김지석
프리즘
해설지

22수능 공통범위

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅰ 〉 지수로그 〉 1 지수법칙 p98

$\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2} = \left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2} = 2^{3-4} = \frac{1}{2}$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅱ 〉 미분 〉 5 미분법의 공식 p154

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$
$\therefore f'(1) = 3 + 6 + 1 = 10$

빠른 채점

1	②	2	⑤	3	⑤	4	④	5	①
6	③	7	①	8	①	9	④	10	⑤
11	③	12	③	13	②	14	③	15	②
16	3	17	4	18	12	19	6	20	110
21	678	22	9						

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 6,\ a_4 + a_6 = 36$$

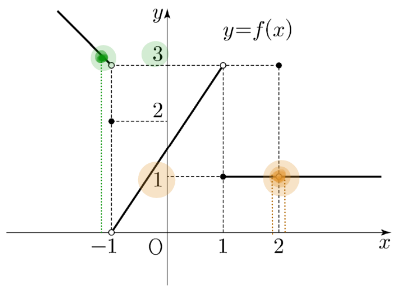
일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅰ 〉 수열 〉 2 등차수열 p128

등차중항의 정의에 의해
$a_4 + a_6 = 2a_5 = 36 \quad \therefore a_5 = 18$
$a_5 - a_2 = 3d = 12 \quad \therefore d = 4$
$\therefore a_{10} = a_5 + 5d = 18 + 20 = 38$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅱ 〉 함수극한 〉 5 좌극한과 우극한 p141

$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x) = 3 + 1 = 4$

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n \ge 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

[수학의 단권화 적용 개념]

수학 I 〉 수열 〉 11 수열의 귀납적 정의(점화식) p134

$a_n<7$이면 $a_{n+1}=2a_n$

$a_n \ge 7$이면 $a_{n+1}=a_n-7$

$a_1=1 \to a_2=2 \to a_3=4 \to a_4=8$

$a_5=1 \to a_6=2 \to a_7=4 \to a_8=8$

$\therefore \sum_{k=1}^{8} a_k=2(1+2+4+8)=30$

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

[수학의 단권화 적용 개념]

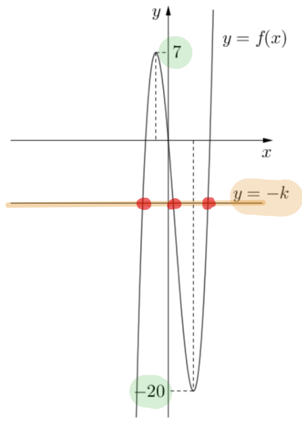
수학 II 〉 미분 〉 10 함수의 극대와 극소 p166

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$의 실근 개수는

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$와 $y=-k$의 교점 개수와 같다.

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$y=f(x)$와 $y=-k$의 교점이 세 개이므로 $-7<k<20$

$\therefore$ 정수 k의 개수 $=20-(-7)-1=26$

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$　② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$　③ 0　④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

[수학의 단권화 적용 개념]
수학 I 〉 삼각함수 〉 7 삼각함수 사이의 관계 p116

양변에 $\tan\theta$를 곱하면

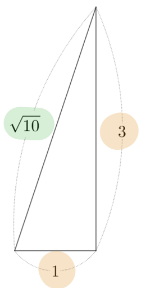
$\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$

$\Leftrightarrow\ \tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\Leftrightarrow\ \tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$\Leftrightarrow\ (\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\therefore\ \tan\theta=3\ \left(\because\ \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$



$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{4}{\sqrt{10}}=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\left(\because\ \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right.$이므로 $\left.\sin\theta<0,\ \cos\theta<0\right)$

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4

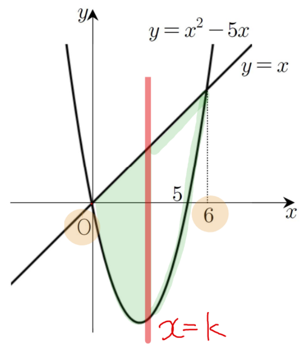
[수학의 단권화 적용 개념]
수학 II 〉 적분 〉 9 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 p178

$x^2-5x=x$

$\Leftrightarrow\ x^2-6x=0$

$\therefore\ x=0$ or 6

$\therefore\ y=x^2-5x$와 $y=x$의 교점의 x좌표는 $0,\ 6$이다.



곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{|-1|}{6}(6-0)^3=36$

직선 $x=k$가 넓이를 이등분하므로

$18=\int_0^k\{x-(x^2-5x)\}\,dx=\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^k=3k^2-\frac{1}{3}k^3$

$\Leftrightarrow\ k^3-9k^2+54=0$

$\Leftrightarrow\ (k-3)(k^2-6k-18)=0$

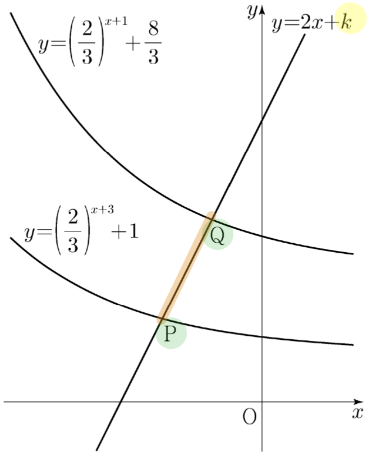
$\therefore\ k=3\ (\because\ 0<k<6)$

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\ y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

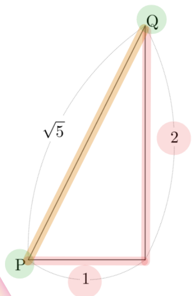
① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

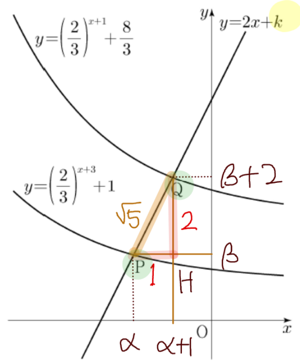


[수학의 단권화 적용 개념]
수학(하) 〉 도형의방정식 〉 5 직선의 기울기 p45
수학Ⅰ 〉 로그 〉 7 지수함수 p106

김지석의 필연성

기울기는 단순한 숫자가 아니라
기울기의 근본 개념을 활용하여
직각삼각형으로 해석할 수 있어야 한다!
직선 $y=2x+k$가 기울기가 2이므로
두 점 P, Q를 지나는 직각삼각형의 비율은 아래와 같다.





$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=1$, $\overline{\mathrm{QH}}=2$

$\therefore$ $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$, $\mathrm{Q}(\alpha+1,\ \beta+2)$

점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$를 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$에 대입하면

$$\beta=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+1$$

점 $\mathrm{Q}(\alpha+1,\ \beta+2)$를 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$에 대입하면

$$\beta+2=\left(\frac{2}{3}\right)^{(\alpha+1)+1}+\frac{8}{3}$$

$$\beta+2-\beta=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}+\frac{8}{3}\right\}-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+1\right\}$$

$$\Leftrightarrow\ 2=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=0$$

$$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=\frac{5}{3}$$

직선 $y=2x+k$가 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$를 지나므로

$$\beta=2\alpha+k$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{5}{3}=2(-2)+k$$

$$\therefore\ k=\frac{17}{3}$$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18　② -17　③ -16
④ -15　⑤ -14

[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅱ 〉 미분 〉 6 접선의 방정식 p156

김지석의 필연성

$y=f(x)$위에 점 $(0,\ 0)$이 있다.
$\therefore\ f(0)=0$
$g(x)=xf(x)$ 위에 점 $(1,\ 2)$이 있다.
$\therefore\ g(1)=f(1)=2$
점 $(0,\ 0)$과 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치하므로
그 접선은 점 $(0,\ 0)$과 점 $(1,\ 2)$을 지난다.
$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=2x$
$\therefore\ f'(0)=2,\ g'(1)=2$

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$
$g'(1)=f(1)+f'(1)=2+f'(1)=2$
$\therefore\ f'(1)=0$

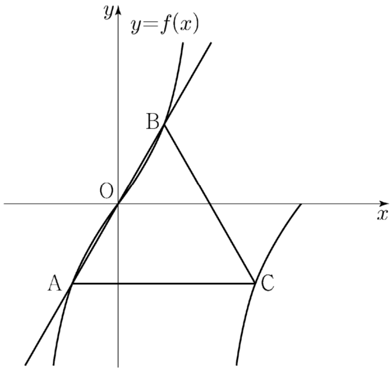
지금까지의 단서를 종합하면
$f(0)=0,\ f(1)=2,\ f'(0)=2,\ f'(1)=0$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f(0)=0$이므로 $d=0$,
$f(1)=2$이므로 $a+b+c=2$,
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$f'(0)=2$이므로 $c=2$,
$f'(1)=0$이므로 $3a+2b+c=0$,
$\therefore\ a+b=0,\ 3a+2b=-2$
$\therefore\ a=-2,\ b=2$
$\therefore\ f'(x)=-6x^2+4x+2$
$\therefore\ f'(2)=-14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

