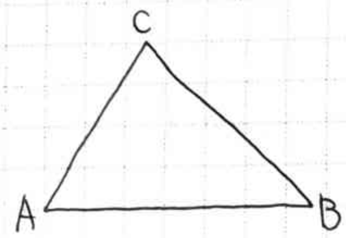
〈목차〉

〈목차〉

## ※1 〈변비 = sin비〉




$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{\sin A}{3} = \dfrac{\sin B}{2} \\ 2\sin A = 3\sin B\end{array}}$$

에서, 의 형식으로 조건이 주어지면

$\Rightarrow$ $\boxed{\sin A : \sin B = 3 : 2 \iff \overline{BC} : \overline{CA} = 3 : 2}$

N1
N2
N3
N4

idea

$\sin A$, $\sin B$, $\sin C$의 비율을 그냥 제시하거나, 간단한 이차방정식 또는 등차·등비식을 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$를 변수로 하여 제시하면, $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$의 비율을 통해 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$의 비율을 알 수 있고, 세 변의 비를 아므로, cos법칙을 이용하여 각각의 각을 확정지을 수 있다.

이때, 한변의 길이가 주어지면, 세변·세각을 전부 알게 되므로, 넓이를 구할 수 있다.

"값"이 아닌, "비"만 알아도 된다는것이 point.

## <※2. 서로소를 크기순으로 나열>

자연수 K와 서로소인 자연수를 크기순으로 나열하려면

모든 자연수 에서 $\boxed{\text{K의 소인수들의 배수들을 제거}}$한뒤 $\boxed{\text{주기를 K로 잡으면}}$ 된다.

ex) 6과 서로소인 자연수 중 13번째 수는?

$6 = 2 \times 3$.

1 $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ 5 $\cancel{6}$
7 $\cancel{8}$ $\cancel{9}$ $\cancel{10}$ 11 $\cancel{12}$ $\boxed{\text{주기} = 6}$

ex) 10과 서로소인 자연수중 9번째로 작은수는?

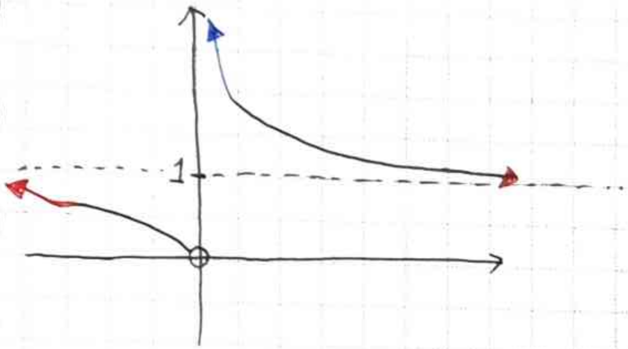
$10 = 2 \times 5$

1 $\cancel{2}$ 3 $\cancel{4}$ $\cancel{5}$ $\cancel{6}$ 7 $\cancel{8}$ 9 $\cancel{10}$
11 $\cancel{12}$ 13 $\cancel{14}$ $\cancel{15}$ $\cancel{16}$ 17 $\cancel{18}$ 19 $\cancel{20}$ $\boxed{\text{주기 } 10}$

빈칸

## ⟨#3. $e^{\frac{1}{x}}$과 그의 극한⟩

$e^{\frac{1}{x}}$은 요상하게 생겼다.




이를 감안하고

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=5$이고.

$f(0)=2$

$2x^2+ax+2$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(e^{\frac{1}{x}})}{e^{\frac{2}{x}}+1} & (x\neq 0)\\[2ex] 2 & (x=0)\end{cases}$$

이 실수전체의 집합에서 연속일때

$100\times g\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$을 구해보자

$x=0$ 에서 연속임을 확인키 위해서는 $\begin{cases}\cdot\, g(x+)\\ \cdot\, g(x-)\\ \cdot\, g(x)\end{cases}$ 를 $\boxed{\text{셋다 조사}}$하여 서로 같음을 보여야 한다.

$\lim\limits_{x\to 0+}$ 는 $\frac{1}{x}$을 $t$로 치환했을 때 $\lim\limits_{t\to\infty}$ 가 되고 이는 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(e^t)}{e^{2t}+1}=2$이 되어 $f(x)$가 $2x^2+ax+b$ 임을 알려준다.

$\lim\limits_{x\to 0-}$ 는 $\frac{1}{x}$을 $t$로 〃 , $\lim\limits_{t\to-\infty}$ 가되고 $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{f(e^t)}{e^{2t}+1}=2$가 되고, $e^t=k$로 치환하면 $\lim\limits_{k\to 0+}\dfrac{f(k)}{k^2+1}=2$가 되므로

$f(0)=2$임을 알려준다.

처음에 이걸 못찾았다.

$\boxed{\begin{matrix}x=0+\\ x=0-\end{matrix}}$ 둘다 조사하는 습관을 갖자.

# <※4. 짝/홀 의 중복조합>

① 자연수 조건인지 음이아닌 정수 조건인지 재빨리 확인한다.

② 자연수 조건 → 홀수 → $2a'+1$, 짝수 → $\boxed{2a'+2}$ 로 바꿔주고 중복조합.

⊕ a, b, c, d 중 누가 홀수이고 짝수인지도 정해야 하는 경우가 있음을 잊지말고, 그런 경우일땐 조합으로 처리해준다

③ 음아닌 정수 조건 → 홀수 → $2a'+1$, 짝수 → $\boxed{2b'}$ 로 바꿔주고 중복조합.

2a'+

ex) (a, b, c, d) 순서쌍 구하기//

$a+b+c+d=9$이고, 홀수는 홀수개이며, a,b,c,d는 자연수이다

→ 홀수 1개 → ${}_4C_1 \times \{2a'+1+2b'+2+2c'+2+2d'+2=9\} = 16$
$=2a'+2b'+2c'+2d'=2$
$\rightarrow {}_4H_1$

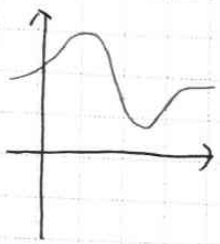
→ 홀수 3개 → ${}_4C_3 \times \{2a'+1+2b'+1+2c'+1+2d'+2=9\} = 40$
$\Rightarrow 2a'+2b'+2c'+2d'=4 \rightarrow {}_4H_2$

→ 56가지

## 〈※5. $|f(x)|$ 그래프의 최대·최소〉 (문해전 6강 49번)

$|f(x)|$는 $\geq 0$ 이기 때문에, $|f(x)|$의 최솟값은 0이거나 양수이다.

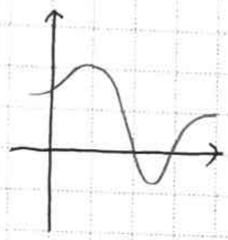
①



↓

최대 최소가 모두 양수부

②

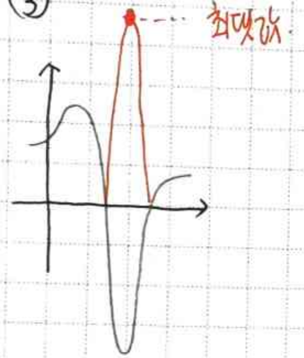


↓

최대는 양수부

최소는 0

③




↓

최대는 음수부 출신

최소는 0

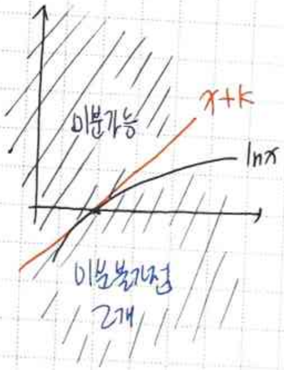
## 〈※6. 절댓값 함수의 미분〉

- 웬만하면, 지랄하지말고 구간 나눠서 절댓값 부호 없애고 미분하기
- $|f(x)+g(x)|$ 일 때, $f(x)+g(x) = h(x)$ 로 둔 뒤

  $h(x)$ 그냥 미분해서 $h(x)$ 그래프 그리고 $|h(x)|$ 로 접어올려주어도 됨. (그래프의 미분가능성 문제일때)

- $|\quad|$ 안의 두 함수가 직선·곡선일 땐, 찢어서 그래프로 봐도 됨.
  (상수함수 포함)

ex) $|-x+k+\ln x|$ 의 미분가능성 ⟶ $|\ln x - (+x-k)|$ 로 봐서




로 생각하기

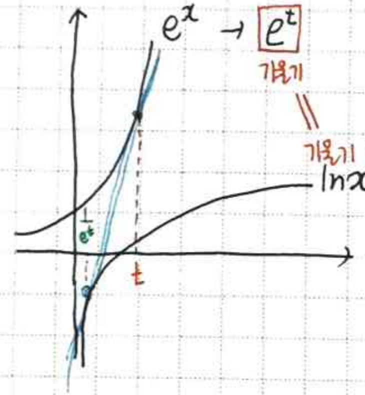
웬만한 걸 삐가함수로 바꿔서 조지는 능력이 필요함.

## 〈※동시접선〉

• 총 3가지 툴이 있다.

***

① 한곡선을 $t$로 표현했을 때 나머지 곡선도 손쉽게 표현가능한 경우




$e^x \to \boxed{e^t}$ 기울기

$\|$

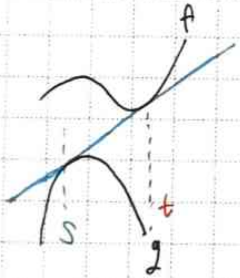
기울기 $= \boxed{e^t}$

$\ln x \to \frac{1}{x}$ 이 되는 $x$값 $= \frac{1}{e^t}$

$\therefore e^t(x-\boxed{t})+e^{\boxed{t}} = e^t\left(x-\frac{1}{e^t}\right)+\ln\left(\frac{1}{e^t}\right)$

**

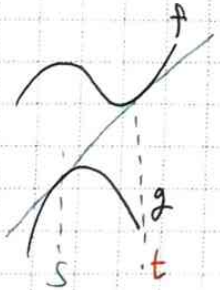
② 하나는 $t$, 하나는 $S$ 로 표현한 뒤, $\boxed{\text{접선} = \text{접선}}$.




$$\boxed{f'(t)(x-t)+f(t) = g'(s)(x-s)+g(s)}$$

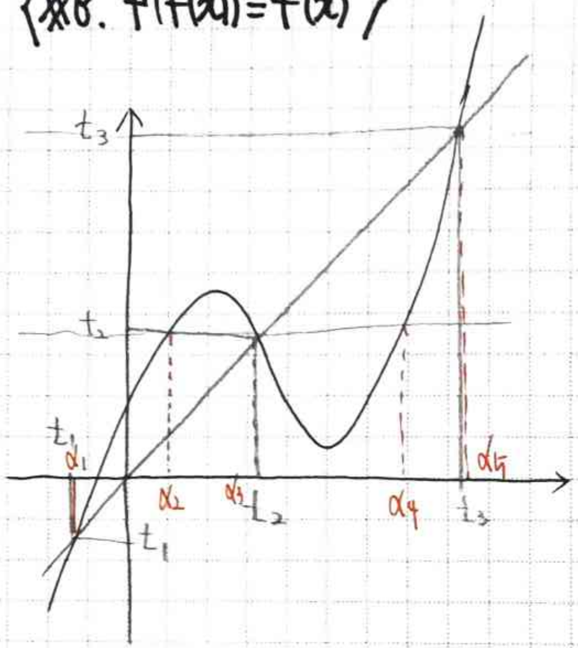
$$\boxed{\therefore f'(t) = g'(s)\ ,\ tf'(t)-f(t) = sg'(s)+g(s)}$$

③ 접선 = 접선 & 기울기 = 기울기




$$\boxed{\begin{gathered} f'(t) = g'(s) \\ \frac{f(t)-g(s)}{t-s} = f'(t) = g'(s) \end{gathered}}$$

## ⟨※8. $f(f(x))=f(x)$⟩




① 합성함수에서 복잡하면 ⟶ 치환 하자

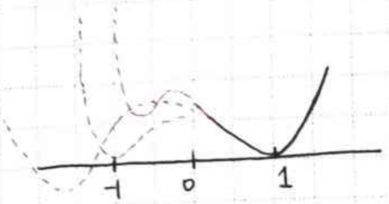
***

② $\boxed{\begin{cases} f(x)=t \\ f(t)=t \end{cases}}$ 를 푸는 것인데, $x$에 대하여 푸는것이 궁극적 목표임을 잊지말자

③ $\begin{cases} f(x)=t_1 \\ f(x)=t_2 \\ f(x)=t_3 \end{cases}$ 의 근을 모두 찾아주면 된다.

## 〈※.9 다항함수 계산법들〉

* 근의 크기를 조정해야 할 때.




이런식으로 함수를 둔다

$f(x) = k(x-1)^2 \boxed{(x^2+ax+b)}$

point !!

위 상황은 근이 -1보다 작거나, 근이 없어야 되는 상황이므로. $(x^2+ax+b)$ 에다가 $\left\{\begin{array}{l}\boxed{\text{판별식}} \\ \boxed{\text{근의분리 (점대입, 대칭축)}}\end{array}\right.$ 을 세운다.

$\therefore$ $\boxed{D = a^2-4b \leq 0}$ 이거나, $\boxed{(-1)^2+a(-1)+b > 0 \text{ 이고 }, \frac{a}{-2} < -1}$ 이다.

판별식

근의분리

· 도함수를 이용해야 하는 경우

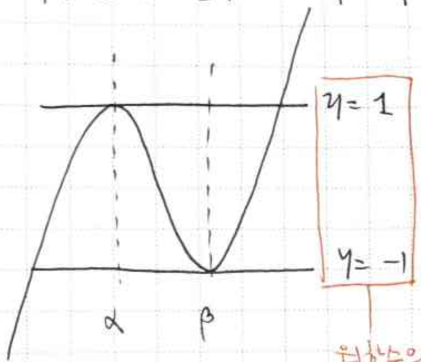
ex) $f(x) = p(x-1)^3 + q$. (p는 양수)

$\boxed{|f(1) - f(0)| = 1}$ — 원함수의 차 가 재료로 주어지며

$\boxed{f'(2) = ?}$ — 묻는 것이 도함수일때.

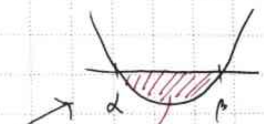
$\rightarrow \boxed{\int_{1}^{0} f'(x) = \int_{1}^{0} 3p(x-1)^2 = 1}$. 계산해 p 얻음.

ex) f(x)는 3차함수. $f = 4x^3 \sim$




원함수의 "차"가 제시됨.

$f' = 12x^2 \sim$




이거의 넓이가 2라는 소리

(도함수적분 = 원함수 차)

$\therefore \boxed{\frac{12}{6}|\beta - \alpha|^3 = 2}$

$\therefore \beta - \alpha = 1$

$\therefore \beta = \alpha + 1$

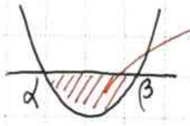
• 3차함수에서 $\boxed{\text{한 극점의 } x\text{좌표}}$를 알때 → $\boxed{\text{적분}}$도 고려해라!

+ $\boxed{f(1)=0 \text{ 등 적분상수 처리용 조건}}$이 있거나
+ $\boxed{\text{나머지 한 극점의 범위}}$가 중요하거나
+ $\boxed{\text{함수 확정이 아닌}}$, $\boxed{f(x)\text{의 최댓값 등}}$을 묻는 문제

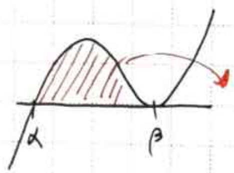
→ 적분이 편할 확률 ↑↑

• 다항함수의 넓이공식.

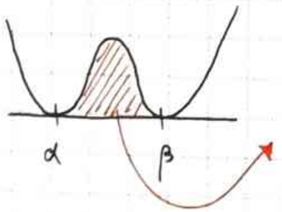
$f = ax^2 \sim$



$\left|\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{\boxed{6}}\right|$



$\left|\dfrac{a(\beta-\alpha)^4}{\boxed{12}}\right|$ **



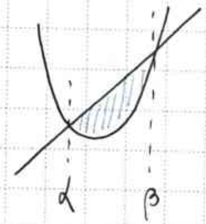
$\left|\dfrac{a(\beta-\alpha)^5}{\boxed{30}}\right|$

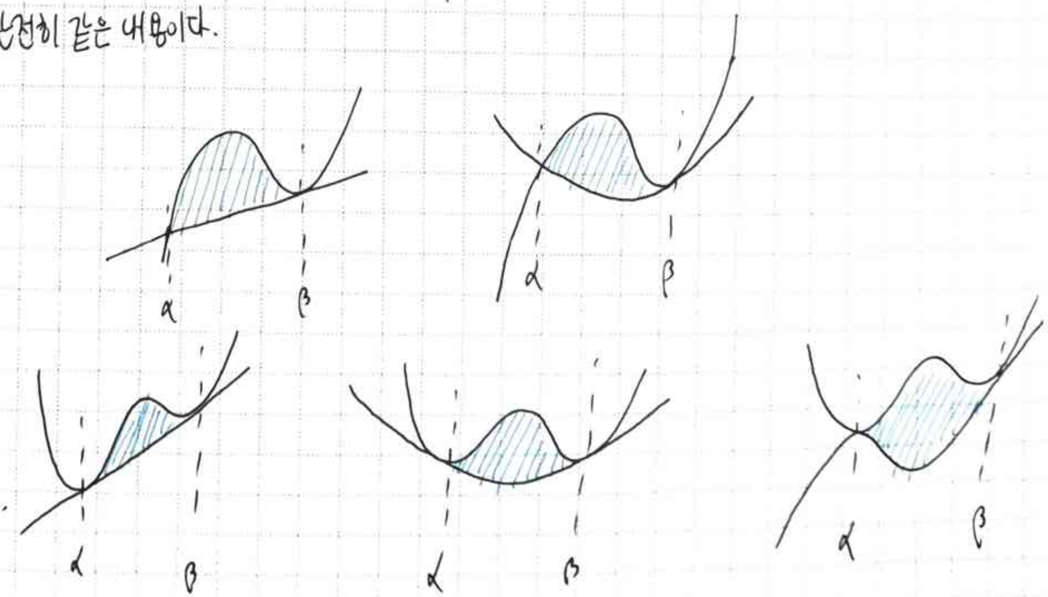
$\boxed{\text{빼면}}$ 차피 $\boxed{\text{2.3.4차가 되므로}}$

오른쪽 경우랑 왼쪽 경우랑

사실상 수학적으로

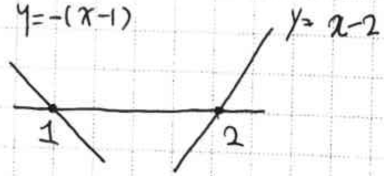
완전히 같은 내용이다.





