

제 2 교시

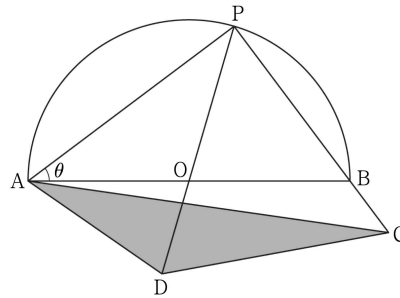
Ambitious Penguin

1. 삼각형 ABC 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos A = -\frac{1}{4}$
 (나) $\sin B + \sin C = \frac{9}{8}$

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$ 일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]
 (2021년 고2 11월 교육청 29번)

2. 중심이 O이고 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있다. 그림과 같이 선분 PB의 연장선 위에 $\overline{PA} = \overline{PC}$ 인 점 C를 잡고, 선분 PO의 연장선 위에 $\overline{PA} = \overline{PD}$ 인 점 D를 잡는다. $\angle PAB = \theta$ 에 대하여 $4\sin\theta = 3\cos\theta$ 일 때, 삼각형 ADC의 넓이는? [4점]
 (2021년 고2 9월 교육청 19번)

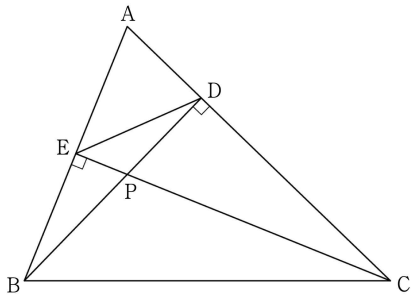


- ① $\frac{63}{5}$ ② $\frac{127}{10}$ ③ $\frac{64}{5}$ ④ $\frac{129}{10}$ ⑤ 13

3. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$ 인 예각삼각형 ABC 가 있다.
 점 B 에서 변 AC 에 내린 수선의 발을 D , 점 C 에서 변 AB 에
 내린 수선의 발을 E 라 하고, 두 선분 BD , CE 의 교점을 P 라
 하자. 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이와 삼각형 ADE 의
 외접원의 넓이의 차가 4π 일 때, 삼각형 PDE 의 외접원의
 넓이는 $a\pi$ 이다. $55a$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

[4점]

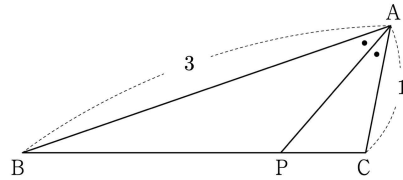
(2021년 고2 9월 교육청 29번)



4. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 1$ 이고 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 인
 삼각형 ABC 가 있다. $\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 BC 와
 만나는 점을 P 라 할 때, 삼각형 APC 의 외접원의 넓이는?

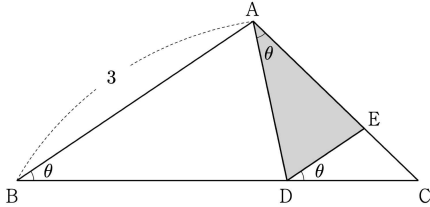
[4점]

(2021년 고2 6월 교육청 15번)



- ① $\frac{\pi}{4}$
- ② $\frac{5}{16}\pi$
- ③ $\frac{3}{8}\pi$
- ④ $\frac{7}{16}\pi$
- ⑤ $\frac{\pi}{2}$

5. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 인 임의의 실수 θ 에 대하여 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\angle ABC = \theta$, $\angle CAB = 3\theta$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 선분 BC 위에 점 D 를 $\angle DAC = \theta$ 가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 점 E 를 $\angle EDC = \theta$ 가 되도록 잡는다. 다음은 삼각형 ADE 의 넓이 $S(\theta)$ 를 구하는 과정이다.



$\angle ABC = \theta$, $\angle DAB = 2\theta$ 이므로 $\angle BDA = \pi - 3\theta$ 이다.
삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \theta} = \frac{\overline{AB}}{\sin 2\theta} \quad \text{[가]}$$

이므로 $\overline{AD} = \frac{3 \sin \theta}{\sin 2\theta}$ 이다.