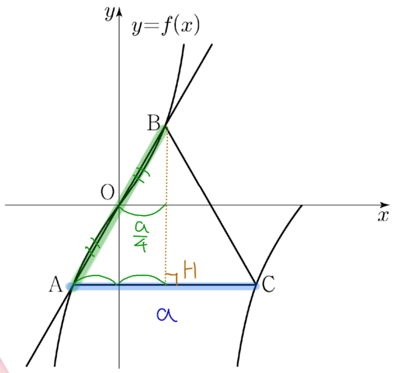
[수학의 단권화 적용 개념]
수학(하) 〉 도형의방정식 〉 5 직선의 기울기 p45
수학 I 〉 삼각함수 〉 9 삼각함수의 주기와 최대, 최소 p120

김지석의 필연성

$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}} = a$

$\therefore \overline{AC} = a$

$\therefore \overline{AH} = \frac{a}{2}$



$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$는 원점대칭인 함수이므로

점 B의 x좌표는 $\frac{a}{4}$

정삼각형이므로 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$이고 직선의 방정식은 $y = \sqrt{3}x$

$\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\sqrt{3}\right)$

$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$에 대입하면,

$\tan\frac{\pi}{a}\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{4}\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{a}{4}\sqrt{3}$

$\therefore a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ 정삼각형의 넓이 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[수학의 단권화 적용 개념]
수학 II 〉 함수극한 〉 10 연속함수의 뜻 p145

김지석의 필연성

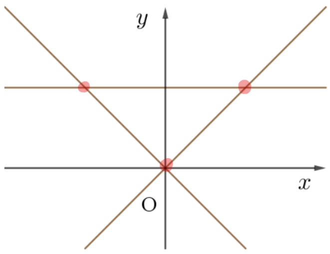
$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$

⇔ $\{f(x)\}^2\{f(x)-1\}-x^2\{f(x)-1\}=0$

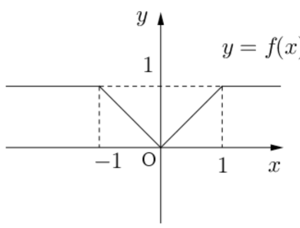
⇔ $[\{f(x)\}^2-x^2]\{f(x)-1\}=0$

⇔ $\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}\{f(x)-1\}=0$

∴ $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$



여기에서 최대, 최소는 1, 0이고 연속인 함수는 아래 경우뿐이다.



∴ $f\left(-\frac{4}{3}\right)=1,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

∴ $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

13. 두 상수 a, $b(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

[수학의 단권화 적용 개념]
수학 I 〉 지수로그 〉 8 로그함수(지수함수의 역함수) p107

김지석의 필연성

주어진 두 직선의 방정식은 아래와 같다.

$$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$$

$$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$$

두 직선의 y절편이 같으므로 $x=0$ 대입하면 같다.

$-\frac{a}{b-a}\left(\log_2\frac{b}{a}\right)+\log_2 a=-\frac{a}{b-a}\left(\log_4\frac{b}{a}\right)+\log_4 a$

⇔ $\frac{a}{b-a}\left(\log_4\frac{b}{a}-\log_2\frac{b}{a}\right)=\log_4 a-\log_2 a$

⇔ $\frac{a}{b-a}\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{b}{a}-\log_2\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}\log_2 a-\log_2 a$

⇔ $\frac{a}{b-a}\times\left(-\frac{1}{2}\log_2\frac{b}{a}\right)=-\frac{1}{2}\log_2 a$

⇔ $a\log_2 b-a\log_2 a=(b-a)\log_2 a$,

⇔ $a\log_2 b=b\log_2 a$

⇔ $\log_2 a^b=\log_2 b^a$

∴ $a^b=b^a$

$f(1)=a^b+b^a=40$

∴ $a^b=20,\ b^a=20$

∴ $f(2)=a^{2b}+b^{2a}=(a^b)^2+(b^a)^2=800$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[수학의 단권화 적용 개념]

수학II 〉 적분 〉 12 직선 위의 운동 p182

김지석의 필연성

ㄱ. (참)

$\int_0^1 v(t)dt=x(1)-x(0)=0$

ㄴ. (거짓)

$x(0)=0$, $x(1)=0$

⇔ $t=0$, 1일 때, 점 P의 위치가 0이다.

$|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

⇔ 점 P의 위치가 1보다 큰 순간이 $0<t<1$에 있다.

∴ $t=0$일 때, 점 P가 위치 0에서 출발해서

$0<t<1$일 때, 점 P가 1 보다 큰 위치에 있다가

$t=1$일 때, 점 P가 위치 0으로 도착한다.