• 이렇게 하는 문제를 딱히 본적은 없음. 한 4~5차에서 근을 두개쯤 아는데 다 전개하긴 에바일때 쓰는것

• $f(x)$: 4차함수.




두 직선에 $(1,0)$ $(2,0)$에서 각각 접함

$y = (x-1)(x-2)P(x)$

↳ $k(x-1)(x-2)(x-\alpha)(x-\beta)$ 로 두고 푸는것은 너무힘두로잉.

$-P(1) = -1$

$P'(x)$

$P(2) = 1$

↳ $f(x) = (x-1)(x-2)\boxed{P(x)}$

$P(x) \rightarrow$ 최고차항 $k$인 이차함수.

$f'(1)=-1 \rightarrow (1-2)P(1) = -1$

$f'(2)=1 \rightarrow (2-1)P(2) = 1$

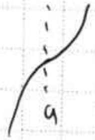
$\rightarrow$ $\boxed{P(1)=1,\ P(2)=1 \rightarrow P(x)= k(x-1)(x-2)+1.}$

$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)\{k(x-1)(x-2)+1\}$

• 현우진's Skill.

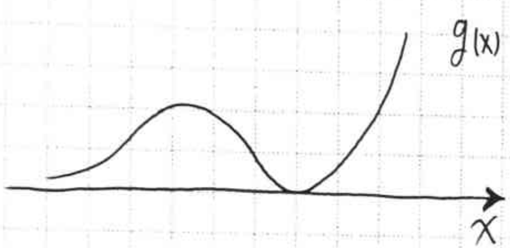
• $(x-a)^{2,4,8\cdots} f(x)$ 이고 $(f(a)\neq 0)$ 이면. $x=a$ 에서 극값을 가진다


• $(x-a)^{홀수} f(x)$ 이고 $f(a)\neq 0$ 이면 $x=a$에서 변곡한다.



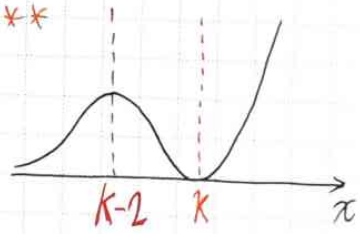

이를 거꾸로 활용하여.

• $g(x) =$ 이차 $\times\ e^x$ 꼴이라고 할 때




$g(x) = (x^2+ax+bx)e^x$ 라고 두지 않고,

$\boxed{g(x) = (x-k)^2 e^x}$ ★★★ 로 둘수있다.



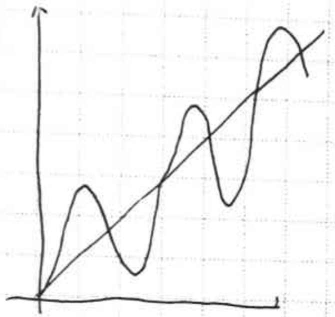

그러면. $g(x)$를 미분하여. $[2(x-k)+(x-k)^2]e^x = e^x(x-k)\boxed{(2+x-k)}$ ★★★

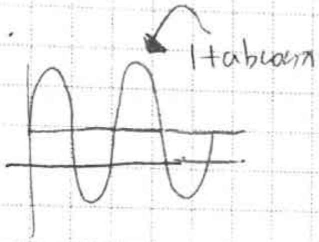
를 얻어, 나머지 한 극점의 $x$좌표를 뽑아낼 수 있다

· 좀 뜬금없긴 하지만, $x+a\sin bx$ 꼴

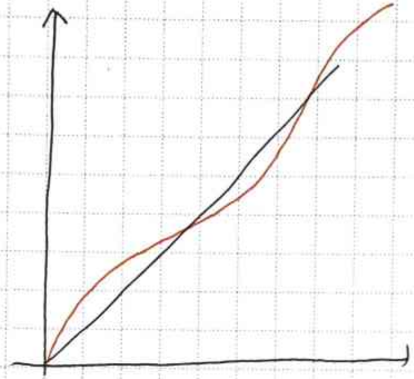
① 도함수 부호변동 有

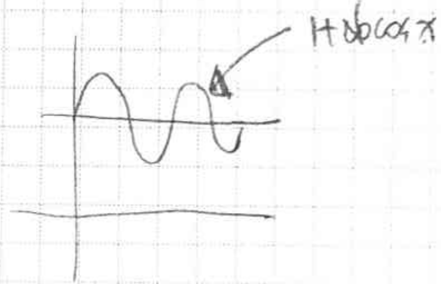
( $1+ab\cos bx$ 그래프가 $x$축과 NO접 YES만남)





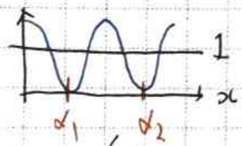

② 도함수 부호변동 無, $f'(x)=0$ 인곳 존재 ×

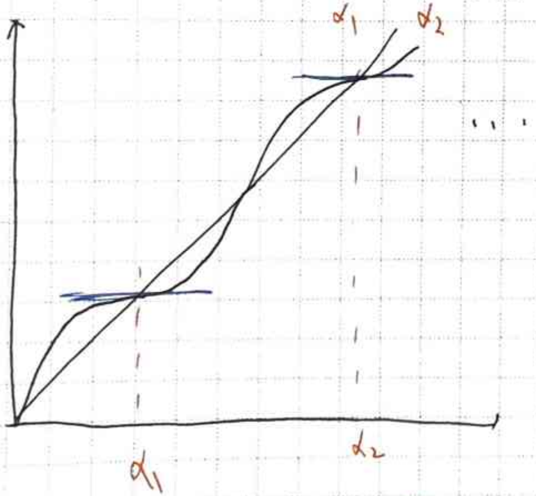





*** 특별

③ 도함수 부호변동 無, $f'(x)=0$인 $x$ 존재 o

( $1+ab\cos bx$가  이렇게 생김)


( $\frac{\pi}{6}$)　( $\frac{3\pi}{6}$)

## ⟨※10. $f(a) = f'(a)$⟩

- 문제에서 $\boxed{f(1) = f'(1)}$ 등, $\boxed{f(a) = f'(a)}$ 표현이 나올때가 있다.

그냥 계산으로만 받아들이지 말고, 하나의 방향제시법이라고 생각해야한다.

ex)
- [$f(x) > f'(x)$ 이다] + [$f(1) = f'(1)$ 이다]

→ $f(x) - f'(x) > 0$ 인데, $f(1) - f'(1) = 0$ 이므로

$f(x) - f'(x) = h(x)$ 라 하면 $h'(1) = 0$ 이다. (튕겨야 하므로)

ex)
- 미분가능성 문제에서 등장할 수도 있다.

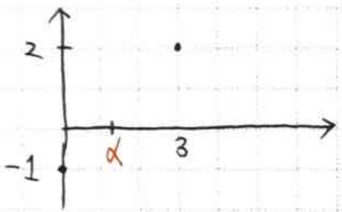
[$h(t) = |tf(t) - t^2 f'(t)|$ 일때 $h(t)$는 실수전체에서 미분가능 하다] + [$f(1) = f'(1)$]

→ $h(1)$을 대입하라고 방향을 제시하는 것.. $h(1) = 0$ 이므로 $h'(1)$도 0임을 간파 가능

## <※12. $\sqrt{f(x)^2} = f(x)$?>

- $\sqrt{f(x)^2}$ 꼴에서 $\begin{cases} \sqrt{f(x)^2} = f(x) & (f(x) \geq 0) \\ ※※\ \boxed{\sqrt{f(x)^2} = -f(x) \quad (f(x) < 0)} \end{cases}$

- idea




$\left[\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{이고} \\ f(0) = -1 \\ f(3) = 2 \end{array}\right]$ 일때 $\int_0^3 f'(x)\sqrt{f(x)^2}\,dx$ 의 값은?

→ α ( $f(\alpha)=0$ 인 x좌표를 α라고 둠) 를 기준으로 구간을 나누어 적분한다.

$\int_0^{\alpha} f'(x) \cdot \overset{※※※}{\boxed{(-f(x))}}\,dx + \int_{\alpha}^{3} f'(x) f(x)\,dx$ ↵

## ⟨※12. 로그함수 with 곱셈공식⟩

- 적분문제에서 로그가 껴있는데, 이걸 어떻게 적분하지? 생각이 들면 로그의 덧셈을 곱셈으로 봐서 찢어보는 것을 했는지 판단한다.

- $\boxed{(a^3+b^3)} = \boxed{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

- $\boxed{(a^3-b^3)} = \boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

- ex) $\int_0^1 (2x-1)\ln(x^3+1)\,dx$ 에서

  $\int_0^1 (2x-1)\ln(x+1)(x^2-x+1)$ 로 보면, 찢은 뒤 적분 가능!

## 〈※13. 양변적분 to $\int_t^{t+1} f(x)dx$ !!〉

$(t+1)f'(t+1) - tf'(t) = f(t+1) - f(t)$

$\int_x^{x+1} t f'(t)\, dt = \int_x^{x+1} f(t)dt$

- $\boxed{\text{t와 t+1}}$이 스무스하게 섞여서 나올때가 있다

$\int_t^{t+1} f(x)dx = 5t + C$

ex)

- $f(t+1) - f(t) = 5 \rightsquigarrow \int_t^{t+1} f(x)dx = 5t + C$ $\quad + f(t+1)$

- $-tf'(t) + f(t) = -(t+1)f'(t+1) + f(t+1)$

  ↳ $(t+1)f'(t+1) - tf'(t) = f(t+1) - f(t) \rightsquigarrow \int_t^{t+1} xf'(x)\, dx = \int_t^{t+1} f(x)dx + C.$

- $f(t+1) - g(t+1) = f(t) - g(t) \rightsquigarrow f(t+1) - f(t) = g(t+1) - g(t) \rightsquigarrow \int_t^{t+1} f(x)dx = \int_t^{t+1} g(x)dx + C$

- 이때, $\boxed{\text{식의 모양이 같은것들끼리 모은 뒤}}$ "$\boxed{\text{양변을 한꺼번에 적분해버리자}}$"는 마인드로 달려들어야 한다.

## 〈※14. 변수분리〉

• $\boxed{\text{적분기호 안의 함수 } f(x)}$의 $\boxed{\text{괄호안에}}$ $\boxed{\text{적분변수가 아닌 아이}}$가 있으면, $\boxed{\text{치환}}$을 통해 빼내주어야 한다.

- 더하기·빼기로 묶인경우

괄호안의, 적분변수가 아닌 아이.

적분변수 t

ex)

$$g(x) = \int_0^5 f(x-t)\,dt$$

↳ $x - t = k$.

$\boxed{-dt} = dk$

(적분변수에 대해 미분해야함!)

$$\int_x^{x-5} f(k)(-dk) = -\int_x^{x-5} f(k)\,dk = \int_{x-5}^{x} f(k)\,dk$$

$$\therefore\ g(x) = \int_{x-5}^{x} f(t)\,dt.$$

$\boxed{\text{이제, } x\text{에 대해 양변 미분할 수 있다!}}$

- 나누기로 묶인 경우.

ex)

$$g(x) = \int_0^3 f\left(\frac{t}{x}\right) dt.$$

↳ $\frac{t}{x} = k$

$\frac{1}{x}dt = dk.$

$$x\int_0^{\frac{3}{x}} f(k)\,dk \rightarrow g(x) = x\int_0^{\frac{3}{x}} f(k)\,dk$$

$\boxed{\text{이제 } x\text{에대해 양변미분 가능!}}$

- 이창무인경우 (올해전 P.148)

$$g(x) = \int_0^{x-2} t(2x-t)\,f(x-t)\,dt.$$

$x - t = k$

$-dt = dk$

$$\int_{x}^{2} (x-k)(2x-x+k)\,f(k)\,dk$$

$$\int_2^{k}$$

# ⟨※15. 범위 늘리기 (한입만 더줘잉)⟩

- 문제의 조건에서, $(0 \le x \le 2)$ 에서 ○○○는 △△△이다 등의, 범위를 제한할 때.

*** ↙ 우변이 변하면 안된다는 뜻이다....

$\boxed{\text{조건이 대칭식인지}}$ 유심히 살펴보자. 대칭식은, 서로의 괄호안의 문자가 대칭인것 정도로 이해해볼 수 있다.

대칭식일 때, $\boxed{\text{조건식을 대칭시키면}}$ 주어진 $\boxed{\text{범위가 늘어난다!}}$

ex). $1 \le x \le 2$ 인 $x$에 대하여 $f(x) + f(4-x) = 4$이다.

↳ $\boxed{x\text{대신 } 4-t \text{ 대입}}$. $\boxed{\begin{matrix} 1 \le 4-t \le 2 \\ 2 \le t \le 3 \end{matrix}}$ 인 $t$에 대하여 $f(4-t) + f(t)$는 4이다.

same.

∴ $1 \le x \le 3$ 인 $x$에 대하여 $f(x) + f(4-x) = 4$이다.

ex) $\boxed{1 \le x \le 2 \text{일 때}}$, $f(x) = f(\frac{1}{x})$ 이다.

span

same

↳ $x = \frac{1}{t}$로 치환. $\boxed{\frac{1}{2} \le t \le 1 \text{ 일때}}$ $f(\frac{1}{t}) = f(t)$ 이다

∴ $\frac{1}{2} \le t \le 2$ 일 때, $f(x) = f(\frac{1}{x})$이다.

***

- 조건식을 $\boxed{\text{대칭}}$시켰는데 $\boxed{\text{우변의 함수가 변할 경우}}$ ⟶ $\boxed{\text{연립방정식풀면 진짜 구할수있다.}}$

# 〈#.16 대칭식의 이용〉

$\boxed{h(x) = f(k+x) + f(k-x)}$ ⇝ $h(x)$는 $x=k$ 대칭이 아니라

$\boxed{x=0 \text{ 대칭이다!}}$

· $f(2-x) + f(x) = \cos ax$ , ($a$는 양수)

└→ 2가지로 이해 可能.

Same 이므로 same.

· 대칭식이용 → $\boxed{f(2-x)+f(x)} = \boxed{\cos ax}$ → $\cos ax = \cos(2a-ax)$

$\boxed{f(x)+f(2-x)} = \boxed{\cos(a(2-x))}$ $= \cos(ax-2a)$

$\therefore 2a = 2\pi, 4\pi \cdots$

$\therefore a = n\pi$

· 대칭성이용 → 좌변의 함수를 $g(x)$라고 두면

$g(x)$는 $x=1$ 대칭이므로

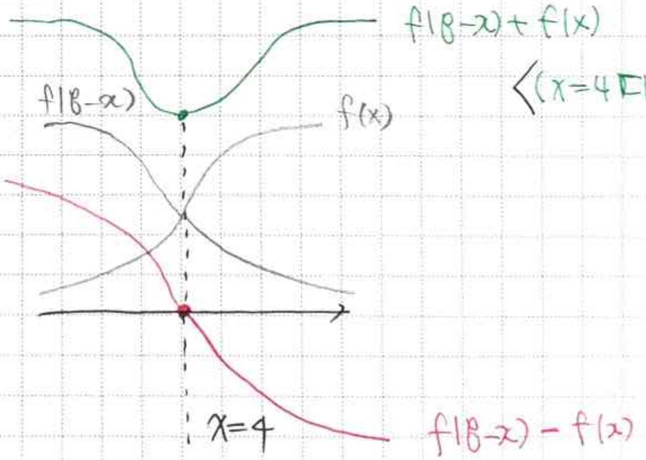
$\cos ax$도 $x=1$ 대칭이어야 한다. $\therefore \cos ax = \cos a(2-x)$

뭐, 결국 똑같긴 하네..

· $f(8-x)$는 $f(x)$를 $x=4$에 대해 대칭시킨 것이다

· $f(8-x) + f(x)$는 $x=4$ 대칭인 함수이다

· $f(8-x) \boxed{-} f(x)$는 $\boxed{(4, 0) \text{ 대칭인 함수}}$이다.

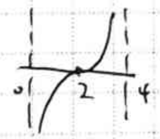



〈(x=4 대칭함수)〉

〈(4,0)대칭함수〉

· $f(x)$와 $4-f(x)$는 $y=2$ 대칭 관계이다.

· $\log\left(\frac{x}{4-x}\right)$는 $\log x - \log(4-x)$ ⇝ $f(x) - f(4-x)$ → $(2, 0)$ 대칭함수!

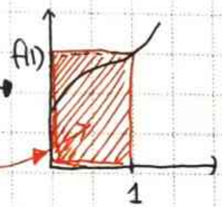
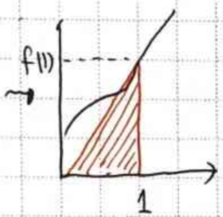
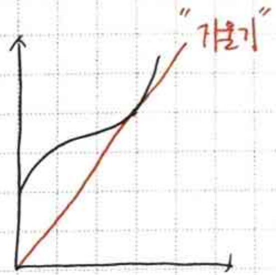


## 〈※17. $\sum_{k=1}^{n} {}_{2k}C_2$ 꼴〉

- 이 씨발년은 왜 계속 나오는지 모르겠다. 정복은 해두도록 하자
- 보통, 케이스를 존나 나눠야 하는 상황에서, {씨발 이걸 다 계산하라고 ㅋㅋ} 일때 쓰게된다.
- $1 - \dfrac{{}_{19}C_2 + {}_{17}C_2 + {}_{15}C_2 + {}_{13}C_2 \cdots {}_5C_2 + {}_3C_2}{{}_{20}C_3}$ 이딴걸 계산해야 할 때 쓰는 기술이다.
- ${}_{19}C_2 + {}_{17}C_2 + \cdots + {}_5C_2 + {}_3C_2$ 를, $\sum_{k=1}^{9} {}_{\boxed{2k+1}}C_2$ 꼴로 맞춰준다. 2k+1 부분을 센스있게 잘 설정하는것이 중요하다.
- ${}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$ 임을 이용하면, $r$이 2또는 3으로 제시될 것이므로, $n$에관한 2~3차식 정도로 나온다는것을 안다.
- $\dfrac{(2k+1)(2k)\cancel{(2k-1)\cdots 1}}{\cancel{(2k-1)!} \times 2!}$ 한뒤. $\sum_{k=1}^{9} 2k^2+k = 2 \times \dfrac{9\cdot 10\cdot 19}{6} + \dfrac{9+10}{2}$ 써주면 끝!