또한 $\angle ADE = 2\theta$ 이므로

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AD}} \quad \text{[나]}$$

이다. 따라서 삼각형 ADE 의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \frac{9}{2} \times \left(\frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} \right)^2 \times \sin 2\theta \quad \text{[다]}$$

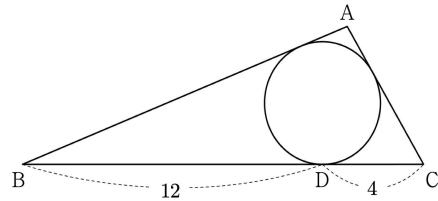
이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 라 하고, (나)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $p \times f\left(\frac{\pi}{6}\right) \times g\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 의 값은? [4점]
(2021년 고2 6월 교육청 17번)

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

6. 반지름의 길이가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 인 원이 삼각형 ABC 에 내접하고 있다. 원이 선분 BC 와 만나는 점을 D 라 하고 $\overline{BD} = 12$, $\overline{DC} = 4$ 일 때, 삼각형 ABC 의 둘레의 길이는? [4점]
(2021년 고2 6월 교육청 18번)

- ① $\frac{71}{2}$ ② 36 ③ $\frac{73}{2}$ ④ 37 ⑤ $\frac{75}{2}$



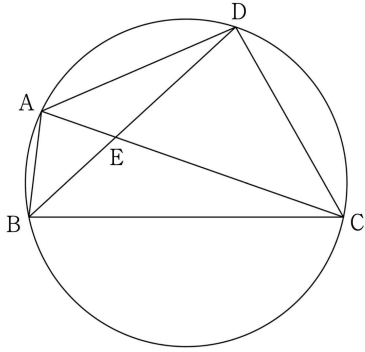
7. $\overline{DA} = 2\overline{AB}$, $\angle DAB = \frac{3}{2}\pi$ 이고 반지름의 길이가 1인 원에

내접하는 사각형 ABCD가 있다. 두 대각선 AC, BD의 교점을 E라 할 때, 점 E는 선분 BD를 3:4로 내분한다.

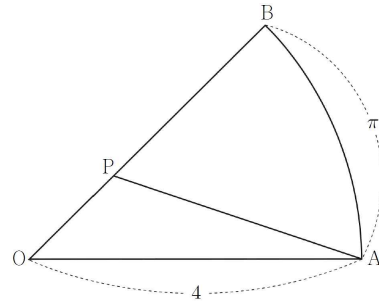
사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(2021년 교2 6월 교육청 29번)

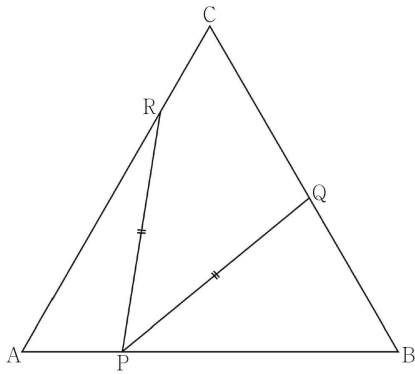


8. 그림과 같이 반지름의 길이가 4, 호의 길이가 π 인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴 OAB의 넓이를 S , 선분 OB 위의 점 P에 대하여 삼각형 OAP의 넓이를 T 라 하자. $\frac{S}{T} = \pi$ 일 때, 선분 OP의 길이는? (단, 점 P는 점 O가 아니다.) [4점]
(2020년 교2 11월 교육청 14번)



- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

9. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다.
 선분 AB 위의 점 P, 선분 BC 위의 점 Q, 선분 CA 위의 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R가
 $\overline{AP} + \overline{BQ} + \overline{CR} = 1, \overline{PQ} = \overline{PR}$
 를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 세 점 P, Q, R는 각각 점 A, 점 B, 점 C가 아니다.) [4점]
 (2020년 고2 11월 교육청 21번)



<보 기>

ㄱ. $3\overline{AP} + 2\overline{BQ} = 2$
 ㄴ. $\overline{QR} = \sqrt{3} \times \overline{AP}$
 ㄷ. 삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원의 넓이의 2배일 때, $\overline{AP} = \frac{\sqrt{21}-3}{6}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

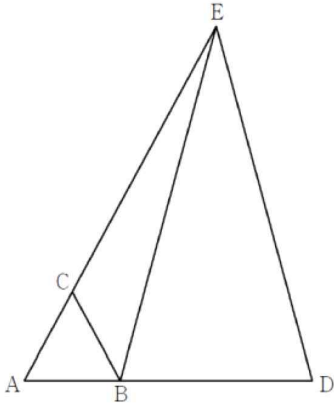
10. 삼각형 ABC에서

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{3}{\sin B} = \frac{4}{\sin C}$$

