21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n} = a_n - 1$; $a_{f_b(n)} = a_n - 1$
>
> (나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$; $a_{g_b(n)} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

$\cdot\ 20_{(10)} = 10100_{(2)} = (f_b \circ f_b \circ g_b \circ f_b)(1)$

$\Rightarrow a_{20} = \{2\times(a_1 - 1) + 1\} - 1 - 1 = 2a_1 - 3 = 1$: $a_1 = 2$

$\cdot\ 63_{(10)} = 111111_{(2)}$; $\sum_{n=1}^{63} a_n$ = f_b/g_b를 5번 이하로, 임의로 합성한 함수에 대한 모든 결과의 sum

$\Rightarrow$ 어떤 n : $a_{f_b(n)} + a_{g_b(n)} = 3a_n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{111111_{(2)}} a_n = a_1 + \underbrace{3a_1}_{=a_{10}+a_{11}} + \underbrace{3\cdot 3a_1}_{=a_{100}+a_{101}+a_{110}+a_{111}} + 3^3a_1 + 3^4a_1 + 3^5a_1 = \frac{3^6-1}{3-1}\cdot a_1 = 728$

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$ $\xrightarrow{n=1} a_2 = a_2 \times a_1 + 1$; Let $a_2 = \alpha$
>
> (나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\frac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

$15 = 1111_{(2)}$: $a_{1111} = \alpha\cdot a_{111} - 2 = \alpha\cdot(\alpha\cdot a_{11} - 2) - 2 = \alpha\cdot\{\alpha\cdot(\underbrace{\alpha\cdot a_1 - 2}_{=\alpha-3}) - 2\} - 2 = \alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha - 2$

$8 = 1000_{(2)}$: $a_{1000} = \alpha\cdot a_{100} + 1 = \alpha\cdot(\alpha\ \underbrace{a_{10}}_{=\alpha} + 1) + 1 = \alpha^3 + \alpha + 1$

$a_8 - a_{15} = 3\alpha^2 + 3\alpha + 3 = 63$, $\alpha = 4$ or -5 ↳ $a_1 > 1$; X

$\therefore a_1 = \frac{3}{4}$, $a_8 = 69$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1| = 2$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$이다.
> ↳ $|a_n| = 2^n = 1\underbrace{00\cdots0}_{n개}{}_{(2)}$
>
> (다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14 = -1110_{(2)}$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점]

(다)

: $-1110_{(2)} = -10 - 100 - 1000$

$= \underbrace{1\cdots}_{7개}1000 - 1\underbrace{0\cdots0}_{10개}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1, a_2, a_{10} < 0 \\ a_3 \sim a_9 > 0 \end{cases}$

$\therefore -2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$

$= \frac{2^{11} - 2}{2^2 - 1} - 4 = 678$