∴ 점 P의 움직인 거리는 2보다 크다.

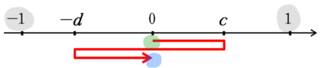
($\int_0^1 |v(t)|dt=2$에 모순)

ㄷ. (참)

$-1<x(t)<1$인데

$0\le t\le 1$일 때, 점 P의 움직인 거리는 2이기 위해서는

점 P가 수직선 위를 아래와 같이 움직이는 수밖에 없다.

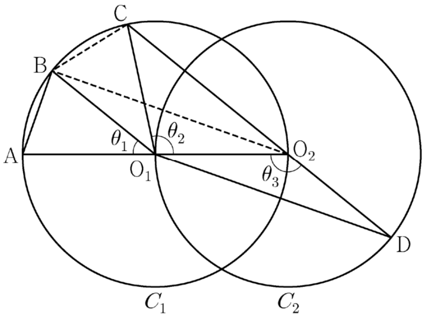


∴ $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

※ 움직인 거리 $c+c+d+d=2$, $c+d=1$이면 조건 성립

∴ 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_2C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고, $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때,
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=$ (가) 이고,
> $\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=$ (나) 이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=$ (다) 이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\text{(가)}}{2}+\text{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{169}{27}$　② $\dfrac{56}{9}$　③ $\dfrac{167}{27}$　④ $\dfrac{166}{27}$　⑤ $\dfrac{55}{9}$

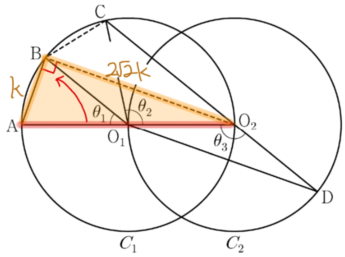
[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅰ 〉 삼각함수 〉 14 코사인법칙 p126

김지석의 필연성

$\triangle BO_2A$는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형

(가)

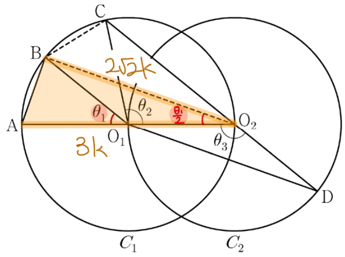
$\overline{AB}=k$라 할 때, $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=$ (가)



[중학도형] 지름에 대한 원주각은 직각이다.
$\overline{AO_2}$가 원 C_1의 지름이므로 $\angle ABO_2=90^\circ$
$\therefore\ \overline{AO_2}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=\boxed{3k}$

(나)

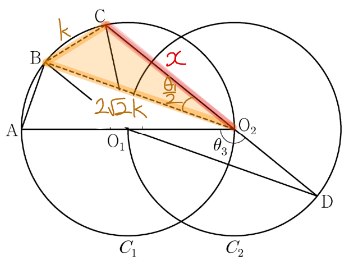
$\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=$ (나)



[중학도형] 원주각은 중심각의 절반이다.
$\theta_1=2\angle BO_2A$
$\therefore\ \angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$
$\therefore\ \cos\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}k}{3k}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

(다)

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=$ (다) 이다.



$\overline{O_2C}=x$ $(0<x<3k)$라 하면, 코사인법칙에 의하여
$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\cos\dfrac{\theta_1}{2}$
$\Leftrightarrow\ 3x^2-16kx+21k^2=0$ $\left(\because\ \cos\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
$\Leftrightarrow\ (3x-7k)(x-3k)=0$
$\therefore\ x=\dfrac{7}{3}k$ $(\because\ 0<x<3k)$　　$\therefore\ \overline{O_2C}=\boxed{\dfrac{7}{3}k}$

$f(k)=3k$, $g(k)=\dfrac{7}{3}k$, $p=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ f(p)\times g(p)=\left(3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(\dfrac{7}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\dfrac{56}{9}$

※ [참고]

빈칸 (가), (나), (다)를 푸는데 지장없지만 빈칸 위에 있는 아래 내용을 이해해보자.

step 1 → $\angle \mathrm{CO_2O_1} + \angle \mathrm{O_1O_2D} = \pi$이므로 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$이고

step 2 → $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle \mathrm{CO_1B} = \theta_1$이다.

step3 → 이때 $\angle \mathrm{O_2O_1B} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 삼각형 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이다.