일 때, $\cos C$ 의 값은? [3점]
 (2020년 고2 9월 교육청 10번)

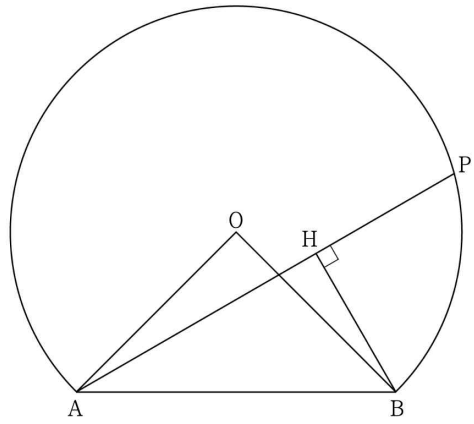
- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

11. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC에서 선분 AB의 연장선과 선분 AC의 연장선 위에 $\overline{AD} = \overline{CE}$ 가 되도록 두 점 D, E를 잡는다. $\overline{DE} = \sqrt{13}$ 일 때, 삼각형 BDE의 넓이는? [4점]
(2020년 고2 9월 교육청 16번)



- ① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

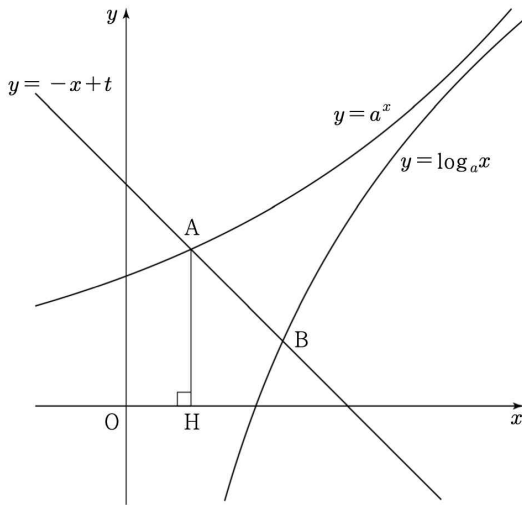
12. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$ 인 부채꼴 OBA가 있다. 호 BA 위에 점 P를 $\angle BAP = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 잡고, 점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 할 때, \overline{OH}^2 의 값은 $m+n\sqrt{3}$ 이다. m^2+n^2 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 유리수이다.) [4점]
(2020년 고2 9월 교육청 27번)



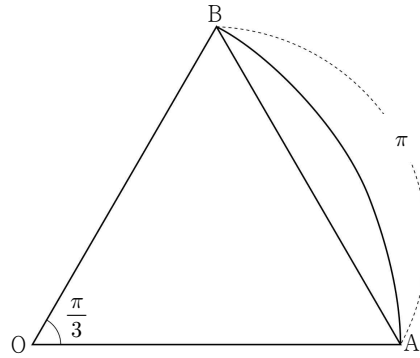
13. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, t 에 대하여 직선 $y = -x + t$ 가 두 곡선 $y = a^x, y = \log_a x$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{OH} : \overline{AB} = 1 : 2$
- (나) 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

$200(t-a)$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]
(2020년 고2 9월 교육청 29번)

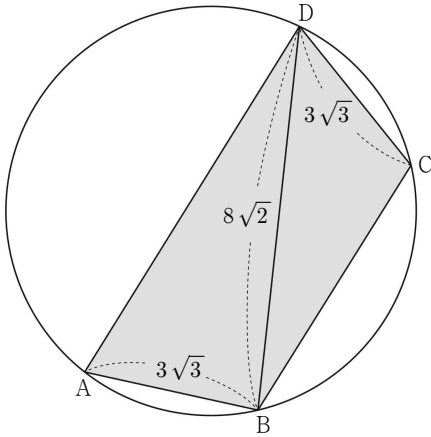


14. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB의 호의 길이가 π 일 때, 삼각형 OAB의 넓이는? [3점]
(2019년 고2 11월 교육청 가형 10번)



- ① $2\sqrt{3}$
- ② $\frac{9\sqrt{3}}{4}$
- ③ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
- ④ $\frac{11\sqrt{3}}{4}$
- ⑤ $3\sqrt{3}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB} = \overline{CD} = 3\sqrt{3}$, $\overline{BD} = 8\sqrt{2}$ 일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S 라 하자. $\frac{S^2}{13}$ 의 값을 구하시오. [4점]
 (2019년 고2 11월 교육청 가형 28번/나형 29번)



