼴 ACD의 넓이} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

($\because \angle ACD = 45^\circ$)

$$\text{직선 AC의 방정식은 } y = -x + \frac{3}{2}$$

원 C 와 함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의