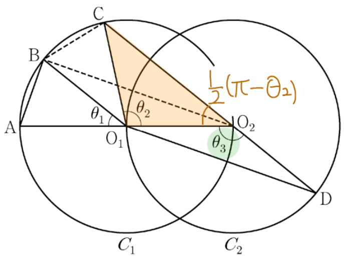
$\overline{\mathrm{AB}} = k$라 할 때,

$\overline{\mathrm{BO_2}} = \overline{\mathrm{O_1D}} = 2\sqrt{2}k$

[해설]

(step1)

$\angle \mathrm{CO_2O_1} + \angle \mathrm{O_1O_2D} = \pi$이므로 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$이고



$\triangle \mathrm{CO_2O_1}$이 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{CO_2O_1} = \dfrac{1}{2}(\pi - \theta_2)$

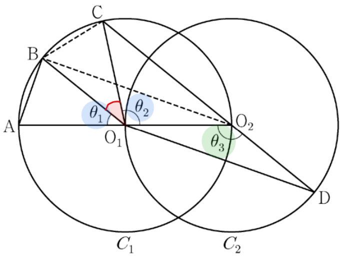
$\angle \mathrm{CO_2O_1} + \angle \mathrm{O_1O_2D} = \pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\pi - \theta_2) + \theta_3 = \pi$

$\therefore \theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$

(step2)

$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle \mathrm{CO_1B} = \theta_1$이다.



$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2} = \theta_1 + \theta_2$

$\therefore \theta_1 + \theta_1 + \theta_2 = \pi$

$\theta_1 + \angle \mathrm{CO_1B} + \theta_2 = \pi$

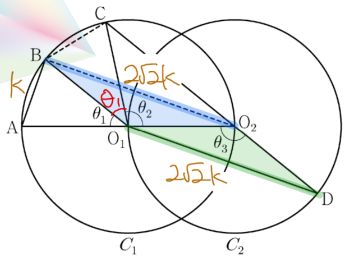
$\therefore \angle \mathrm{CO_1B} = \theta_1$

(step3)

이때 $\angle \mathrm{O_2O_1B} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 삼각형 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = k$라 할 때,

$\overline{\mathrm{BO_2}} = \overline{\mathrm{O_1D}} = 2\sqrt{2}k$



$\angle \mathrm{O_2O_1B} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로

삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 삼각형 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이다.

$\therefore \overline{\mathrm{BO_2}} = \overline{\mathrm{O_1D}}$

문제 조건에서

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{O_1D}} = 1 : 2\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BO_2}} = 1 : 2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}} = k$라 할 때, $\overline{\mathrm{BO_2}} = \overline{\mathrm{O_1D}} = 2\sqrt{2}k$

단답형

16. $\log_2 120 - \dfrac{1}{\log_{15} 2}$의 값을 구하시오. [3점]

[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅰ 〉 지수로그 〉 5 로그의 성질 p102

$$\log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2} = \log_2 120 - \log_2 15 = \log_2 8 = 3$$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅱ 〉 적분 〉 1 부정적분 p169

$$f(x)=\int f'(x)\,dx = x^3+x^2+C$$

$f(0)=2$

$\therefore\ C=2$

$\therefore\ f(1)=1+1+2=4$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56,\quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅰ 〉 수열 〉 8 Σ의 성질 p132

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56$의 양변에 2를 곱하면

$$\sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{7} a_k = 112$$

$$\left(\sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{7} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k\right) = 112-100$$

$$\sum_{k=1}^{8} a_k - \sum_{k=1}^{7} a_k = 12$$

$\therefore\ a_8=12$

19. 함수 $f(x)=x^2+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

[수학의 단권화 적용 개념]
수학(상) 〉 방정식부등식 〉 8 판별식 p29
수학Ⅱ 〉 적분 〉 9 함수의 증가와 감소 p159

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 $f'(x)\ge 0$

$$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)\ge 0$$

$$\frac{D}{4}=a^2-3(-a^2+8a)=4a^2-24a\le 0$$

$\therefore\ 0\le a\le 6$

$\therefore\ a$의 최댓값은 6

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서
$f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

[수학의 단권화 적용 개념]
수학(상) 〉 도형의방정식 〉 14 평행이동 p54
수학II 〉 적분 〉 6 정적분의 성질 (2) p175

김지석의 필연성

$60\times\int_1^2 f(x)\,dx$를 구하는 것이므로
$f(x)$의 전체 식을 구하려 하지 말고
$1\le x\le 2$에서의 $f(x)$만 구하면 된다.