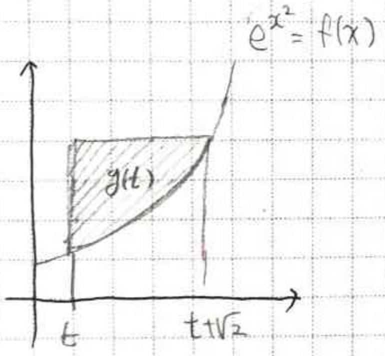
## 〈※18. 넓이 비교〉

- 밑변이 1인 도형을 항상 인지해야 함.

- $f(1)$ ⇝  // $\frac{1}{2}f(1)$ ⇝  // $f'(1) = \frac{f(1)-0}{1-0}$ ⇒ 

- 넓이와 직선의 기울기를 충분히 연결할 수 있기에, 이런 물음이 가능하다.

$e^{x^2} = f(x)$



ㄱ. $g(t) > \frac{f(t+\sqrt{2})-f(t)}{\sqrt{2}}$

ㄴ. $\int_0^{\sqrt{2}} g(t)\,dt > e^2-1$

ㄱ에서

$g(t) > \frac{f(t+\sqrt{2})-f(t)}{\sqrt{2}}$ 인데

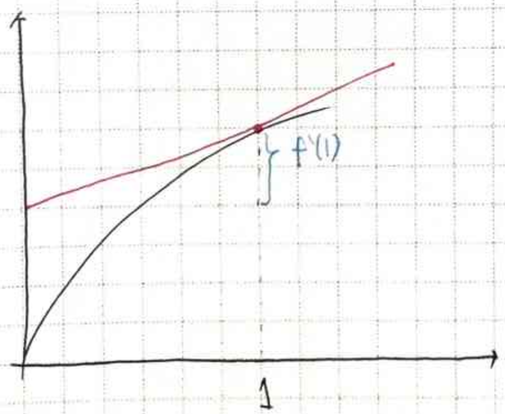
$\frac{f(t+\sqrt{2})-f(t)}{\sqrt{2}} > f'(t) = 2te^{t^2}$ 이므로

(기울기)

$g(t) > 2te^{t^2}$

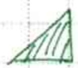
$\therefore \int_0^{\sqrt{2}} g(t)\,dt > \int_0^{\sqrt{2}} 2te^{t^2}dt = \left[e^{t^2}\right]_0^{\sqrt{2}}$

$= e^2-1$



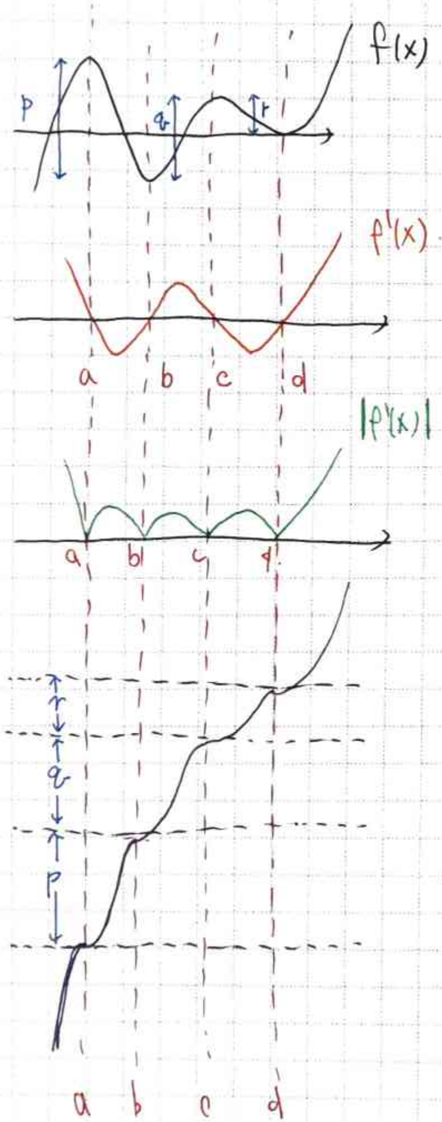
$f(1)$ 기울기

$f'(1)$ $1 \times \tan\theta = f'(1)$

$\frac{f(1)}{2}$ 

⟨※19. 도함수의 절댓값 적분은 원함수의 이동거리, 그래프는 억지-굴곡 그래프⟩

- $\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} |f'(x)|\, dx$ 는 $f(x)$에서의 $\alpha_1 \sim \alpha_3$까지의 변위의 합임.

- 


에서, $\int_a^b f'(x)\,dx$ 는 $f(b)-f(a)$이므로 $-p$ 이다.

정적분과 넓이를 구분해야 한다.

즉, $f'(x)$ 그래프의 a부터 b까지의 "넓이"가 p라는 뜻이다.

그러므로, $|f'(x)|$를 a부터 b까지 적분하면 p이다.

즉, $\int_a^d |f'(x)|\,dx = p+q+r$ (이동거리) 가 된다!

그리고 생각해보면, $\int_a^b |f'(x)|\,dx = p$, $\int_b^c |f'(x)|\,dx = q$, $\int_c^d |f'(x)|\,dx = r$

이므로, $|f'(x)|$를 $g'(x)$라고 두면 $g(b)-g(a)=p$ $g(c)-g(b)=q$ $g(d)-g(c)=r$

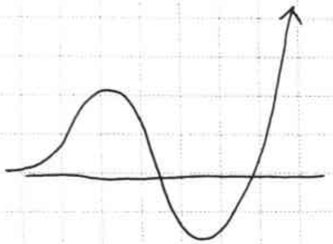
이니까, $g(x)$는 보라색 그래프가 나온다.

## ⟨#20. $e^x \cdot (ax^2+bx+c)$ 의 종류⟩

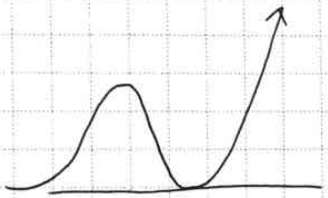
- 미분 전과, 1차미분 후의 판별식에 의해 갈려진다.

$f(x)=e^x(x^2+ax+b)$ 이고 $a^2-4b=D_1$ 일때

$D_1>0$



$D_1=0$

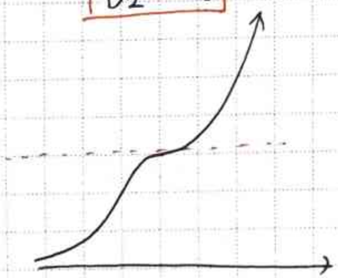


$D_1<0$

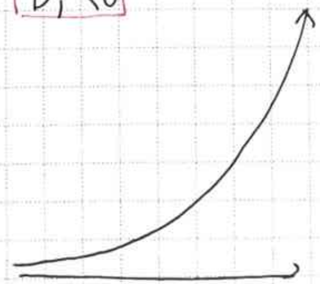
$f'(x)=e^x\{x^2+(a+2)x+(a+b)\}$ 이고, $(a+2)^2-4(a+b)=D_2$ 라 할때

$D_2>0$

* $\boxed{D_2=0}$



* $\boxed{D_1<0}$ ← 이새끼는 변곡도안한다.



# 〈※21. 수열 잡기술〉

• 등비수열 $b_n$이 있을 때 $\sum_{n=1}^{\triangle} \frac{1}{b_n}$

↳ $\frac{1}{b_1} \xleftarrow{\times r} \frac{1}{b_2} \xleftarrow{\times r} \frac{1}{b_3} \leftarrow \cdots \xleftarrow{\times r} \frac{1}{b_p}$ ⇝ $\boxed{\text{초항을 } \frac{1}{b_p}\text{로 보고, 공비를 } r\text{로 두고 계산}}$한다.

ex) $\sum_{n=1}^{17} a_n = \sum_{n=1}^{17} \frac{1}{a_n}$ 일때 $a_9$의 값은?

↳ $\frac{a_1(r^{17}-1)}{r-1} = \frac{\frac{1}{a_{17}}(r^{17}-1)}{r-1}$ ⇝ $a_1 = \frac{1}{a_{17}}$ ⇝ $a^2 r^{16} = 1$ ⇝ $ar^8 = a_9 = \pm 1$

• 한 번 완전제곱식으로 만든뒤 로그수열

↳ ex) $a_{n+1} = (a_n)^2 + 4a_n + 2$ ⇝ 양변 +2 ⇝ $a_{n+1} + 2 = (a_n+2)^2$ ⇜ $\boxed{a_n + 2 = b_n\text{으로 설정}}$

$b_{n+1} = b_n^2$ ⇜ $\boxed{\text{양변로그}}$ 취함 $\log b_{n+1} = \boxed{2}\log b_n$ $\therefore \boxed{\log b_n = C_n\text{으로 설정}}$.

$C_n$은 $\begin{cases} \text{초항}: \log b_1 \\ \text{공비}: r=2 \end{cases}$ 인 $\boxed{\text{등비수열}}$이 된다! → $\log b_n = \{\log b_1\} \times 2^{n-1}$

→ $\log(a_n+2) = \{\log b_1\} \times 2^{n-1}$

→ $a_n + 2 = 10^{\log b_1 \times 2^{n-1}}$

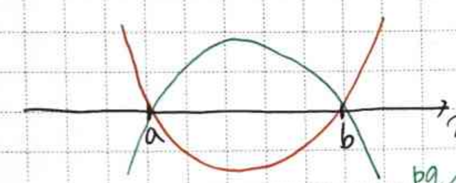
→ $\boxed{a_n = 10^{\log b_1 \times 2^{n-1}} - 2}$

$a_n$의 $\boxed{\text{일반항}}$이 뚝딱.

- $a_{n+k}$ $\begin{cases} a_n + kd \\ a_k + nd \end{cases}$ 둘다로 볼 줄 알아야 함.

- $\boxed{\text{두등차수열의 곱}}$ $\boxed{a_n b_n}$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} a_n = p(n-a) \\ b_n = q(n-b) \end{cases}$ 로 나타내면.

$a_n b_n = pq(n-a)(n-b)$ 로서




으로 그려지고, $\boxed{\text{최대·최소는}}$ $\begin{cases} \frac{a+b}{2} \text{ 가 자연수} \rightsquigarrow \boxed{n=\frac{a+b}{2} \text{ 에서 가진다.}} \\ \frac{a+b}{2} \text{가 NO 자연수} \rightsquigarrow \boxed{n=\frac{a+b}{2} \text{ 에 가장가까운 자연수에서 가진다}} \end{cases}$

($a_n$은 등차수열)

- $a_n + a_m = a_{n+p} + a_{m-p}$
- $a_{4+n} = a_n + 4d$ , $\boxed{a_n = a_4 + (n-4)d}$

($a_n, b_n$이 등차수열일 때) ($a_6$값과 $b_4$값을 안다고 치면)

$$\sum_{n=1}^{k}(a_n-b_n)^2 = \sum_{n=1}^{k}\left[\{a_6+(n-6)d_a\}-\{b_4+(n-4)d_b\}\right]^2$$

$$=\sum_{1}^{k}\{\underbrace{(a_6-b_4)}_{\text{상수}} + \underbrace{(d_a-d_b)n}_{n\text{에 대한 1차식}} + \underbrace{(4d_b-6d_a)}_{\text{상수}}\}^2$$

$\longrightarrow$ k에 대한 식으로 나타내기 쉬움.

- $\boxed{\text{등차수열}}$은 직선임을 이용한 공차구하기 (an이 등차 수열임을 밝힐 수도 있음!) ⟶ $\boxed{\text{평균변화율꼴}}$의 등장.

ex) $a_{2n} = a_n + n$

차

$\dfrac{a_{2n} - a_n}{2n - n} = 1 \rightarrow a_n$은 기울기 1인 직선 $=$ $d=1$인 등차수열.

$\cancel{a} + (2n-1)d = \cancel{a} + (n-1)d + n$

$nd = n \quad d = 1$

## 〈※.22. 소인수 분해〉

- 1과 모든 수는 서로소이다.

- $N = a^p \times b^q \times c^r$ 이라고 하자.

- 약수의 개수 는 $\boxed{(p+1)\times(q+1)\times(r+1)}$ 이다.

- 약수의 합 은 $\boxed{(a^0+a^1+a^2+\cdots+a^{p-1}+a^p)(b^0+b^1+\cdots b^q)(c^0+c^1+c^2+\cdots c^r)}$ 이다.

- 약수의 곱은 $\boxed{N^{\frac{\text{약수의 개수}}{2}}}$ 이다.

대칭성 때문이다. 예를 두 가지 보면 이해될 것이다.

곱하면 6이 됨

ex1) 6의 모든 약수의 곱: 1 2 3 6 → $\boxed{6^{\frac{4}{2}}}$

곱하면 6이 됨

ex2) 36의 모든 약수의 곱: 1 2 3 4 6 9 12 18 36 → $\boxed{(36)^{\frac{9}{2}}}$

## 〈※23. 평균변화율로 나타낼 수 없는 기울기 $f'(c)$〉 ~ 숏컷 2권 40번

- $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ 를 만족시키는 서로 다른 두 실수 $(a,b)$ 가 존재하지 않도록 하는 실수 **c**

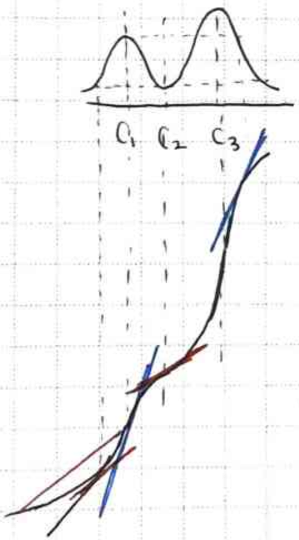
  $b-a \neq 0$, 나누기 가능.

- $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 인 a, b가 없다.

  ↳ Quiz
  - ① c는 $f'(x)$의 ~~극점의~~ x좌표 {~~f(x)의 변곡점의~~ x좌표}
  - ② c는 $\boxed{f'(x)\text{의 최대, 최소}}$의 x좌표. ★★★

- ① 극점일때 를 살펴보자.

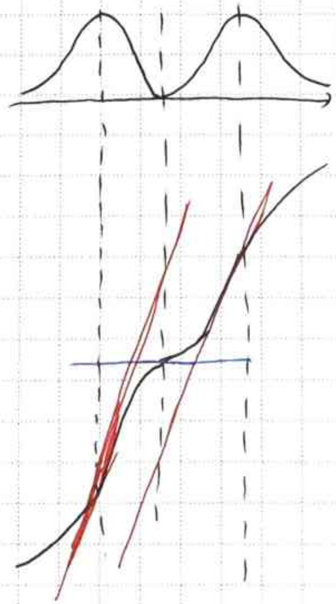
$f'$



$f$

↖ 유일하지 않아서 변곡점이 아니면서 접선의 기울기가 $f'(c_1)$인 점이 생겨나며, 그 점은 평균값 정리에 의해 조건을 만족하지 못한다.

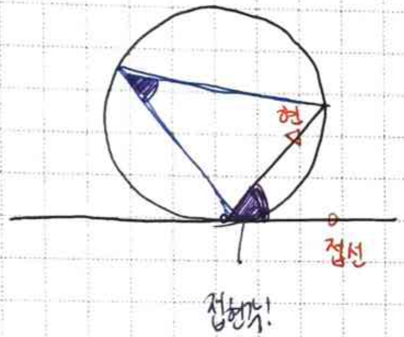
② 최대·최소일 때를 살펴보자



↖ 기울기가 / 이거나 — 인 접선은 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 로 표현이 불가능하다!

## 〈*24. 접현각좀 챙겨 씨발〉

• 접현각이란?

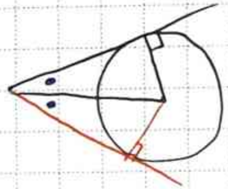



*원에 접선이 그어지면 두가지 행동을 하자

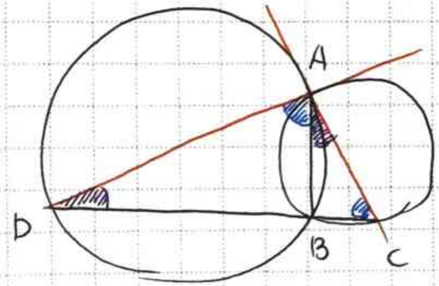
① 수직 긋기 from 원의중심

② ***$\boxed{\text{접현각}}$ 챙겨씨발

③ 새 부리 모양 만들기 + 각 이등분되는것 파악



• 응용 (공통현)

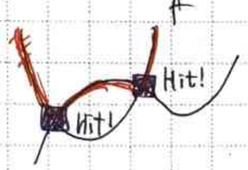



그러므로, △ADB, △ABC는 AA 닮음이 된다!

## 《※25. $f(x)g(x)$ Vs $f(x)$ – Min or Max》

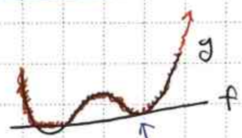
- 저 두 함수가 크기에 따라 (대소에 따라) 바뀐다.

ex) Max(f, g)




- 그렇다는 것은, 두 그래프의 교점에서 갈아탄다는 뜻
- 기준은 $f(x)g(x) = f(x)$ 일 때이므로 $f(x)\{g(x)-1\}$ 의 부호가 변할 때를 기준으로 삼는다.

(부호가 일정하면, 함수를 갈아타지 않는다는 것도 주의하자 → ex




Max (g, f)

(g-f-4) 부호변화 X → 갈아타지 않는다!!