16. $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CA} = \sqrt{11}$ 인 삼각형 ABC에서 $\angle ABC = \theta$ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은? [3점]
 (2019년 고2 11월 교육청 나형 10번)

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

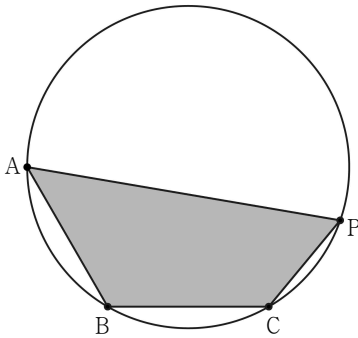
17. $\overline{AB} = 15$ 이고 넓이가 50인 삼각형 ABC에 대하여
 $\angle ABC = \theta$ 라 할 때 $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 이다. 선분 BC의 길이를
 구하시오. [3점]
 (2019년 고2 11월 교육청 나형 25번)

18. 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여
 $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ 일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]
 (2019년 고2 9월 교육청 가형 7번)

① $3\sqrt{2}$ ② $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

19. 반지름의 길이가 3인 원의 둘레를 6등분하는 점 중에서 연속된 세 개의 점을 각각 A, B, C라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{CP} = 8$ 이다. 사각형 ABCP의 넓이는? [4점]
(2019년 고2 9월 교육청 가형 19번)

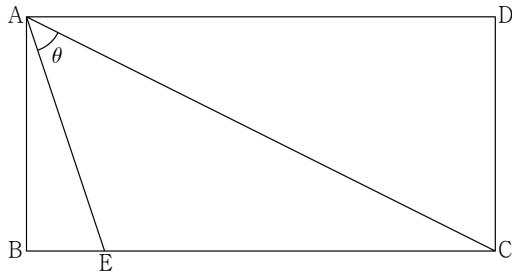
- ① $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{19\sqrt{3}}{3}$
- ④ $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$



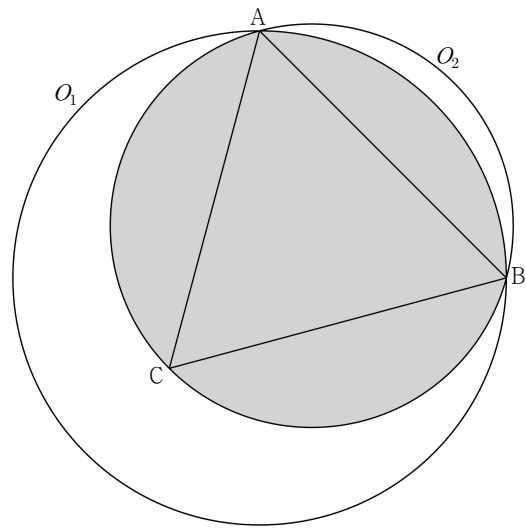
20. 선분 BC의 길이가 5이고, $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$ 인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [3점]
(2019년 고2 9월 교육청 나형 12번)

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

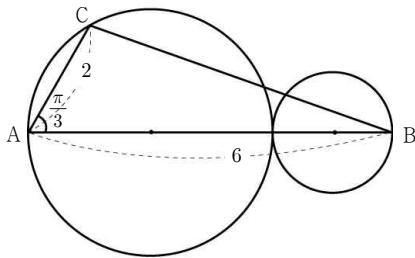
21. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 6$ 인 직사각형 ABCD에서 선분 BC를 1:5로 내분하는 점을 E라 하자. $\angle EAC = \theta$ 라 할 때, $50 \sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구하시오. [4점]
 (2019년 교2 9월 교육청 나형 27번)



22. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원 O_1 이 있다. 원 O_1 위에 서로 다른 두 점 A, B를 $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$ 가 되도록 잡고, 원 O_1 의 내부에 점 C를 삼각형 ACB가 정삼각형이 되도록 잡는다. 정삼각형 ACB의 외접원을 O_2 라 할 때, 원 O_1 과 원 O_2 의 공통부분의 넓이는 $p + q\sqrt{3} + r\pi$ 이다. $p + q + r$ 의 값을 구하시오. (단, p, q, r 는 유리수이다.) [4점]
 (2019년 교2 9월 교육청 나형 29번)