$0\le x\le 1$에서
$f(x+1)=xf(x)+ax+b$
$=x^2+ax+b$

$1\le t\le 2$에서 ($x+1=t$로 치환)
$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+b$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases} x & (0\le x\le 1) \\ (x-1)^2+a(x-1)+b & (1<x\le 2)\end{cases}$$

$f(x)$가 실수 전체에서 미분가능하므로
$f(1)=1=b$ $\quad\therefore\ b=1$
$f'(x)=2(x-1)+a$
$f'(1)=1=a$ $\quad\therefore\ a=1$
$\therefore\ f(x)=x^2-x+1\ (1\le x\le 2)$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^2-x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2=\frac{11}{6}$$

$$\therefore\ 60\times\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}=110$$

[다른 풀이]
$f(x)$가 실수 전체에서 미분가능하고
$0\le x\le 1$에서 $f(x)=x$이므로
$f(1)=1$, $f'(1)=1$

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$
$x=0$ 대입하면
$f(1)=b$ $\quad\therefore\ b=1$

양변을 미분하면
$f'(x+1)-f(x)-xf'(x)=a$
$x=0$ 대입하면
$f'(1)-f(0)=a$

$\therefore\ f'(1)=a$
$\therefore\ a=1$
$\therefore\ f(x+1)=xf(x)+x+1$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x+1)dx=\int_0^1\{xf(x)+x+1\}dx$$
$$=\int_0^1\{x^2+x+1\}dx=\frac{11}{6}$$

$$\therefore\ 60\times\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}=110$$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 \rvert = 2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_{n+1} \rvert = 2\lvert a_n \rvert$이다.
(다) $\sum_{k=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점]

[수학의 단권화 적용 개념]
수학Ⅰ 〉 수열 〉 6 등비수열의 합 p131
수학Ⅰ 〉 수열 〉 7 합의 기호 Σ의 뜻 p131

김지석의 필연성

조건 (가), (나)에 의하여 수열 $\{\lvert a_n \rvert\}$은
첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$은 등비수열에서 일부 항의 부호가 바뀐
수열이라는 것은 명백하므로

$\sum_{k=1}^{10} a_n = -14$가 되는 수열 $\{a_n\}$를 찾으려면
숫자의 크기에 주목해야 한다.

(Step1) 숫자의 크기를 관찰하자.

$\lvert a_n \rvert$을 나열해보면
2, 4, 8, 16, 32. 64. 128. 256, 512, 1024

$\therefore\ \lvert a_1 \rvert + \lvert a_2 \rvert + \cdots + \lvert a_9 \rvert < \lvert a_{10} \rvert$
$(\because\ \lvert a_1 \rvert + \lvert a_2 \rvert + \cdots + \lvert a_9 \rvert$
$= 2+4+8+ \cdots +512 = \dfrac{2(2^9-1)}{2-1} = 2^{10}-2 = 1022)$

$\therefore\ a_{10} = -1024 < 0$ 임을 추론할 수 있다.
왜냐하면 $a_{10} = +1024 > 0$인 경우
나머지 모든 항이 전부 음수라 하더라도
$\sum_{k=1}^{10} a_n > 0$일 수 밖에 없기 때문이다.
(이는 조건 (다) $\sum_{k=1}^{10} a_n = -14$에 모순이다)

(Step2) 작은 항부터 부호를 하나씩 바꿔가며 $\sum_{k=1}^{10} a_n$의
크기를 관찰해보자.

$2+4+8+16+32+64+128+256+512+(-1024) = -2$) -2×2
$(-2)+4+8+16+32+64+128+256+512+(-1024) = -6$) -4×2
$(-2)+(-4)+8+16+32+64+128+256+512+(-1024) = -14$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = (-2) + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 = 678$

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.
(나) $g(f(1))=g(f(4))=2,\ g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 함수극한 〉 5 좌극한과 우극한 p141

수학Ⅱ 〉 미분 〉 10 함수의 극대와 극소 p166

김지석의 필연성

(Step1) 조건 (나) 해석하기

$f(x)$가 삼차식이므로 $f'(x)$는 이차식이다.

∴ 방정식 $f'(x)=0$의 실근의 개수는 2 이하다.

∴ $g(t)\le 2$

조건 (나)에서 $g(t)=2$인 경우가 존재하므로

방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$를 갖고,

이때 $t\le\alpha\le\beta\le t+2$

($\because$ $g(t)$는 방정식 $f'(x)=0$이 구간 $[t,\ t+2]$에서의 실근의 개수)

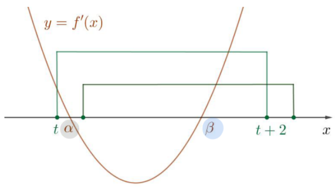
∴ $\beta-\alpha\le 2$

(Step2) 조건 (가) 해석하기

ⅰ) $\beta-\alpha<2$인 경우

$\lim_{t\to\alpha-} g(t)=2,\ \lim_{t\to\alpha+} g(t)=1$이어서 조건 (가)에 모순이다.