- 그러므로, 여기서 중요한 것은 그래프를 그려 가시적으로 표현할 수 있는가? 이다
- 만약 그래프를 그릴 수 없는 상황이 나온다면, 아마도 두 식이 인수분해가 되기 때문일텐데, 그렇다면 다음처럼 해준다
- 부호가 중요하므로, $\left\{\begin{array}{l} f(x)\text{가 } 0 \text{ 되는 지점} \\ g(x)\text{가 } 1 \text{ 되는 지점} \end{array}\right\}$ 을 파악한 뒤, $f(g-1)$ 의 영인자 갯수를 통해 부호변화를 파악한다!

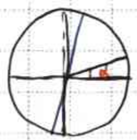
## ⟨※26. $\tan f(x) = \cot g(x)$⟩

• 함수를 그냥주기 싫을때, $\left| \begin{array}{l} \tan f(x) = \cot g(x) \\ \sin f(x) = \csc g(x) \end{array} \right|$ 등과 같이 삼각함수와 섞어서 준다. 이때,

$\boxed{\text{원래는 없던 미지수가 하나 생김}}$을 조심하자.

• 두가지 방법이 있다. ① 사전처리반 ② 사후처리반

① 사전처리반.

$\tan f(x) = \cot g(x)$ 를 만남 →  ∵ $\frac{2n+1}{2}\pi - \alpha$ 라는 것 캐치

즉. tan 과 cot 바꾸기 즉 $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$ 사용 $\boxed{\cot g(x) = \tan\left\{\frac{2n+1}{2}\pi - g(x)\right\}}$

∴ $f(x) = \frac{\boxed{2n+1}}{2}\pi - g(x)$ 없던 미지수 등장 (결정해주어야 함!)

② 사후처리반.

$\sin f(x) = \cos g(x)$ 있을때, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$. ⇝ $\frac{\pi}{2} - g(x) = f(x) + 2n\pi$

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin x$ $\quad \frac{\pi}{2} + g(x) = f(x) + + 2n\pi$ (∵ 주기 $= 2\pi$)

$\cot f(x) = \tan g(x)$ 있을때. $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$ ⇝ $\frac{\pi}{2} - f(x) = g(x) + n\pi$ (∵ 주기 $= n\pi$)

# 〈※27. 곱함수의 부호가 일정할 때〉

- 어떤 함수가 증가함수라고 하면, 함수 $\geq 0$ 이런식으로 함수의 대소를 둘거잖아?

- 그럴때, 그 함수가 곱함수면 문제내기 좋은 상황이 하나 생겨!

- (둘다 연속함수라고 가정하긴 할거야~)

$f(x)g(x) \geq 0$ 일때, 만약 $f(x)$의 부호가 $x=\alpha$에서 변한다면?

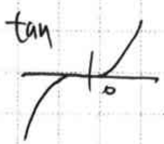
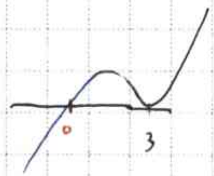
$\boxed{g(x)\text{의 부호도 } x=\alpha\text{에서 변하겠지?}}$

그때, $g(x)$에 $x=\alpha$를 넣어주면, 연속함수이므로 $\boxed{g(\alpha)=0\text{이 필연적으}}$로 성립해!

ex)

$f(x)$는 삼차함수, $f'(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가진다.

$h'(x) = (\tan x) \times f(x)$ 이고, $h(x)$가 실수전체에서 증가한다~

↳ $(\tan x) f(x) \geq 0$,  이므로, $f(x)=$  대충 이런 사실을 유추 가능하다!

# 〈※28. 적분부등식〉

- [전제] $\boxed{\begin{aligned} &|f(x)| + f(x) \geqq 0 \\ &|f(x)| - f(x) \geqq 0 \end{aligned}}$ 이다.

- $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 의 값이 제시되었는데, 그 값이 $\int_a^b f(x)\,dx$ 나, $-\int_a^b f(x)dx$ ( 이하 $\int_b^a f(x)dx$ ) 의 값과 같다면, 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

- If $\int_a^b |f(x)| = \int_a^b f(x)$ 라면 $\rightarrow$ $\int_a^b \{|f(x)| - f(x)\}\,dx = 0$ 일 것이다.

그런데 $|f(x)| - f(x) \geqq 0$ 이므로 항상 0보다 크거나 같은 (부호변화가 없는) 함수를 적분했는데

그 값이 0이 나오려면, 그 함수는 내내 0이여야 한다 ( ∵ 부호변화 無 )

즉, $[a, b]$ 라는 구간에서 $|f(x)| - f(x) = 0$ 이라는 정보가 나오고, 이는 곧 $\boxed{f(x) \geqq 0}$ at $[a, b]$ 라는 뜻이다.

부호정보 Get!

- If $\boxed{\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_b^a f(x)}$ $\rightarrow$ $\int_a^b \{|f(x)| + f(x)\}\,dx = 0$. $|f(x)| + f(x) \geqq 0$ 이므로, $\boxed{f(x) \leqq 0 \text{ at } [a, b]}$

## 〈※29. 매개변수의 이해〉

- $y=f(x)$를 $\begin{cases} x=g(t) \\ y=h(t) \end{cases}$ 로서 $t$로 매개할 수 있다. $f'(x)$는 $\dfrac{h'(t)}{g'(t)}$ 이다

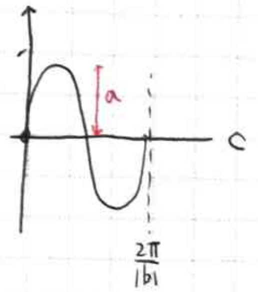
- $y=f^{-1}(x)$는 $\begin{cases} x=h(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 가 되며, $\{f^{-1}(x)\}'$는 $\dfrac{g'(t)}{h'(t)}$ 이다.

- $y=f(x)$가 $y=x$와 만난다는 것은 $g(t)=h(t)$를 의미한다.

- $y=f(x)$가 $y=2x-3$과 만난다는 것은. $h(t)=2g(t)-3$ 을 의미한다.

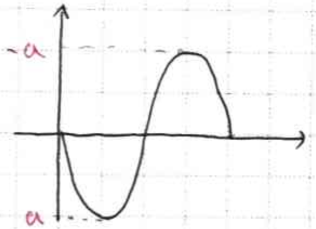
# ⟨※30. 삼각함수, 너의 반전⟩

- $a\sin bx + c$ 를 생각했을때



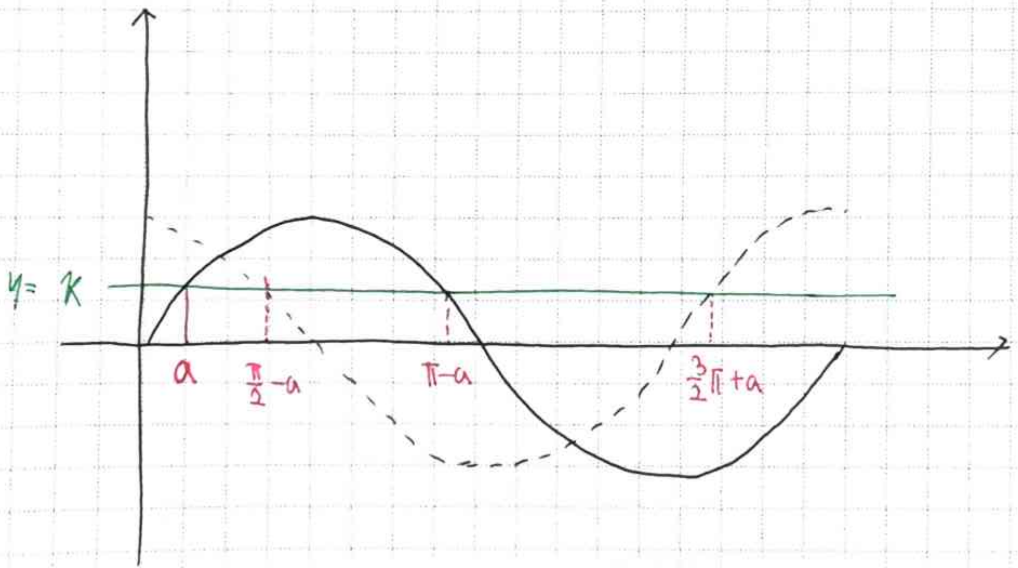

이렇게 그리기 일쑤이다. 그렇게 했을때 *가 꼬거나 더이상 진행이 안되면

- $a<0$ 인 상황을 꼭좀 보도록 하자.




어우 생소해 ㅋㅋ

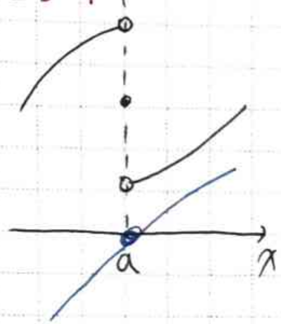
•




$\boxed{\text{a를 통해 나머지 좌표를 술술 쓸수 있어야 함!}}$

## 〈※3〉 불연속 × 연속 = 연속가능〉

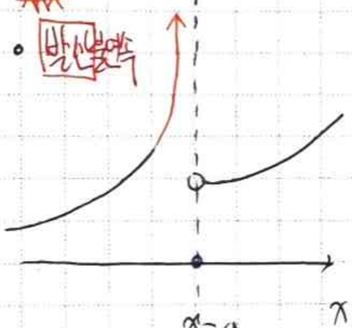
• 수렴불연속




→ $g(x)$가 $(x-a)$ 인수 1개만 가져도 OK

※※※

• 발산불연속




→ $\boxed{g(a)=0}$ 인 것은 확실하나,

→ $g(x)$에게 $\boxed{(x-a)\text{가 몇개 필요한지는 미지수}}$임

→ **[직접 부정형계산]** 해주어야.

# 〈※32. 평균변화율과 미분계수〉

• 미분계수의 정의! $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 정점 $= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - \boxed{f(a)}}{(a+h) - (a)}$ 정점.

↳ $\boxed{\text{한 정점}}$기준, 평균변화율, 그 극한의 값

if $x = a$ 에서 미분가능.

• $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 그림에도 분리하고 → $\cancel{\frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a-h) - f(a)}{h}\right]} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot f'(a)$

↳ ~~한정점~~

이렇게 계산하지 않는다! (맞긴 함)

$f'(a)$로 그냥 계산한다. 평균변화율의 극한으로서! (함수 $f$가 미분가능할때!)

$\frac{f(\Delta) - f(\square)}{\Delta - \square}$ 이면 무조건 $f'(\Delta)$으로 표현가능

---

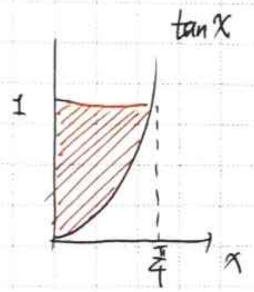
$\lim_{x \to 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{\frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4}} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

→ 이게 그냥 $f'(4)$이다 이거야

## ⟨#33. 계산을 익히기⟩

- $\tan\theta = t$ 일 때, $\int_0^1 \theta\,\boxed{dt}$ 를 구하여라

↳ $\theta$는 $t$에 종속. $\theta = f(t)$로 보면. $\tan f(t) = t$. $\therefore$ $f(t)$는 $\tan t$의 역함수.

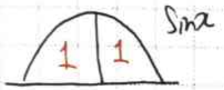



$$\therefore \int_0^1 \theta\,dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\tan x|\,dx$$

- $\tan\theta$ 적분 $\rightarrow$ $-\ln|\cos\theta| + C$
- $\boxed{\sec^2 x \text{ 적분}} \rightarrow \boxed{\tan x + C}$
- $\csc^2 x$ 적분 $\rightarrow$ $-\cot x + C$
- $1+\tan^2 x$ 적분 $=$ $\sec^2 x$ 적분 $\Rightarrow$ $\tan x + C$
- $\tan^3 x$ 적분 $= \int \tan x \cdot (\tan^2 x)\,dx = \int \tan x(\sec^2 x - 1) = \int \tan x \cdot \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx$

  ↓ 치환 ↓ 쌩적분

  $\frac{1}{2}(\tan x)^2 + \ln|\cos x| + C$
- $\ln x$ 적분 $= x\ln x - x + C$
- $\ln(x+a)$ 적분 $= (x+a)\ln(x+a) - (x+a) + C$

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- 

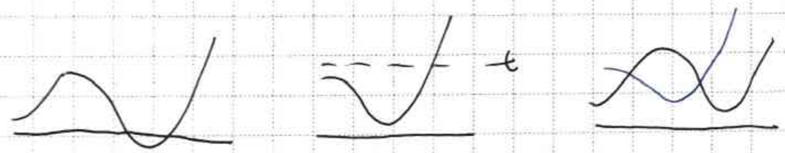


- $\frac{1}{\cos x}$ 적분 $\rightarrow \boxed{\frac{\times \cos x}{\times \cos x}} = \frac{\cos x}{1-\sin^3 x} \rightarrow \sin x = t$ 치환
  $(\cos x)dx = dt$
- '치환'
  $\cos^3 x$ 적분 $\rightarrow \cos^2 x \cdot \cos x \rightarrow (1-\sin^2 x)\cos x \rightarrow \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

⟨※34. 곡선과곡선 곡선과곡선 곡선과곡선은 직선과곡선 직선과곡선 직선과곡선 또는 상수와곡선 상수와곡선 상수와곡선 으로! ⟩

• ex) 두곡선 $\begin{cases} y = (2x^2+ax+2)e^x \\ y = xe^x + t \end{cases}$ 의 그래프가 $\boxed{\text{모든 양의실수 } t\text{에 대해 오직 한점에서만 만날때}}$

그 교점의 $x$좌표를 $f(t)$라고 ~.





← $\boxed{\text{이지랄하지말라는뜻}}$ ~

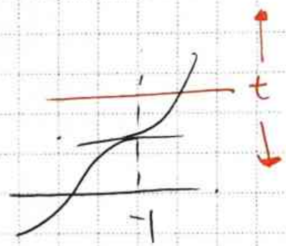
↳ $t$남기고 이항 ( $\boxed{\text{상수와곡선}}$ 으로! ) ※※※

$(2x^2+(a-1)x+2)e^x = t$.

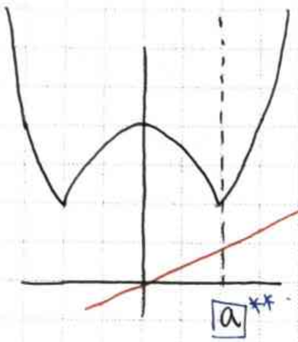
$f'$

$2x^2+(a+3)x+a+1$

$(x+1)(2x+a+1)$



## <※3차. 기울기 - 지점과 접점 사이>




$f(x) = |x^2 - a^2| + t$

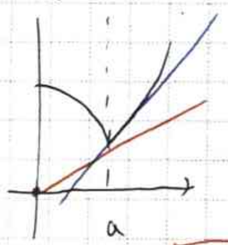
$g(x) = mx + 0$

일때. $f(x) \geq g(x)$ 이도록 하는 $m$중 최대를 찾는!

→ 느낌오겠지만, $m$은 $t$에 종속된변수이다. $m(t)$임.

• 기준! $m$의 크기와 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수를 비교! ( $\boxed{f'(a) = m \text{ 인 곳 기준}}$ )

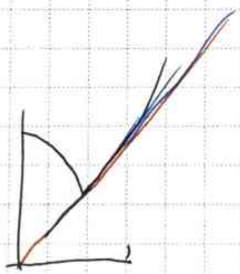
↳ <확대>

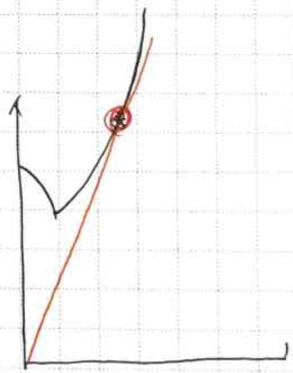



← 아직 $f'(a)$에겐 안된다.

$\boxed{m(t) = \frac{f(a)}{a}}$

[기준]





↳ $t$가 변함에따라 $m(t)$가 다른 식으로서 표현된다. 접점기준!

## ⟨※36. 새롭게 정의된 함수를 대할 때⟩

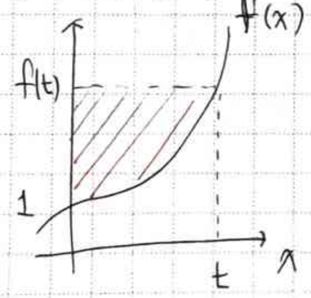
- 곡선 위의 점이 제시되면, 대입한다.
- 교점은, 대입한다

ex) $y=f(x)$와 $y=tx$ 의 접점의 $x$좌표를 $g(t)$라 하자

↳ 바~로 대입해서 항등식 GET!

↳ $f(g(t)) = t\,g(t)$

- 항등식이 뜨면, 미분해본다.
- $\frac{f(t+1)}{t+1} - \frac{f(t)}{t}$ 이따구꼴 뜨면 적분도 써가능
- $\frac{1}{2}\sec^2 f(t) + 3 = t$ 이런거 나오면 역함수로 인식한다
- $\sin f(t) = \sqrt{2t-1}$ 이런것도 역함수로 인식하는게 가능하긴 하당.
- (P는 상수인상태)



- $\int_0^t \{\boxed{f(t)} - f(x)\}\,dx$ 상수임...
- $\int_1^{f(t)} f^{-1}(x)\,dx$
- $t f(t) - \int_0^t f(x)\,dx$

( □ − ◺ )

# 〈※37. 확통 잡기술〉

- $1 \le a \le b \le c \le$      . 일때 (자연수임은 당연)

  $a+4 \le b+3 \le c+$      인 $(a, b, c, d)$ 순서쌍은?