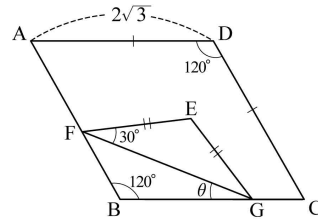


23. 그림과 같이 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 2$, $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 인 $\triangle ABC$ 의 선분 AB 위에 중심이 있는 서로 외접하는 두 원을 각각 O_1, O_2 라 하자. 점 A, C는 원 O_1 위에, 점 B는 원 O_2 위에 있다. $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R , 원 O_1 의 반지름의 길이를 r_1 , 원 O_2 의 반지름의 길이를 r_2 라 할 때, $3R^2 + r_1^2 + r_2^2$ 의 값은? [4점]
(2010년 교2 6월 교육청 나형 9번)



- ① 21
- ② 24
- ③ 27
- ④ 30
- ⑤ 33

24. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이고 $\angle B = 120^\circ$ 인 마름모 ABCD 의 내부에 $\overline{EF} = \overline{EG} = 2$ 이고 $\angle EFG = 30^\circ$ 인 이등변삼각형 EFG 가 있다. 점 F는 선분 AB 위에, 점 G는 선분 BC 위에 있도록 삼각형 EFG 를 움직일 때, $\angle BGF = \theta$ 라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $0^\circ < \theta < 60^\circ$) [4점]
(2010년 교2 3월 교육청 13번)

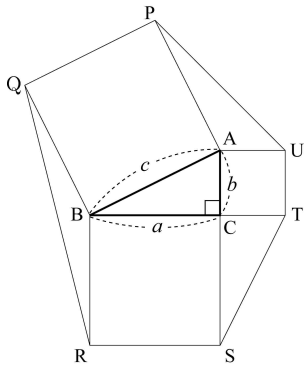


< 보 기 >

ㄱ. $\angle BFE = 90^\circ - \theta$
 ㄴ. $\overline{BF} = 4 \sin \theta$
 ㄷ. 선분 BE 의 길이는 항상 일정하다.

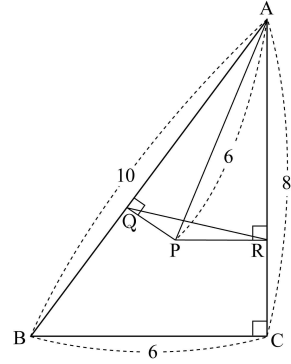
- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각 한 변으로 하는 정사각형 APQB, BRSC, CTUA를 그린다. 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 c, a, b 라 할 때, 다음 중 육각형 PQRSTU의 넓이를 나타낸 것은? [4점]
(2009년 고2 3월 교육청 15번)



- ① $2(a^2 + bc)$
- ② $2(b^2 + ca)$
- ③ $2(c^2 + ab)$
- ④ $ab + bc + ca + 2a^2$
- ⑤ $ab + bc + ca + 2c^2$

26. 그림과 같이 $\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 6, \overline{CA} = 8$ 인 삼각형 ABC와 그 삼각형의 내부에 $\overline{AP} = 6$ 인 점 P가 있다. 점 P에서 변 AB와 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 선분 QR의 길이는? [4점]
(2009년 고2 3월 교육청 19번)



- ① $\frac{14}{5}$
- ② 3
- ③ $\frac{16}{5}$
- ④ $\frac{17}{5}$
- ⑤ $\frac{18}{5}$

27. 다음은 $\angle A$ 가 둔각인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ 라 할 때, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 임을 증명하는 과정이다.

<증명>

그림과 같이 점 B를 중심으로 하고 \overline{AB} 를 반지름으로 하는 원을 그리고, 선분 \overline{BC} 와 원이 만나는 점을 G라 하자. $\triangle ABC$ 의 세 변 \overline{CA} , \overline{AB} , \overline{BC} 의 연장선과 원이 만나는 점을 각각 D, E, F라 할 때, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

또 $\triangle ACG \sim \boxed{\text{(나)}}$ 이므로 $(a-c) : b = \boxed{\text{(다)}} : (a+c)$

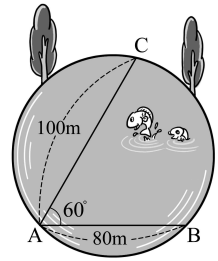
$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 이다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]
(2008년 고2 6월 교육청 가형/나형 14번)

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|-----------|-----------------|-----------------|
| ① | $\cos A$ | $\triangle ABC$ | $b + 2c \cos A$ |
| ② | $\cos A$ | $\triangle ABC$ | $b - 2c \cos A$ |
| ③ | $-\cos A$ | $\triangle ABC$ | $b + 2c \cos A$ |
| ④ | $-\cos A$ | $\triangle FCD$ | $b - 2c \cos A$ |
| ⑤ | $-\cos A$ | $\triangle FCD$ | $b + 2c \cos A$ |

28. 원 모양의 호수의 넓이를 구하기 위해 호수의 가장자리의 세 지점 A, B, C에서 거리와 각을 측정한 결과가 다음과 같았다.