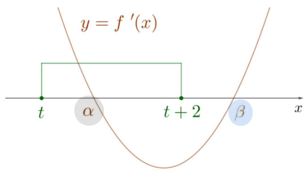
($\because$ $\lim_{t\to\alpha-} g(t)+\lim_{t\to\alpha+} g(t)=3$)



ⅱ) $\beta-\alpha=2$인 경우

$t=\alpha$일 때만, $g(t)=2$이고

$t\ne\alpha$일 때, $g(t)\le 1$이다.



∴ 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 1+1=2$

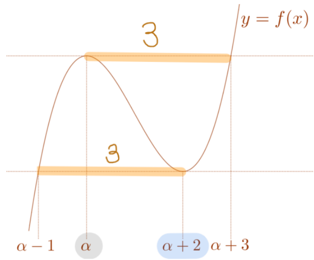
∴ $\beta-\alpha=2$ ⇔ $\beta=\alpha+2$

∴ $f(1)=f(4)=\alpha$

(Step3) 그래프 파악하기

삼차함수의 비율 관계에 따라

$f(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같다.



$f(1)=f(4)$

4-1=3

x좌표 간격 3이고

y좌표가 같은 경우는

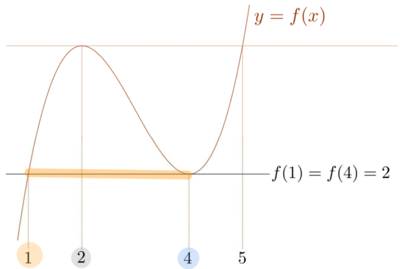
이 ⅰ),ⅱ) 뿐이다!

$f(1)=f(4)=\alpha$이므로

ⅰ) $f(\alpha-1)=f(\alpha+2)=\alpha\ (\alpha=2)$

ⅱ) $f(\alpha)=f(\alpha+3)=\alpha\ (\alpha=1)$

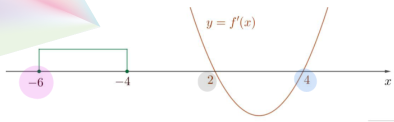
ⅰ) $f(\alpha-1)=f(\alpha+2)=\alpha\ (\alpha=2)$인 경우



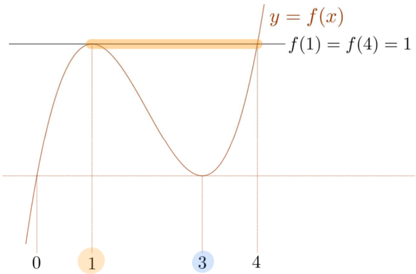
∴ $f(x)-2=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)^2$

∴ $f(0)=-6$

∴ $g(f(0))=g(-6)=0$ 조건 (나)에 모순



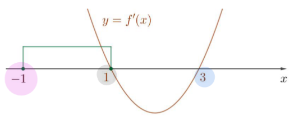
ⅱ) $f(\alpha)=f(\alpha+3)=\alpha\ (\alpha=1)$인 경우



∴ $f(x)-1=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)$

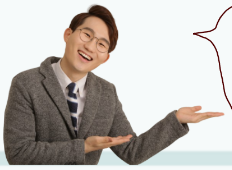
∴ $f(0)=-1$

∴ $g(f(0))=g(-1)=1$ 조건 (나)에 성립



∴ $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$

∴ $f(5)=9$



12 직선 위의 운동

위치(좌표), 이동 거리

위치변화량

평균속력 : 이동 거리의 평균변화율$=\dfrac{\text{이동 거리}}{\text{시간변화량}}$

평균속도 : 위치의 평균변화율$=\dfrac{\text{위치의 변화량}}{\text{시간변화량}}$

(순간)속력 : 속도의 절댓값(거리의 변화율)

(순간)속도 : 위치의 순간변화율

평균가속도 : 속도의 평균변화율

(순간)가속도 : 속도의 순간변화율

시각	위치	속도	속력	가속도
t	$S(t)$	$v(t)$	$\|v(t)\|$	$a(t)$

①시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 평균속도:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{t+\Delta t-t}$$

②시각 t에서의 점 P의 속도:

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{dS(t)}{dt}=S'(t)$$

③시각 t에서의 점 P의 가속도:

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{dV(t)}{dt}=V'(t)$$

④시각 t에서의 위치:

$$S(t)=S(t_0)+\int_{t_0}^{t}V(t)dt$$

⑤$t=a$에서 $t=b$까지의 위치의 변화량:

$$\Delta S=\int_a^b V(t)\,dt$$

⑥$t=a$에서 $t=b$까지의 이동 거리:

$$l=\int_a^b |V(t)|dt$$

직선 위의 운동 (1)