→ 기찻길 줄세우기 로 해결

→ $a+1 \le b$
  $b+1 \le c$   이므로.
  $c+2 \le d$

구별되지않는

ⓟ∨ $\boxed{a}$ ⓠ∨ $\boxed{b}$ ⓡ∨ $\boxed{c}$ ⓢ∨ $\boxed{d}$ ⓣ∨ 를 두고, ∨ △를 8개 ($\square + \triangle = 12$)

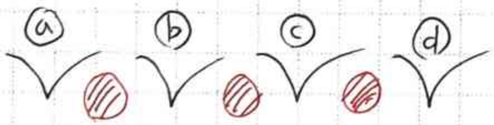
배치하되, 왼쪽 조건에 맞도록 △를 일부 미리 배분하고, 줄서있는 순서를 숫자 a, b, c, d 로 인식한다.

$a+1 \le b$ 이므로   ⓠ $\ge 0$
$b+1 \le c$ 이므로   ⓡ $\ge 0$
**$c+2 \le d$ 이므로   ⓢ $\ge 1$

$\longrightarrow$ ⓟ + ⓠ + ⓡ + ⓢ' + ⓣ $= 7$ $\rightarrow {}_5H_7$.

- 이웃하지 않도록 배치하기 의 HARD 버전

ex) 빨강 3개 노랑 4개 검정 5개 배열 하되, 빨강끼리는 이웃 X.



로 한뒤 중복조합 → ***노랑, 검정 구분없이 배열한후, 9개 중 노랑 4개를 뽑아준다

{중복조합 ...}

• 포함·배제 원리 잘 사용하기

ex) 같은종류의 빵 7개와 같은종류의 음료수 3개를 세 사람에게 남김없이 나누어 줄때 아무것도 받지 못하는 사람이 생기지 않도록 나누어주는 수는?

① 직접 세기 with 기준

기준은 '적은것'으로, 음료수로 하자

음료수가 $\left\{ \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right.$ 인 경우 나누고 빵을 중복조합처리

② 포함·배제원리

전체 − ( 두명 못 + 한명 못 )

$= 전체 - ({}_2H_7 \times {}_2H_3) + 3$

• abc

• 몇번

ex) a

나열

- $abc = 720$ 일때, $(a, b, c)$ 순서쌍

↳ $\boxed{\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \\ b &= 2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3} \\ c &= 2^{\gamma_1} \times 3^{\gamma_2} \times 5^{\gamma_3} \end{aligned}}$ 로 두고, $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$ 이므로, $\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 4 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 2 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 1 \end{aligned}}$ 를 푼다

- 몇번 변하는가 (바뀌는 moment 제한)

ex) $a$가 5개 $b$가 6개 있다. $a \frown b$로 바뀌는것을 "첸지" 라고 할때, "첸지"가 세번 일어나게 나열하는 방법수는?

$\boxed{a}$ ___ $\overset{2}{\frown}$ $b$ ___ $\overset{2}{\frown}$ $a$ ___ $\overset{3}{\frown}$ $b$ ___

$\boxed{b}$ ___ $a$ ___ $b$ ___ $a$ ___

$a$가들어갈자리 : 2
이미쓴 $a$ 개수 : 2
남은 $a$ 개수 : 3

$) \rightarrow {}_2H_3$    $b$도 마찬가지 $) \rightarrow {}_2H_3$

$\boxed{\text{머리가 다른 두 케이스}}$ 다 다뤄야함, 놓치지말자!

$\therefore\ 2 \times {}_2H_3 \times {}_2H_3$

• 주사위 네개, 최솟값과 최댓값이 정해져있을때 경우의수.

A: a, b, c, d → B: 1, 2, 3, 4, 5, 6

이렇게 집합간 함수로 표현.

ex) 최댓값 × 최솟값 ≥ 20

→ 4×5
4×6
5×5
5×6
6×6

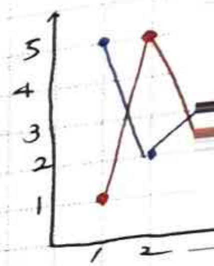
A: a, b, c, d → B': 4, 5, 6

$3^4 - \boxed{1}$

All for 4.

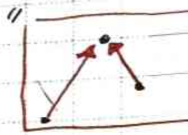
증감이 정해진지 [redacted]

ex) A={1, 2, 3 [redacted]



(빨간색 [redacted]

빨간색○

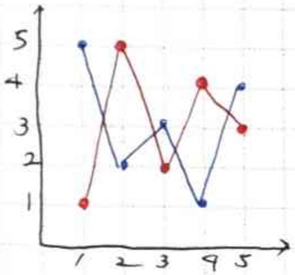


① {3

② { [redacted]

• 증감이 정해진채로 배열하기

ex) A={1, 2, 3, 4, 5} 를 증감이 3번 바뀌도록 배열하시오




← 이런식으로 배열해야할 텐데, 어떻게 하는것이 효율적일까

↳ $\boxed{\text{왕좌에 오를 조건}}$ 으로 처리한다!

(빨간색과 파란색의 경우가 대칭될 것이라는 것은 너무나 명확하다)

빨간색에서 맨 위에 오기 위한 $\boxed{\text{왕좌의 조건}}$은, $\boxed{\text{그대보다 작은 수가 두개 이상 있는가?}}$ 이다.

→ 맨 위에 1, 2는 아예 못오며, 대외적으로 {3, 4} 쌍은 {5} 때문에 못 들어간다.

① {3, 5}　5 . 3 .

"4"

1 2 ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ (4는 3 옆에는 못감)

→ 1. 2 배열 → 2 × 2 = 4

3, 5 배열

② {4, 5}　5 . 4 .

1 2 3 ~~4~~ ~~5~~

→ 1. 2. 3 배열 → 2 × 3! = 12

3, 4 배열

***

$\boxed{\text{대소정해진 중복조합}}$ (高난도 )

$ab \leq bc \leq cd$ (a b c d e 자연수)

$a+b+c+d+e=10$

$a \leq c$ , $b \leq d$

**

$c = a + x$ $(x \geq 0)$ 로 설정하는것!!

$d = b + y$ $(y \geq 0)$

• $f(f(x)) = x$ 가 되게 하려면

① 자자 *

② 번갈번갈 *

③ 섞섞 ***

이걸 놓쳤었음.

으로 나누어서 처리해준다.

ex)

$$X \xrightarrow{f} X$$

| X | X |
| --- | --- |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |

에서, $f(f(x)) = x$ 가 되도록 하는 $f(x)$의 개수는?

① 자자 → 자신이 자신에게 → 1가지

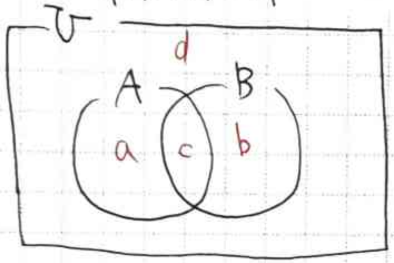
② 번갈번갈 → 번갈아서 서로를 찔러준다. → $\dfrac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{\boxed{3!}}$ **

③ 섞섞 * → 자자가 2개 (1쌍) 인 경우 → ${}_6C_2$ (자자선택) $\times \dfrac{{}_4C_2 \times {}_2C_2}{\boxed{2!}}$ (번갈번갈)

자자가 4개 (2쌍) 인 경우 → ${}_6C_4$ (자자선택) $\times 1$

• 집합 관련된 얘기가 나올 때: $\boxed{\text{U의 부분집합 중 선택한 것을 A, B라고 \sim}}$

$\{1,2,3,4\}$




이렇게 나누고, a, b, c, d 에 원소를 할당한다

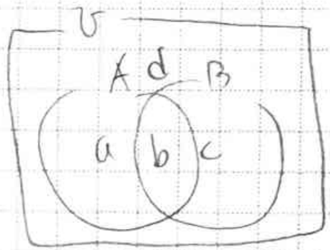
ex) A, B는 공집합이 아니다.

→ [a, c]가 비는것과 [b, c]가 비는 것, [a, b, c]가 비는 것을 전체에서 뺀다

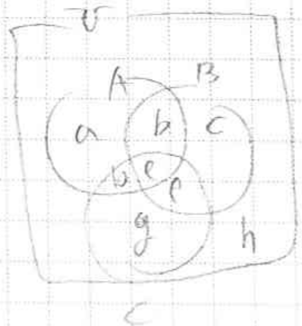
→ [d]에만 가는것, [b, d]에만 가는것, [a, d]에만 가는 것을 전체에서 뺀다.

→ $4\times4\times4\times4 - \left[1 + \left[2^4 - 1\right] + \left[2^4 - 1\right]\right]$

d에만 가는것이 중복됨




전체 − {d에만, ad에만, dc에만}




$8\times8\times6$ —

- $P(X=k) = {}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(X는 자유투 성공 횟수)

$\rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left( \boxed{(k+1)^2} \times P(X=k) \right) = ?$

얘 어떻게 처리할건데?

통계 기본공식.

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$$

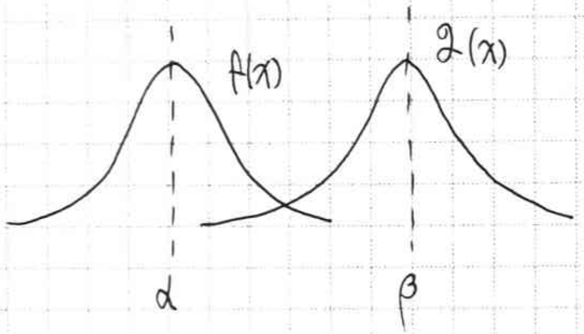
$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = E(X)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = E(X^2)$$

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | ⋯ | n |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | P(1) | P(2) | P(3) | P(4) | ⋯ | P(n) |

$= \sum_{k=1}^{n} k P(X=k)$

- 통계에서.



인데, 쉬운것 $f(k) = g(k) \rightarrow k = \frac{\alpha+\beta}{2}$

어려운것 $f(k) = g(r) \rightarrow |k-\alpha| = |\beta - r|$

범위생각하면서 풀어주면, 말이되는것은 오직하나!

- 앞/뒤 뒤집기 게임에서

↳ 상태가 변하는지/변하지 않는지 로 기준잡아야 함!

• 뭐 바로 다음에 뭐가 나오는 횟수가 정해져있는 순열

ex) H와 T 5개 중복허용 배열시, H 바로 다음에 T가 오는 경우가 한번만 있도록 배열하는 방법 수는?

↳ sol) $\boxed{\text{적절히 공간을 배치}}$ 후 중복조합을 $\boxed{\text{조건에 맞게}}$ 사용

공간을 적절히 배치하는 것이 가장 중요

조건에 따라 $x \ge 1$, $y \ge 0$ 이런거 잘 써줘야 함.

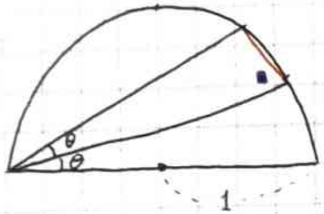
공간을 잘 배치함.

→ $\underset{x}{\underline{\quad T \quad}}\ \underset{y}{\underline{\quad H \quad}}\ \underset{z}{\underline{\quad T \quad}}\ \underset{w}{\underline{\quad H \quad}}$

$y \ge 1$
$z \ge 1$
$x, w \ge 0$

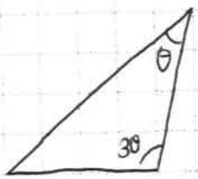
$x+y+z+w=5 \longrightarrow x+y'+z'+w=3 \rightarrow {}_4H_3 = 20.$

## 도형 Moment〉



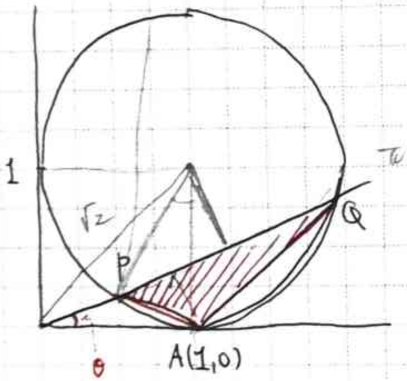

■ 를 어떻게 θ에 관해 표현할 것인가?

M.2



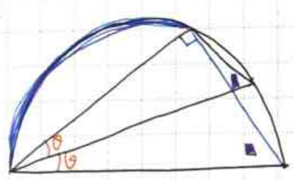

→ 세 변중 하나라도 알면 Game over

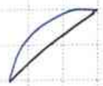
M3



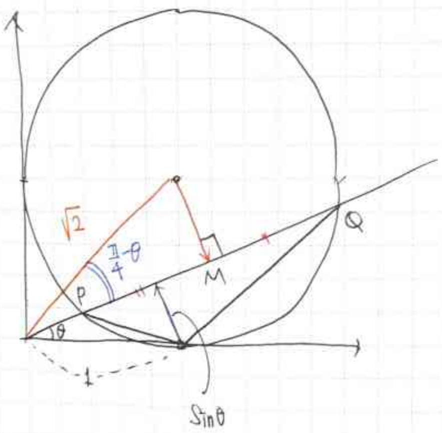

△PQA 를 어떻게 θ에 관해 표현할 것인가?

Answer 1




 =  의 원주각 = $\frac{\pi}{2} - 2\theta$

Answer 3




· $\frac{1}{2}\sin\theta ab$ → 포기

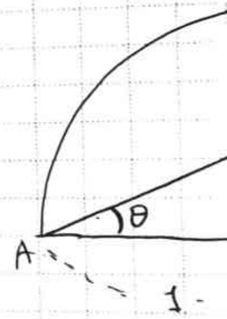
· 밑변×높이로 ㄱㄱ

· $\overline{PQ}$ 구하기위해 ← "현"이므로 중심에서 수직이등분선

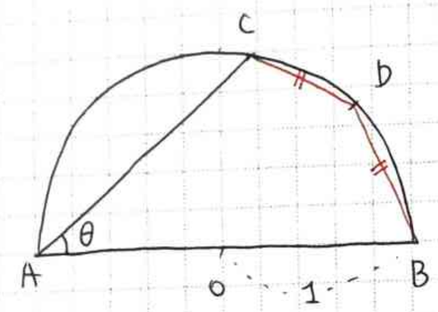
그후, 피타고라스 써서 $\overline{MQ}$ get!

M.4


**
M.5



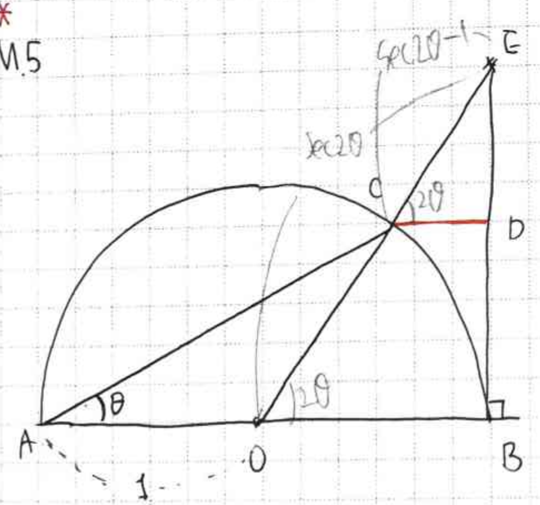
M.4




- $\overline{AC}$ ?
- $\angle COB$ ?
- $\overline{AD}$ ?
- $\overline{BD}$ ?
- $\overline{AC} \parallel \overline{OD}$ ?
- $\angle CAD$?

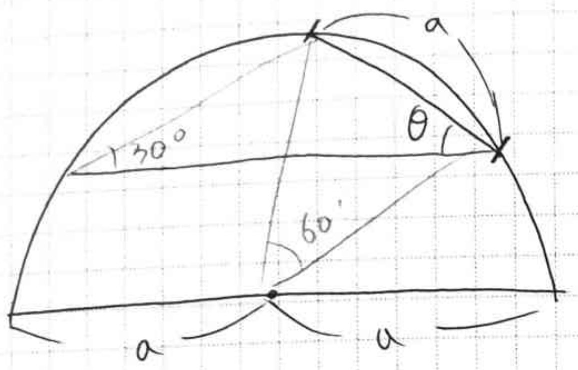
**

M.5




- $\overline{CD} = ?$

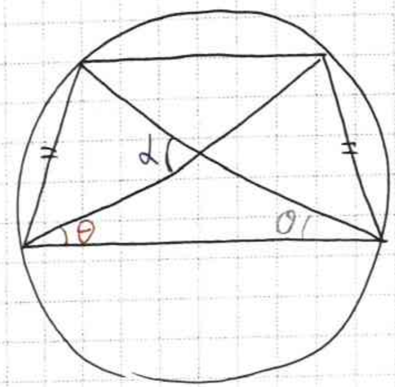
M5.




• 이때, 뭘 하고 싶죠?

정 △

M6.

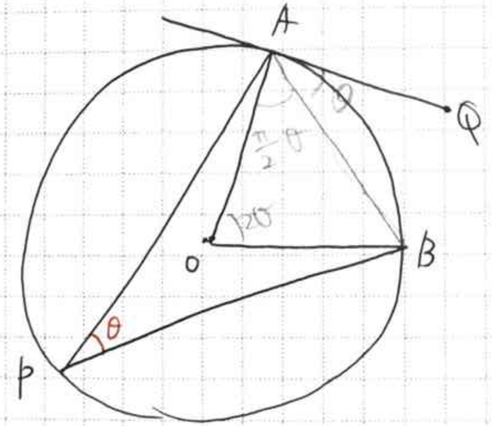



• α를 θ로 나타내시오!

2θ

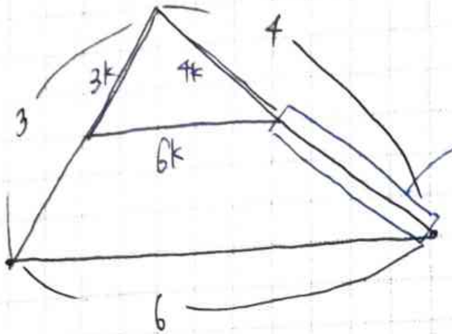
**

M.7 (원의 이등변삼각형 X 접선)



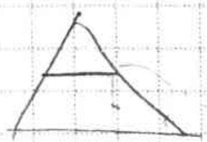

∠BAQ를 θ에 관해 나타내봅시다!

