

1. 문제

한양대학교 2013학년도 수리사고평가 발췌

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

수열 a_n 과 b_n 을 다음과 같은 점화식을 이용하여 정의하자.

$$a_0 = 2, a_1 = 9, a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$b_0 = 1, b_1 = 4, b_n = 4b_{n-1} + b_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

위에서 정의된 두 수열 a_n 과 b_n 은 모든 양의 정수 k 에 대하여 다음의 관계식을 만족한다.

$$a_{k-1}b_k - a_kb_{k-1} = (-1)^k$$

(1) 모든 양의 정수 k 에 대하여 등식 $\sqrt{5} = \frac{(\sqrt{5}+2)a_k + a_{k-1}}{(\sqrt{5}+2)b_k + b_{k-1}}$ 이 성립함을 보이시오.

(2) 부등식 $\left| \frac{a_k}{b_k} - \sqrt{5} \right| < \frac{1}{b_k^2}$ 이 성립함을 설명하시오.

2. 해설

1) $\sqrt{5} = \frac{(\sqrt{5}+2)a_k + a_{k-1}}{(\sqrt{5}+2)b_k + b_{k-1}}$ 이 성립한다는 사실은 $\sqrt{5}a_k + (2a_k + a_{k-1}) = \sqrt{5}(2b_k + b_{k-1}) + 5b_k$ 가 성립한

다는 것과 같고, 무리수의 상등을 이용하면 다음 두 식이 성립한다는 것과 동치이다.

$$a_k = 2b_k + b_{k-1} \text{ [식(a)]}, \quad 5b_k = 2a_k + a_{k-1} \text{ [식(b)]}$$

이제 수학적 귀납법을 사용하여 모든 양의 정수 k 에 대하여 식 (a), (b)가 성립함을 보이자. 먼저 $k=1$ 이면, 초기값 $a_0 = 2, a_1 = 9, b_0 = 1, b_1 = 4$ 로부터 $a_1 = 2b_1 + b_0, 5b_1 = 2a_1 + a_0$ 가 만족된다. 이제 k 보다 작거나 같은 양의 정수들에 대하여 식 (a), (b)가 성립한다고 가정하면,

$$a_{k+1} = 4a_k + a_{k-1} = 4(2b_k + b_{k-1}) + (2b_{k-1} + b_{k-2}) = 2(4b_k + b_{k-1}) + (4b_{k-1} + b_{k-2}) = 2b_{k+1} + b_k \text{ 이고,}$$

$$5b_{k+1} = 5(4b_k + b_{k-1}) = 4(2a_k + a_{k-1}) + (2a_{k-1} + a_{k-2}) = 2(4a_k + a_{k-1}) + (4a_{k-1} + a_{k-2}) = 2a_{k+1} + a_k \text{ 가 되어}$$

식 (a), (b)가 증명된다.

2) $\sqrt{5} = \frac{(\sqrt{5}+2)a_k + a_{k-1}}{(\sqrt{5}+2)b_k + b_{k-1}}$ 라는 사실과 제시문에 주어진 식을 이용하면,

$$\sqrt{5} - \frac{a_k}{b_k} = \frac{(-1)^k}{((\sqrt{5}+2)b_k + b_{k-1})b_k} \text{를 얻게 된다. 따라서,}$$

$$\left| \sqrt{5} - \frac{a_k}{b_k} \right| = \left| \frac{(-1)^k}{((\sqrt{5}+2)b_k + b_{k-1})b_k} \right| < \frac{1}{(4b_k + b_{k-1})b_k} = \frac{1}{b_{k+1}b_k} < \frac{1}{b_k^2} \text{ 이 성립한다.}$$

3. 연습문제

다음 물음에 답하여라.

1) 모든 자연수 k 에 대하여 부등식 $\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$ 이 성립함을 보여라.

2) $m > n$ 인 모든 자연수 m, n 에 대하여 부등식 $\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \ln \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$ 를 증명하라.

4. 연습문제 해답

(본 답안의 경우 논리적 흐름만을 서술했습니다.)

1) $f(x) = \frac{1-x}{k+x} = -1 + \frac{k+1}{k+x}$ 라고 할 때, k 는 자연수이고 $f'(1) = -\frac{1}{k+1}$ 이다. $f(x)$ 는 분수함수 꼴이며 아래로 볼록한 함수이다. $(1, 0)$ 에서의 접선의 y 절편을 계산하면 $\frac{1}{k+1}$ 이고, 이 조건에 해당하는 함수의 그래프를 그려서 넓이관계를 비교하면 부등식 $\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$ 가 성립함을 알 수 있다.

2) $\int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx = (k+1) \ln \frac{k+1}{k} - 1$ 이고, 1)의 식에 의해 다음의 부등식이 성립한다.

$$\frac{1}{2(k+2)} < \frac{1}{2(k+1)} < (k+1) \ln \frac{k+1}{k} - 1 < \frac{1}{2k} \quad \text{즉,} \quad \frac{1}{2(k+2)(k+1)} < \ln \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)} \text{이다.}$$

이는 곧 $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right\} < \ln \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right\}$ 로 변형할 수 있다.

$m > n$ 이므로, k 에 n 부터 $m-1$ 을 대입한 모든 식들을 모두 축차대입법으로 더하면, 최종적으로

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \ln \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn} \text{의 식을 유도할 수 있다.}$$