운동방향=속도부호

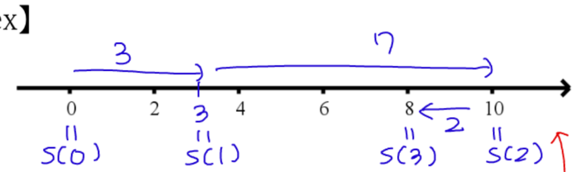
$v(t)$가 양(+)이면 +방향으로 움직이고,

$v(t)$가 음(-)이면 −방향으로 움직인다.

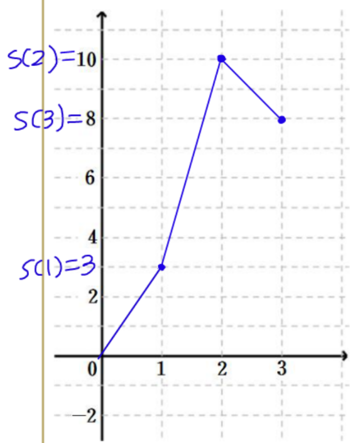
원시함수 ↓ $S(t)$　　도함수 ↓ $S'(t)=V(t)$

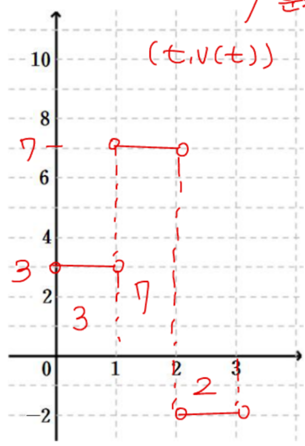
운동방향	위치(좌표)	속도부호
⊕	증가	⊕
⊖	감소	⊖

【ex】



V(t)의 부호 = 운동방향





$$*\int_1^2 V(t)dt=7$$
$$=[S(t)]_1^2=S(2)-S(1)=10-3$$

$$*\int_2^3 V(t)\,dt=-2$$
$$=[S(t)]_2^3=S(3)-S(2)=8-10$$

$$*\int_0^3 V(t)\,dt=3+7-2=8$$
$$=[S(t)]_0^3=S(3)-S(0)=8-0$$

$$*\int_0^3|V(t)|\,dt=3+7+2$$

수Ⅱ

12 직선 위의 운동

위치(좌표), 이동 거리

위치변화량

: 이동 거리의 평균변화율$=\dfrac{\text{이동 거리}}{\text{시간변화량}}$

: 위치의 평균변화율$=\dfrac{\text{위치의 변화량}}{\text{시간변화량}}$

: 속도의 절댓값(거리의 변화율)

: 위치의 순간변화율

: 속도의 평균변화율

: 속도의 순간변화율

시각	위치	속도	속력	가속도
t	$S(t)$	$v(t)$	$\lvert v(t)\rvert$	$a(t)$

①시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 평균속도:

②시각 t에서의 점 P의 속도:

③시각 t에서의 점 P의 가속도:

④시각 t에서의 위치:

⑤$t=a$에서 $t=b$까지의 위치의 변화량:

⑥$t=a$에서 $t=b$까지의 이동 거리:

직선 위의 운동 (1)

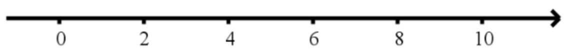
운동방향=속도부호

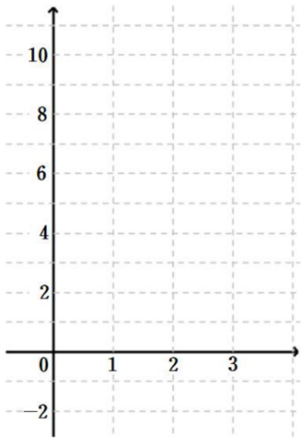
$v(t)$가 양(+)이면 +방향으로 움직이고,

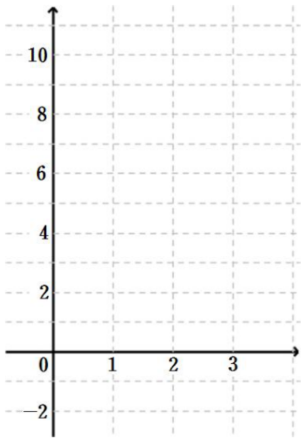
$v(t)$가 음(-)이면 −방향으로 움직인다.

운동방향	위치(좌표)	속도부호

【ex】







수II