M.8 3각형의 세 변 길이 모두 알 때 쓸 수 있는 것 + 닮음

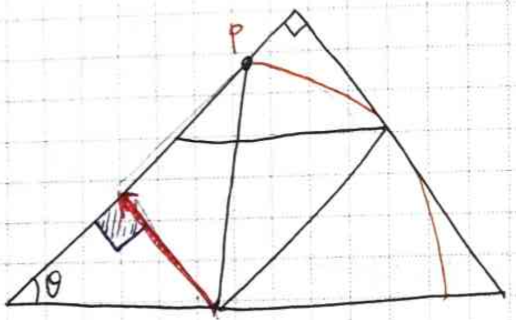



이 길이를 $\boxed{4(1-k)}$ 로 표현 가능함.

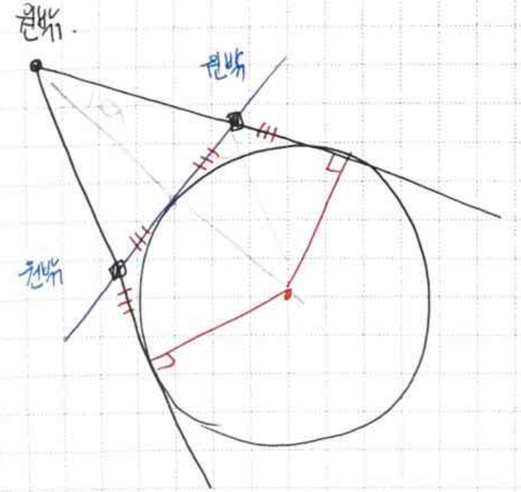
**

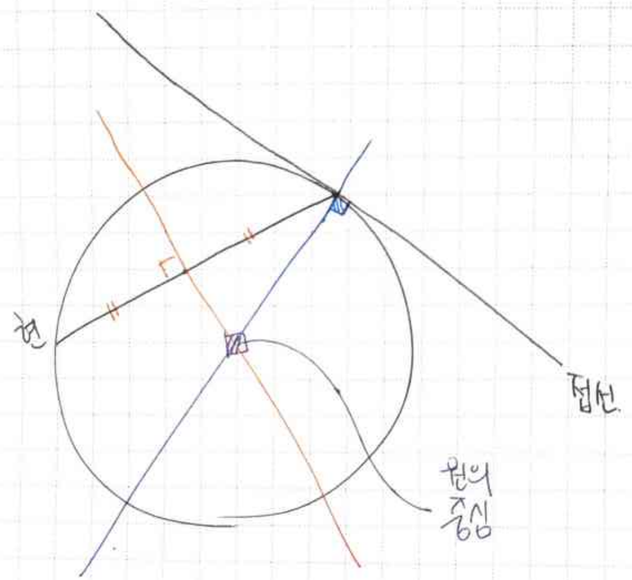


M.9

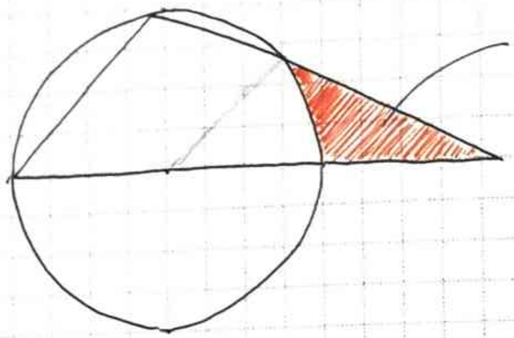



→ 원위의 점에 이름이 있고, 그 점을 직선이 지나면, 원의 중심에서 직선을 향해 수선의 발을 내린다.

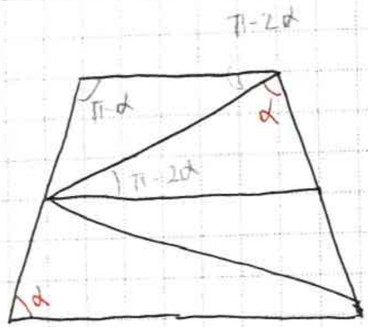


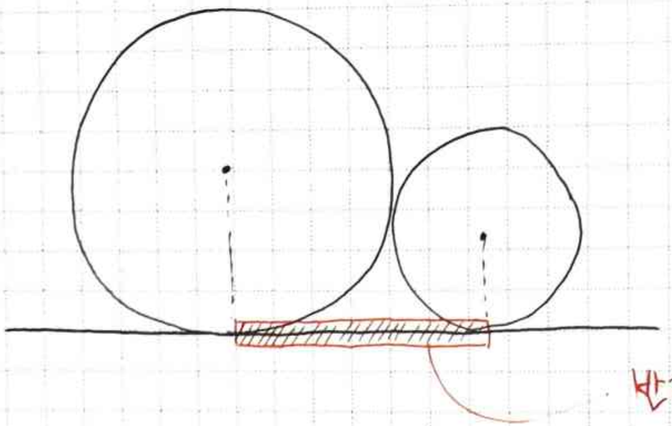

접선과 현의 수직이등분선의 교점은 원의 중심이다!



어떻게 구할 것?




각 하나를 표시한다면, 어디에 하고 싶은가?



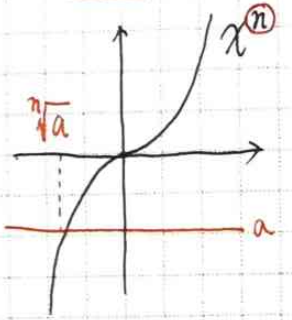
반지름 알면 여긴 그냥 먹는거임!

# (xx39. 자중하는것. $\sqrt[n]{\ }$ )

- "$\boxed{a\text{의 } n\text{제곱근}}$" 이란 말의 뜻은, $\boxed{n\text{제곱하여 } a\text{가 되는 수들의 집합}}$을 가리킨다.

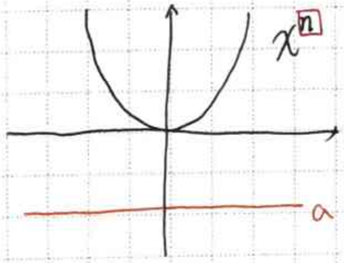
- $\boxed{a}$가 $\boxed{\text{음수인지 양수인지}}$ // $\boxed{n}$이 $\boxed{\text{홀수인지 짝수인지}}$가 중요하다.

- $\boxed{a\text{가 음수}}$ $\boxed{n\text{이 홀수}}$

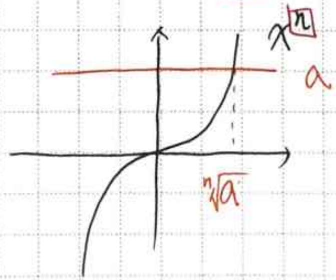



* 0개

$a$가 $\boxed{\text{음수}}$ $n$이 $\boxed{\text{짝수}}$

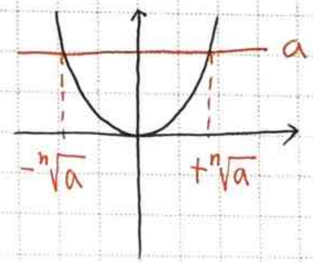



$a$가 $\boxed{\text{양수}}$ $n$이 $\boxed{\text{홀수}}$




** 2개

$a$가 양수 $n$이 짝수




- 그러므로, $\boxed{-n^2+9n-18\text{의 } n\text{제곱근의 개수}}$ 따위를 물으면, $\boxed{\text{대상의 음/양}}$, 지수의 홀/짝을 기준으로 구해준다.

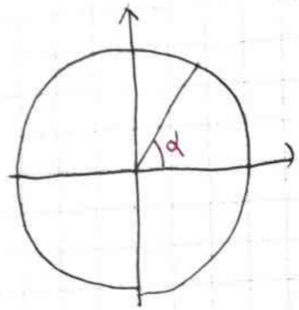
이것을 알기위해 $\boxed{\text{인수분해}}$ 등의 도구의 도움을 받을수 있다.

## 0. 지수·로그 행동강령〉

- '길이비', '내분' 등의 Keyword 가 나오면, 수선의 발을 긋는다
- $x$좌표 길이비 $\rightleftarrows$ $y$좌표 길이비 를 이용한다.
- $(x_1, y_1)$이 어떤 그래프 위를 지나면 대입해서 정리해놓는다.

ex) $\begin{cases} y_1 = 2^{-x_1} = 2x_1^2 - x_1 \\ y_2 = 2^{-x_2} = 2x_2^2 - x_2 \end{cases}$

## 〈 · $\sin p = \sin q$ 등등 〉



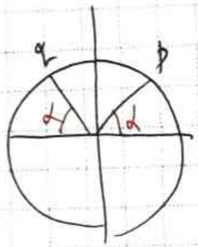

*** 가장중요한 idea

$\boxed{\text{예각 } \alpha}$ 와 함께 단위원에 표현만 해두면

어떤 연산을 해야할지 저절로 보인다!

$\sin p = \sin q$ 의 경우

- 동경이 일치 → $p - q = 2n\pi$
- y축 대칭 → $p + q = (2n+1)\pi$




$p = \boxed{2n}\pi + \boxed{\alpha}$ (* '짝수', **)

$q = \boxed{(2n+1)}\pi - \boxed{\alpha}$ (* 홀수, **)

뭔가 둘이 더하고싶지않니? $p + q = (2n+1)\pi$

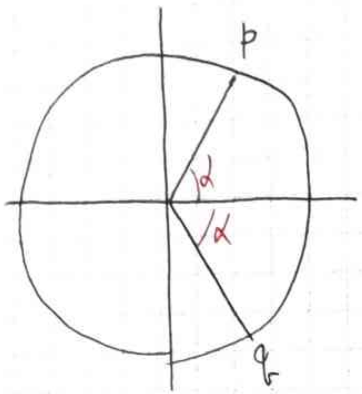
여기서 두 n은 같은 n이 아님

ex)

$\sin\left(\frac{5}{3}\pi + \alpha\right) = \sin\left(\frac{5}{3}\pi - \alpha\right)$

- $\left(\frac{5}{3}\pi + \alpha\right) + \left(\frac{5}{3}\pi - \alpha\right) = (2n+1)\pi$ (*)
- $\left(\frac{5}{3}\pi + \alpha\right) - \left(\frac{5}{3}\pi - \alpha\right) = 2n\pi$ $\therefore \alpha = n\pi$ (정수π)

• $\cos p = \cos q$

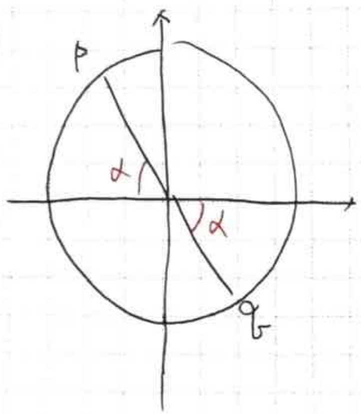



$\begin{cases} \cdot\ p - q = 2n\pi \\ \cdot\ p + q = \boxed{2n}\pi \end{cases}$

$p = \boxed{2n}\pi + \boxed{\alpha}$
$q = \boxed{2n}\pi - \boxed{\alpha}$

뭔가 둘이 더하고싶지않아?

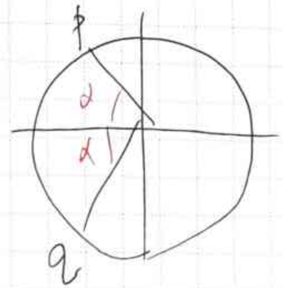
$\sin p = -\sin q$




• $p = 2n\pi - \alpha$
$q = (2n+1)\pi - \alpha$

뭔가 빼고싶지않아?

$\begin{cases} \cdot\ p - q = (2n+1)\pi \\ \cdot\ p + q = 2n\pi \end{cases}$



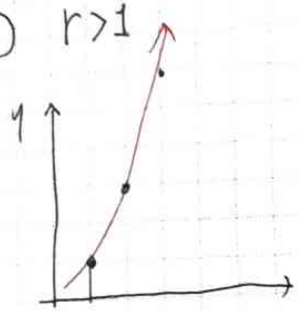

$p = (2n+1)\pi - \alpha$
$q = (2n+1)\pi + \alpha$

더하고싶지?

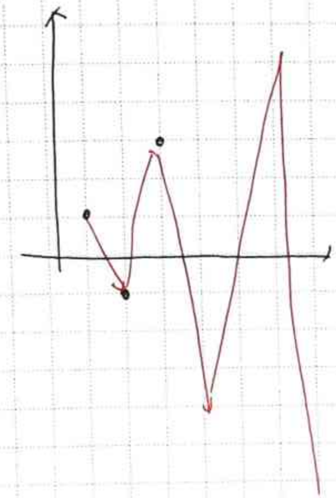
## 〈#42. 등비급수의 4가지 유형〉

- $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이라고 생각.

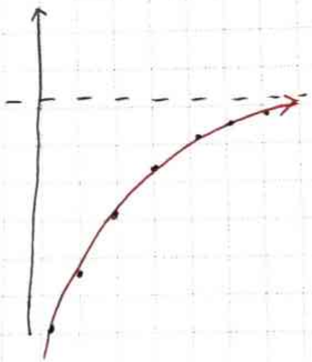
① $r > 1$



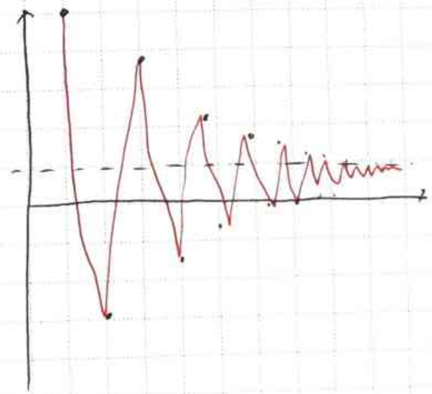

② $r < -1$



③ $0 < r < 1$



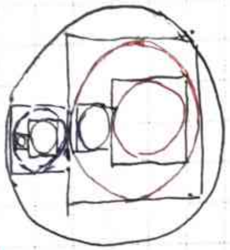

④ $-1 < r < 0$



## 〈※45. 등등비비급수〉

• 공비가 다른 두 닮음도형으로 퍼져나가는 등비급수 문제를 해결할 때 쓰는 개념이다.

ex)



◯ 와 ◯ 의 공비가 다르다!!

***

sol) $\boxed{\dfrac{S_1}{1-(\text{공비} \boxed{+} \text{공비})}}$

****!!

더하기임!

Why?

a : 공비1

b : 공비2 라고 해보면. 무등비는 결국

$$S_1 + \left[S_1 \times a + S_1 \times b\right] + \left\{\left[S_1 \times a^2 + S_1 \times ab\right] + \left[S_1 \times ba + S_1 b^2\right]\right\} \cdots$$ 이다.

즉, $S_1 + S_1(a+b) + S_1(a+b)(a+b) + S_1(a+b)(a+b)(a+b) + \cdots$

$= S_1 + S_1(a+b) + S_1(a+b)^2 + S_1(a+b)^3 + \cdots$

*

$= \boxed{\dfrac{S_1}{1-(a+b)}}$

## • 대칭적분과 평행이동적분의 일반화

구간과 함수에 가해지는 부호가 반대

• 평행이동 적분은, 방향이 반대라는 것만 명심하면서 쓰자. ★★★★★ ($\boxed{\text{위아래 안바뀜}}$)

ex) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k)\,dx$

$\displaystyle = \int_{a-k}^{b-k} f(x+k)\,dx$

마찬가지로,

* 항상 역주행이 중요하지요.

$\displaystyle\int_{a+k}^{b+k} f(x)\,dx \xrightarrow{-k,\ +k} \int_a^b f(x+k)\,dx$

$\displaystyle\int_{a-k}^{b-k} f(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x-k)\,dx$

• 대칭이동 적분은 기계화하자. ★★★★★★★★★ ($\boxed{\text{위아래 바뀜}}$)

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow \int_{2m-b}^{2m-a} f(2m-x)\,dx$

〈정주행〉

마찬가지로 $\displaystyle\int_a^b f(2m-x)\,dx = \int_{2m-b}^{2m-a} f(x)\,dx$

〈역주행〉

• 억지로 (구간의 중앙이 아니더라도) 얼마든지 대칭 가능.

$\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,dx \longrightarrow \int_{-1}^{5} f(4-x)\,dx$

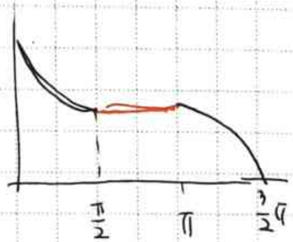
$\displaystyle\int_3^7 f(5-x)\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx.$

$\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+\frac{\pi}{4}} f(2\alpha-x)\,dx = \int_{\alpha-\frac{\pi}{4}}^{\alpha} f(x)\,dx$

# 〈#47. 구간별 적분〉

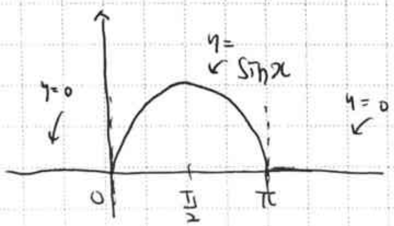
- 묻는것이 $\boxed{\text{상수구간의 적분값}}$ 일때 많이 이용된다.
- 얼핏 보면 복잡해보이는 함수를, 발문에서 묻는 정적분의 정의역 내의 구간으로 서로 다르게 정의되는 피적분함수를 잘라 적분한다.

ex) $\int_0^{3\pi} g(x)\,dx$ 를 구하여라 → $g(x) = \begin{cases} (1-x)^2 & (0 \le x \le \frac{\pi}{2}) \\ h(x) & (\frac{\pi}{2} \le x \le \pi) \\ -\cos x & (\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$ →




($g(x)$는 미분가능, $g'(x) \le 0$)

ex) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,dx$를 구하여라 → $g(x) = \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\,dt$, $f(t) =$




↳ 길이가 $\frac{\pi}{2}$인 막대기를 정의역에다 대고 움직인다. $\frac{\pi}{2}$

↳ $g(x) = \begin{cases} \int_0^{x} \sin t\,dt & (0 \le x \le \frac{\pi}{2}) \\ \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{x} (\sin t)\,dt & (\frac{\pi}{2} \le x \le \pi) \\ \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin t)\,dt & (\pi \le x) \end{cases}$

← 지금은 $x \ge \pi$인 부분이 "0" 이라 간단 했지만 앞뒤로 다른 함수가 더 나오면 얼마든지 복잡해질 여지가 있다.