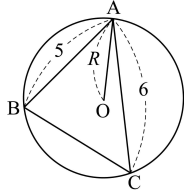
$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 80\text{m} \\ \overline{AC} &= 100\text{m} \\ \angle CAB &= 60^\circ \end{aligned}$$



이때 이 호수의 넓이는? [4점]
(2008년 고2 3월 교육청 21번)

- ① $2400 \pi \text{m}^2$ ② $2500 \pi \text{m}^2$ ③ $2600 \pi \text{m}^2$
④ $2700 \pi \text{m}^2$ ⑤ $2800 \pi \text{m}^2$

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 R 인 원 O 에 내접하는 삼각형 ABC 가 있다.



$\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 6$, $\cos A = \frac{3}{5}$ 일 때, $16R$ 의 값을 구하시오. [4점]

(2007년 고2 3월 교육청 27번)

30. 세 변의 길이가 모두 다른 $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 에서 변 AB , BC , CA 까지의 거리를 각각 p , q , r 이라 하자.

다음은 $p\overline{AB} = q\overline{BC} = r\overline{CA}$ 이면 점 P 가 $\triangle ABC$ 의 (가)임을 증명한 것이다.

i) 점 A에서 선분 AP 의 연장선과 변 BC 가 만나는 점을 D 라 하자. 사인 법칙에 의하여 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\overline{DC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{CA}}{\sin \delta}$$

따라서

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB} \sin \alpha}{\overline{CA} \sin \beta} = \text{(나)}$$

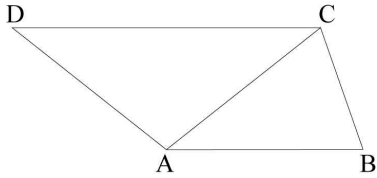
따라서 선분 AD 는 $\triangle ABC$ 의 (다)이다.

ii) 점 B , C 에서도 위와 같은 방법으로 증명하면, 점 P 가 $\triangle ABC$ 의 (가)임을 알 수 있다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]
(2006년 고2 6월 교육청 가형/나형 15번)

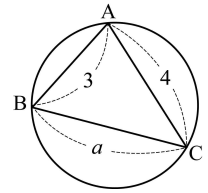
	(가)	(나)	(다)
①	내심	1	각의 이등분선
②	수심	2	수선
③	수심	1	수선
④	무계중심	2	중선
⑤	무계중심	1	중선

31. 사각형 ABCD에서 변 AB와 변 CD는 평행이고 $\overline{BC} = 2, \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 3$ 일 때, 대각선 BD의 길이는?
 [4점]
 (2006년 고2 6월 교육청 가형/나형 21번)



- ① 5 ② $4\sqrt{2}$ ③ 6 ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ 8

32. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = a, \overline{AC} = 4$



인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다.
 이 원의 반지름의 길이를 R라 할 때,
 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은? [4점]
 (2006년 고2 3월 교육청 19번)

< 보 기 >

ㄱ. $a = 5$ 이면 $R = \frac{5}{2}$ 이다.

ㄴ. $R = 4$ 이면 $a = 8 \sin A$ 이다.

ㄷ. $1 < a \leq \sqrt{13}$ 일 때, $\angle A$ 의 최댓값은 60° 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답]

- 1번: 71
- 2번: ③
- 3번: 36
- 4번: ④
- 5번: ②
- 6번: ②
- 7번: 13
- 8번: ③
- 9번: ④
- 10번: ②
- 11번: ④
- 12번: 20
- 13번: 50
- 14번: ②
- 15번: 192
- 16번: ②
- 17번: 10
- 18번: ⑤
- 19번: ②
- 20번: ⑤
- 21번: 25
- 22번: 13
- 23번: ⑤
- 24번: ⑤
- 25번: ③
- 26번: ⑤
- 27번: ④
- 28번: ⑤
- 29번: 50
- 30번: ⑤
- 31번: ②
- 32번: ⑤