## ⟨#49. $\lim_{x\to k}\left\{\lim_{t\to x} f(t)\right\}$⟩

$$g(x)=\begin{cases} f(2a-x) & (x\le 0) \\ \lim_{t\to x}\dfrac{f(t)}{2\ln t-\ln a} & (x\ge 0)\end{cases}$$

이고 $f(x)$는 $x^3$~ $a>0$ 일때 $g(x)$는 실전미가

연속조건

(i) $f(2a)=\lim_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{2\ln t-\ln a}=\dfrac{상수}{-\infty}=0$. $\therefore f(2a)=0$

(ii) $g(\sqrt{a})$ 검토 $\to \lim_{t\to\sqrt{a}}\dfrac{f(t)}{2\ln\sqrt{a}-\ln a}$ 수렴 필요 $\to f(\sqrt{a})=0$.

미분가능조건

(iii) $-f'(+2a)=\boxed{g'(0+)}$

$\dfrac{f(t)}{2\ln t-\ln a}=h(t)$라고 두면

$h$는 $t\neq 0$, $t\neq\sqrt{a}$ 에서 연속이므로 극한 = 함수

$g(0)=f(2a)=0$

분모가 0으로 감 ( $\lim_{x\to 0} x\ln x=0$ )

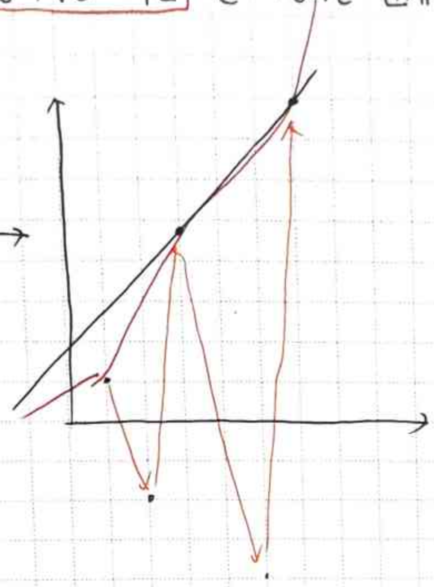
$\lim_{h\to 0} f(h)$ 도 0 임 $\therefore f(0)=0$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\boxed{g(h)}-g(0)}{h} \quad \therefore \lim_{h\to 0+}\frac{\boxed{\lim_{t\to h}\frac{f(t)}{2\ln t-\ln a}}}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{f(h)}{\boxed{h(2\ln h-\ln a)}} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot\frac{1}{2\ln x-\ln a} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(0)}{2\ln h-\ln a}=\frac{상수}{-\infty}=0$$

# 〈#50. 등차수열의 다양한 표현〉

- 등차수열 문제인데 막막하고 숨막히면 웬만해서는 등차수열 = 직선 을 이용하는 문제이다.

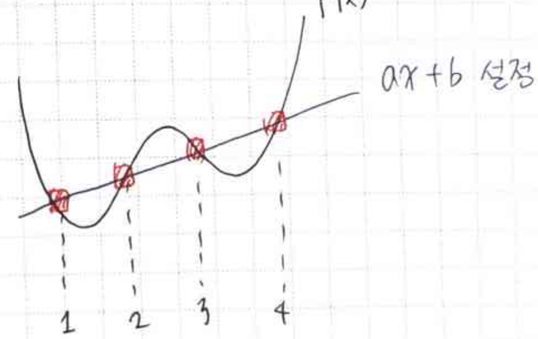
- $\langle a_n \rangle$ 등차수열 $\langle b_n \rangle$ 공비가 음수인 등비수열
  $\langle a_n \rangle = \langle b_n \rangle$ 인 경우 →



⇒ 양쪽 지수함수와 직선의 교점

- $F(x)$ → 4차함수.
  $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$가 순서대로 등차수열을 이룰 경우

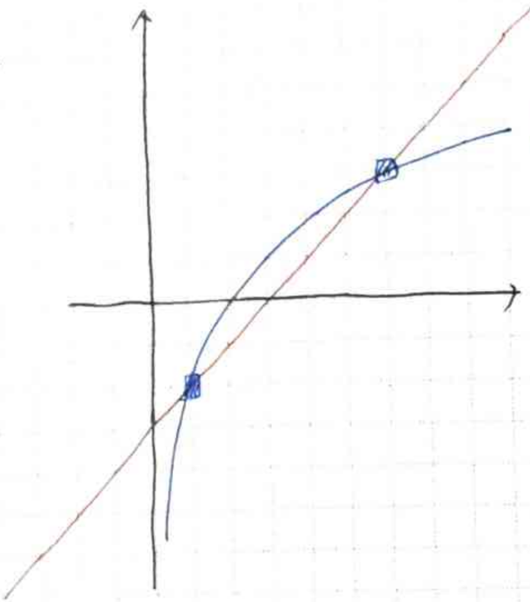
  *** ⇒ 다항함수의 함숫값들이 등차수열을 이룰 경우




→ $F(x) - \{ax+b\} = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

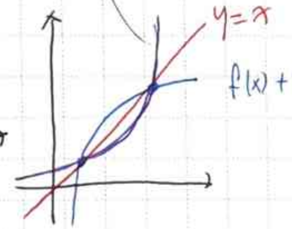
등등으로 식세우기 가능!

## 〈#51. 지수로그함수의 교점이 기울기가 1인 직선 위에 있을때!〉




$g(x) = \boxed{a \times 2^x + b}$ 라고 할때, $f(x), g(x)$는 $y=x-3$ 위의 두 점 A, B에서 만난다!

a와 b의 값은?




$f(x)+3 = \log_2(x+6) - 5 + 3$

$= \boxed{\log_2(x+6) - 2}$

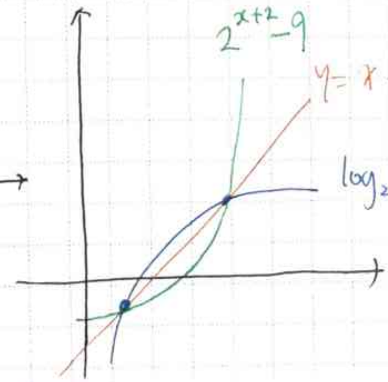
이차식의 역함수 ⇒ $2^{x+2}-6$

$\boxed{y=x-3\text{을 위로 3칸 옮겨주고}}$ $f(x)$도 함께 옮겨주면

이거 ~~XXX~~ 배웠으면 쿨일남

$2^{x+2}-6$

을 다시 $\boxed{\text{아래로 3칸}}$ 옮겨주면 →




∴ $a=4$

$b=-9$

# 〈#52. 합이 $\pi$인 두 각〉

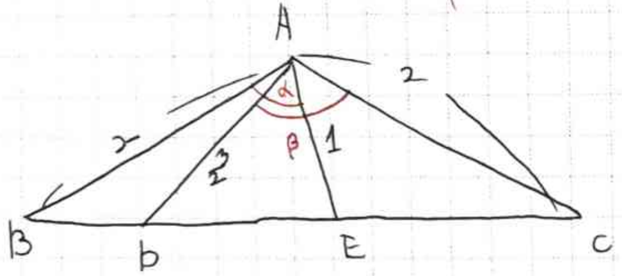
① $\alpha+\beta=\pi$ 라는것은

$\beta=\pi-\alpha$ 임을 의미한다

② 사인값이 같음을 통해 사인법칙을 이용하여 유의미한 식을 끌어낸다

③ 코사인의 부호가 반대임을 이용해 코사인법칙으로 유의미한 식을 끌어낸다.

유제) $\alpha+\beta=\pi$ 일때, $\overline{BE}$ 는?



#>

## 〈#53 수학적 귀납법〉

- 정순↓으로 잘 안풀릴 땐 $\boxed{\text{역순}\uparrow}$ 으로!

- 중간중간 있는 등호 뛰어넘을 줄 아는 능력도 중요!

# <#54. 미분가능성 총정리>

- 절댓값 함수의 미분가능성

$|f(x)| \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(\alpha)=0 \text{ 이면} \\ f'(\alpha)=0 \end{array}}$

$|f(x)-g(x)| \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(a)=g(a) \text{ 이면} \\ f'(a)=g'(a) \end{array}}$

[Tip] $|f(x)-g(x)|$ 꼴은, $|\underbrace{\boxed{f(x)-g_1(x)}}_{\text{하나의 곡선}} - \underbrace{\boxed{g_2(x)}}_{\text{직선}}|$ 꼴로 찢어서 보는게 더 편할 가능성 높다.

- 빼기함수의 미분가능성

(미가) − (미가) ⟶ 미가

(미가) − (미불) ⟶ 미불

(미불) − (미불) ⟶ 모름

이것의 '역'이 핵심이다.

*** 핵심

□가 $x=\alpha$, $x=\beta$ 에서 "미불" ← 둘을 합치면

□ − ($x=\alpha$, $x=\beta$ 에서 미불) ⟶ 미·가

[Tip] 모든 구간에서 미분 불가능한 것이 절대로 아니다.

미분 불가능할만한 불가능 의심점을 찾아내 쪼개는것이 중요한데

미분 불가능할만한 점을 $\boxed{\text{찾아내는 것 자체가 실력}}$이다.

- 곱함수의 미분가능성

$(f \times g)' \longrightarrow f \times g' + f' \times g$ 인데,

$g'$이 $x=\alpha$에서 말썽이라 치면

$$\boxed{\begin{array}{ll} x \to \alpha- & f(\alpha-)g'(\alpha-) + f'(\alpha-)g(\alpha-) \\ x \to \alpha+ & f(\alpha+)g'(\alpha+) + f'(\alpha+)g(\alpha+) \end{array}}$$

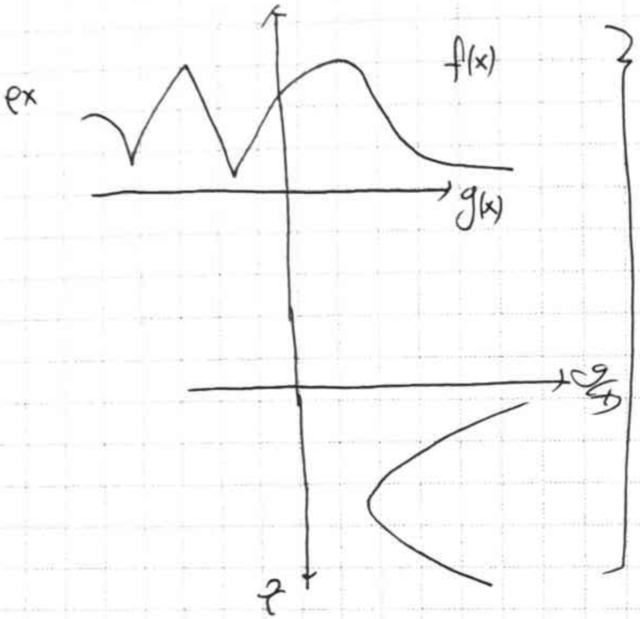
가 같음을 보이면 된다.

• 합성함수의 미분가능성.

* 특별한 CASE 를 먼저 살펴보자.

"겉함수가 미불인데 속함수의 치역이 겉함수의 미불점을 안지날때" 가 특별 CASE 이다.

ex




인 $f(g(x))$는 f가 미불가점이 지났고 g가 $g'=0$ 으로서 해결해주지 않지만, 애초에 g의 치역이 그 미불가점을 만드는 f의 정의역을 지나지 않으므로 미분가능하다.

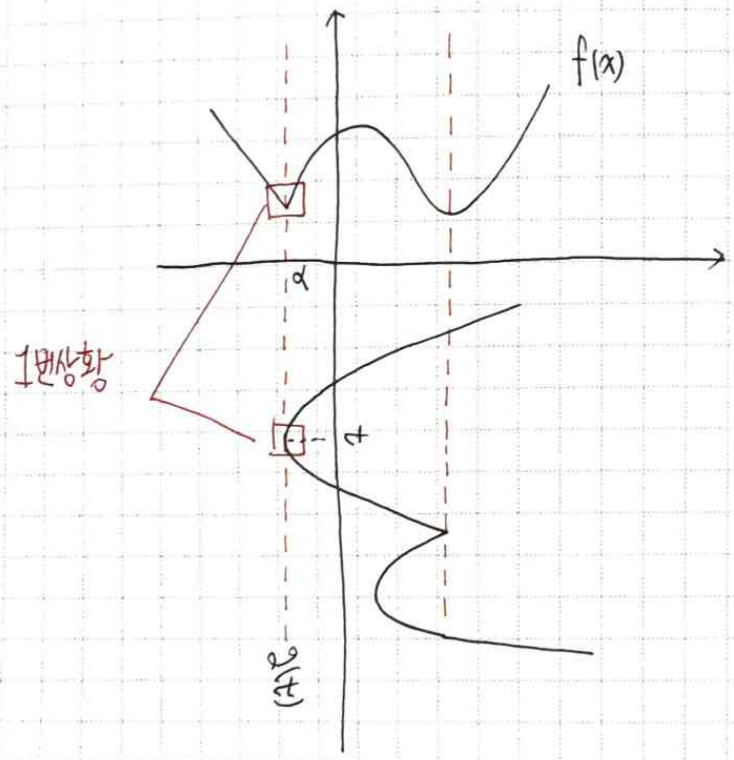
• 합성함수의 미분가능성

$f(g(x)) \xrightarrow{\ '\ } = f'(g(x))\,g'(x)$

**

$\boxed{①}$ $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미불 → $g(t)=\alpha$인 $x=t$에서 $g'(t)$가 0임

② $g(x)$가 $x=\beta$에서 미불 → $f'(g(\beta))$가 0임!



# <#55. 이산확률분포>

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\cdots$ | $p_n$ |

$\sum p_i = 1$

$\sum x_i p_i = E(X)$.

"평균"

$\sum \square p_i$ = "~의 평균"

~의

$\sum x_i p_i$ = $x_i$의 평균

$\sum (x_i - m)^2 p_i$ = 편차$^2$의 평균 = 분산.

$= \sum (x_i^2 - 2m x_i + m^2) p_i$

$= \boxed{\sum x_i^2 p_i} - 2m \sum x_i p_i + m^2 \sum p_i$

$x_i^2$의 평균. $\quad -2m^2 \quad\quad 1$

$E(Y = \boxed{\phantom{xx}}) = E(X = i)$ 꼴 이면

$\boxed{\phantom{xx}}$를 양변에 곱해주고 $\sum$ 취한다!

~~E(2~~

$P(Y = 2k+1)$ 이면

$E(Y)$는 $\sum (2k+1) P(Y = 2k+1)$

이다!

---

$P(Y = 2i-1) = a(P(X=i)) + a \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$

이고 $E(X) = \frac{10}{3}$ 일때 $E(9Y) = ?$

$E(Y) = \sum_{1}^{5} (2i-1) P(Y = 2i-1) = \sum_{1}^{5} (2i-1)\{a \times P(X=i) + a\} = \frac{92}{3} a$.

확률총합 $= 1 \rightsquigarrow 1 = a + 5a$ (양변 $\sum_{1}^{5}$ 한것) $\therefore a = \frac{1}{6}$

뒷페이지에

심화

결국 이해해야 할것은 변수가 바뀔때 / 안바뀔 대가

양상이 다르다는 것이다!

($k = 1, 2, 3, 4, 5$ 가정)

$E(2X+1) = 2E(X) + 1$ (변수 안바뀜)

$\hookrightarrow E(2X+1) = \sum_{k=1}^{5} (2k+1)P(X=k) = \sum 2kP(X=k) + P(X=k) = 2E(X)+1$

$E(2^X) = \sum_{k=1}^{5} 2^k \boxed{P(X=k)}$

확률은 그대로

(변수안바뀜)

그냥박고

$\ast$ Y라는 다른 변수의 도입, (이때의 확률도 달리 정의될 때)

$\ast\ast$

$\ast\ast$

$Y = 2X+1$ 이딴거 말고

$P(Y=2k-1) = E(X=k)$

이런거

$P(Y=2k-1) = E(X=k)$

$E(Y) = \sum_{k=1}^{5}(2k-1)P(Y=2k-1) = $ "$E(Y)$"임.

| Y | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $P(Y=y)$ | $P(Y=1)$ | $P(Y=3)$ | $P(Y=5)$ | $P(Y=7)$ | $P(Y=9)$ |

임. 문제 없지?

〈#56. $f(x)=$

$\cdot\ f(x) = f($

$t = \alpha$ (

$g(t$

극점의 $x$좌표

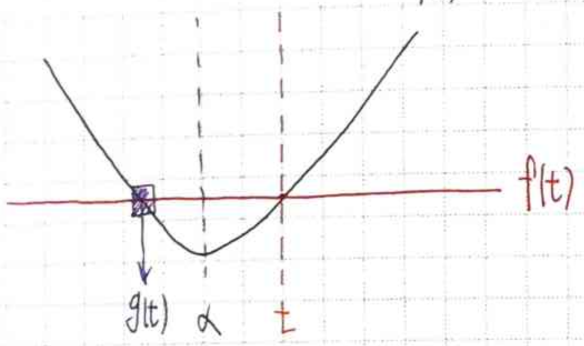
$f($

역함수

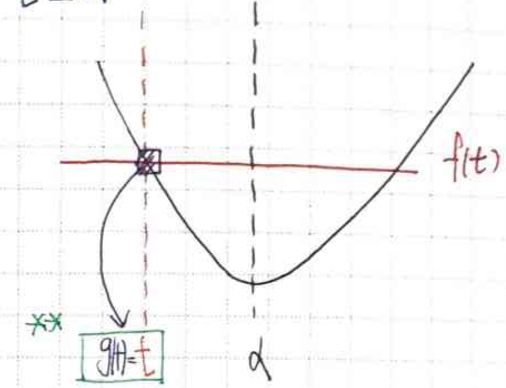
# ⟨#56. $f(x)=f(t)$의 근 $g(t)$⟩

· $f(x) = f(t)$의 근의 최솟값 / 최댓값 을 $g(t)$라고 정의하는 경우가 많다. "극점의 $x$좌표를 기준삼는다"

$t \geq \alpha$ ($\alpha$=극점의 $x$좌표)




$t \leq \alpha$




극점의 $x$좌표보다 $t$가 큰지 - 작은지에 따라서

↳ $g(t) = t$ ($y=x$ 함수)

or

$\boxed{f(g(t)) = f(t)}$ (풀지 못할 가능성이 높으나, 미분계수나 함숫값 정도는 알아낼 수 있는 식)

역함수관계 아님!!

역 : $f(g(t)) = t$

역함수 : $f(g(t)) = f(t)$

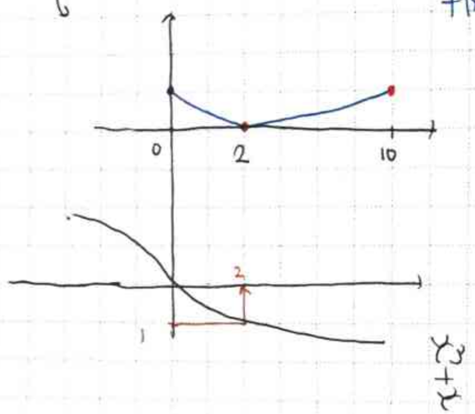
# 〈#57. 합성했는데 결과가 Named 함수〉

- 합성의 "결과"로서 Named 가 갑자기 튀어나오는 경우가 있다!
  - ↳ 전부다 그릴생각 X
  - ↳ 특정 개형, 증감 정도만 판단 with 회전
  - ↳ 일부점, 일부 미분계수만 빼먹겠다는 생각 갖고 접근하기

ex)

$f(x^3+x) = \boxed{(x-1)^2}$

〈Named〉




$x=1 \rightarrow f(2)=0$

$x=2 \rightarrow f(10)=1$

$x=0 \rightarrow f(0)=1$

$f'(x^3+x)\cdot(3x^2+1) = 2(x-1)$

$x=1 \rightarrow f'(2)\cdot 4 = 0$

$x=2 \rightarrow f'(10)\cdot 13 = 2$

$x=0 \rightarrow f'(0) = -2$

우리 이런거 하라는 얘기.

# 〈#58. 근호와 절댓값〉

절댓값 : 홀수차수 때문

$\sqrt{|x^n|}$ 꼴의 미분가능성
- ① 정의
- ② 도함수극한

① 절댓값에 $\boxed{\text{집어넣기}}$

$x \to |x| \quad (x \geq 0)$

$x \to -|x| \quad (x \leq 0)$

② 근호안에 집어넣기

$7 \to \sqrt{7^2} \quad (x \geq 0) \quad \to \quad a \to \sqrt{a^2} \quad (a \geq 0)$

$(-7) \to -\sqrt{(-7)^2} \quad (x \leq 0) \qquad a \to -\sqrt{a^2} \quad (a \leq 0)$

③ 근호 안에서 빼내기

$\sqrt{a^2} \to a \quad (a \geq 0)$

$\sqrt{a^2} \to -a \quad (a \boxed{\leq 0})$ *

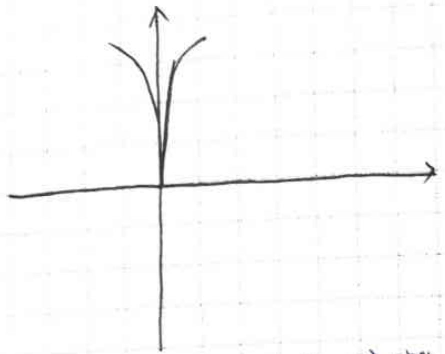
$\xrightarrow{ex)}$ ($a = \sin x$ 라고 생각)

$\lim_{x \to 0+} \sqrt{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0+} \sin x \quad (\sin x \geq 0)$

$\lim_{x \to 0-} \sqrt{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0-} -\sin x \quad (\sin x \leq 0)$

본론 → 근호함수의 $\boxed{\text{차수}}$에 따른 $\boxed{\text{미분가능성}}$

① $\sqrt{|(x)^1|}$ → 발산



$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{|x|}}{x} = +\sqrt{\frac{|x|}{x^2}} \to \frac{1}{0} \to \infty$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\sqrt{\frac{|x|}{x^2}} \to -\frac{1}{0} \to -\infty$$

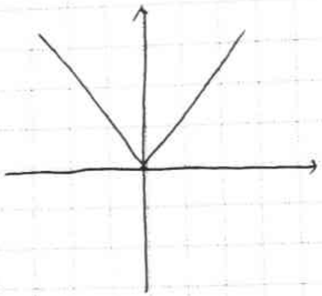
발산.

**결론**

**근호안이 3차이상 → 미분가능하다!**

② $\sqrt{|x^2|}$ → 수렴하지 않음.

물론 짝수차수일 경우 근호 안의 절댓값은 불필요..

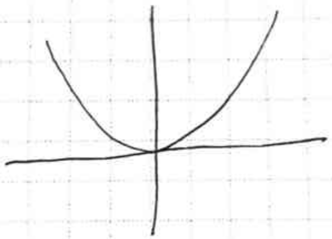


$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{|x^2|}}{x} = \lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to0-} - \sqrt{\frac{x^2}{x^2}} = -1$$

다름, 미분불가능

③ $\sqrt{|x^3|}$ → 미분가능!



$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{|x^3|}}{x} = \lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{x^3}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{|x^3|}}{x} = \lim_{x\to0-} -\sqrt{\frac{x^3}{x^2}} = 0$$

결국 0으로, 미분가능!

## <#59. K-focused 다항함수>

$g(x)$ 라는 다항함수의 조건식이

$g(k) = a$
$g'(k) = b$ 이딴식으로, 문자를 대입해 나오는 경우

식을 작성할 때

$p(x-k)^2 + q(x-k) + r$ 이런 식으로 작성할 것!

이때, $2p = g''(k)$ $q = g'(k)$ $r = g(k)$ 가 된다

이부분, 계수조절 조심!

# 〈#60. 이항분포, 독립시행〉

- 이항분포의 개념

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 \cdots {}_nC_k\, a^{n-k} b^k \cdots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \cdot b^k$$ ← 0부터 시작한다는것 매우 중요

- 문제는 어떤 식으로?

① 역시, 역주행

$\boxed{\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^k b^{n-k}}$ 를 보고 $\boxed{(a+b)^n}$ 과 동치임을 알아야 함.

② 의문의 $\triangle^k$ 의 침투

ex) $X \sim B(100, \frac{1}{4})$ 을 따를 때

$E(2^X)$ 의 값은?

**중요

$$E(2^X) = \sum_{k=0}^{100} 2^k \times {}_{100}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{100-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{100} {}_{100}C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{100-k}$$

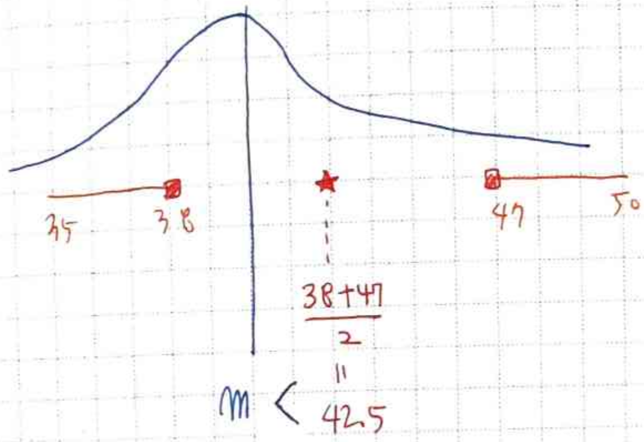
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^{100}$$

# 〈#61. 확률밀도함수〉

· 구간길이가 일정하고, 평균에 정수조건, 자연수조건 등이 있을때는

$\boxed{\text{구간}}$의 $\boxed{\text{평균 의 평균}}$과 $\boxed{\text{확•밀•함 의 평균을 비교}}$한다.

ex) $m$은 자연수. $P(35 \le X \le 38) > P(47 \le X \le 50)$




이 상황을 이해하자는 뜻!

## 〈#69. 미분계수〉

$\lim_{x\to 0} \frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}$ => $f$의 1에서의 $\boxed{\text{우미분계수}}$이다 => ($h\to 0\pm$ 모두 $h^2\to 0+$ 이기 때문)

$= f'(1+)$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(1)-f(1-h^2)}{h^2}$ => $f$의 1에서의 $\boxed{\text{좌미분계수}}$이다 => $f'(1-)$

★★★

☆ $\boxed{\lim\text{는 항상 }|\quad|\text{ 안에 넣어서 해결할 수 있다.}}$

☆ $f(a) = f(\lim_{x\to a} x)$

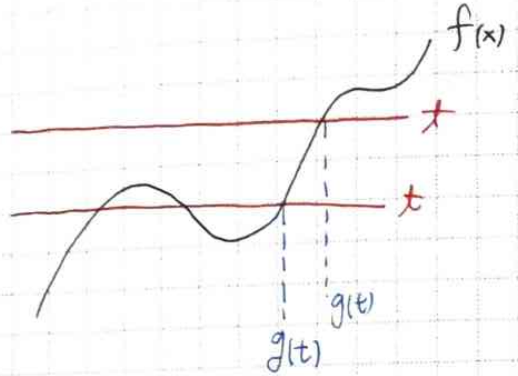
$\therefore f(x) = |x|$라고 한다면

$|a| = |\lim_{x\to a} x| = \lim_{x\to a} |x|$

# <#63. x 좌표로 정의된 함수 3가지 버전>

## ① 가장 쉬운 (역함수)

ex) $f(x) = t$ 의 실근 중 가장 큰 것을 $g(t)$라고 하자




$f(g(t)) = t$ ⇐ g는 f의 부분역함수..

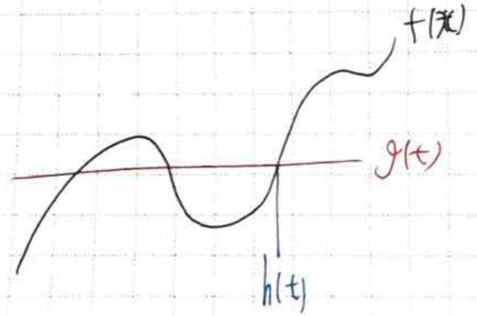
(if) g를 적분하고 싶다면 ⇝ f의 역함수적분

g가지나는 f를 $f_1$이라 네이밍하고

$g(t) = f_1^{-1}(t)$ 쓴뒤 적분.

## ② 두번째 (역함수는 아닌)

ex) $f(x) = g(t)$ 이도록 하는 x값중(실근 중) 가장 큰 것 $h(t)$



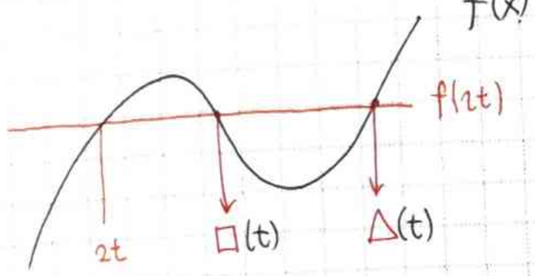

· $f(h(t)) = g(t)$.

⇝ 마찬가지로, $f_1$을 두어서 $h(t) = f_1^{-1}(g(t))$ 를 푼다.

③ 가장 눈치채기 힘든

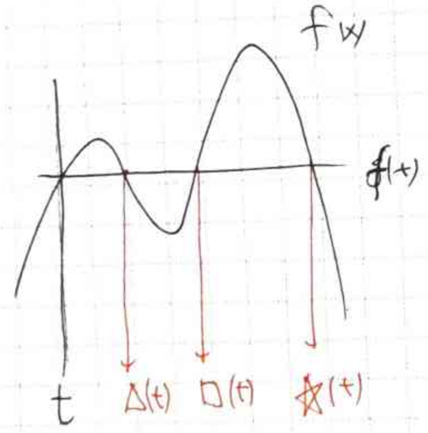
$f(2x) = f(g(x))$ ⇝ 그래프 Graph로 풀어야함!

→ $g(t)$는 $f(2t) = f(x)$의 실근임.




$\therefore g(t) = \begin{cases} 2t \\ \square(t) \\ \triangle(t) \end{cases}$ 중 하나이고, $g(t)$의 연속성 조건 등등에 따라 결정됨.

$f(x) = f(g(x))$

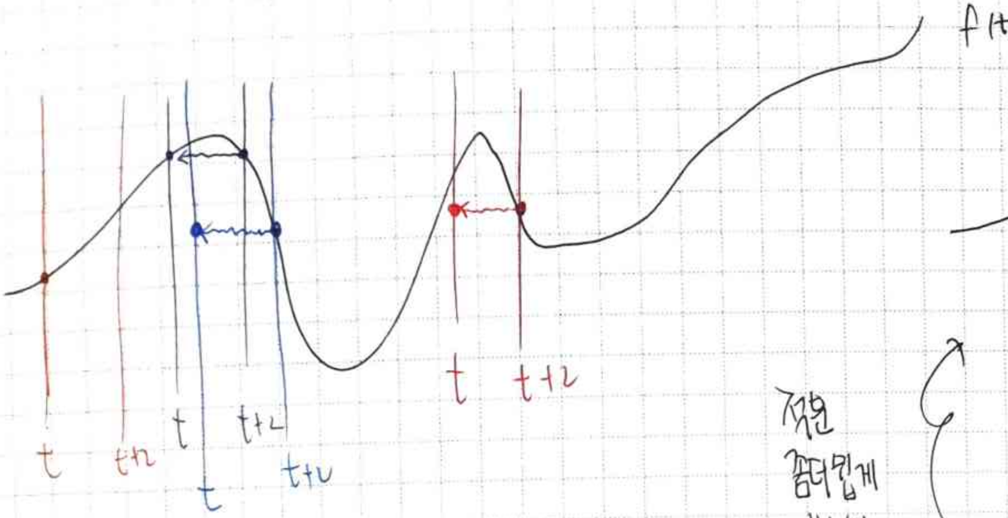


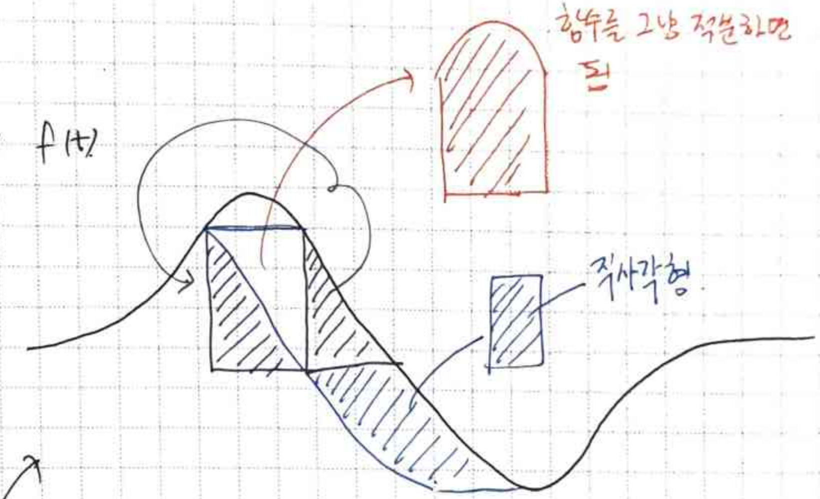

→ $\begin{cases} g(x) = x \\ g(x) = \triangle(x) \\ g(x) = \square(x) \\ g(x) = ☆(x) \end{cases}$ 중 하나를 문제 조건에 맞게 따른다!

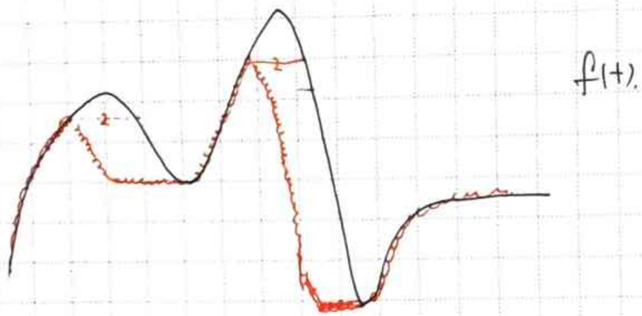
⟨#64. [t, t+2] 에서의 최솟값 m(t)⟩

* '함숫값'을 '정의역이 t인' 곳으로 '땡겨온다' 가 Point 임.

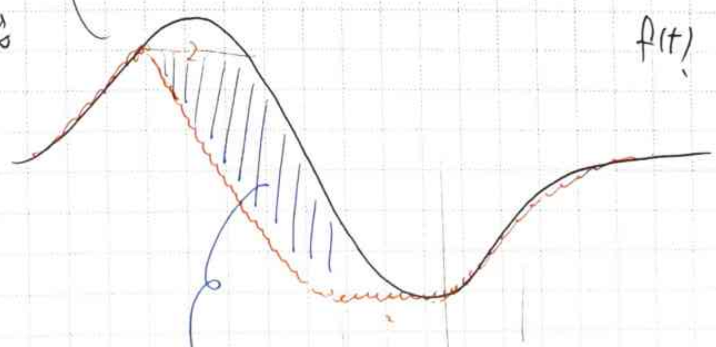
ex) f(x)의 [t, t+2] 에서의 최솟값을 m(t)라고 하자




적분 좀더 쉽게 하는법




적분가능! ( $\boxed{\ }$ 임! )

## <#65. "양수 조건">

- $\boxed{\text{양변을 나누어도 좋다}}$는 뜻이다
  (0이 아니므로 나누어도 OK, 음수가 아니므로 부등호 방향 안 바뀜)

- $\boxed{\text{산술·기하 평균}}$을 쓸 수 있다는 뜻이다

- $\boxed{x \rightarrow \log_2 x}$ 이런식으로 쓸수 있다는 뜻

ex) $f(4^x) = f(x) + 4$

→ 모든 $x$는 양수이므로, $f(4^{\log_4 x}) = f(\log_4 x) + 4$

$\Rightarrow f(x) = f(\log_4 x) + 4$