해석개론 이야기 7

Continuity

수학하는 원태인

January 3, 2022

1 Continuity

1.1 Limit of Functions and Continuous Functions

이제 드디어 연속함수를 시작합니다. 친숙한 개념이니까 좀 더 재밌지 않을까요?

역시 아무 말이 없으면 앞으로 X, Y는 metric space.

Definition 1.1. 함수 $f : E \subseteq X \to Y$와 점 $p \in E', q \in Y$에 대하여

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

라는 것은 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\delta > 0$이 존재하여

$$0 < d_X(x, p) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), q) < \epsilon \quad (x \in E)$$

를 만족하는 것이다. 이때 q를 **limit of** f **as** $x \to p$라고 한다.

Remark. p가 꼭 E 안에 있지 않아도 됩니다.

Example. $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$임을 증명하려 합니다. 먼저 양수 $\delta > 0$에 대해 다음이 성립하는 것을 알 수 있습니다.

$$0 < |x - 2| < \delta \Longrightarrow \left|x^2 - 4\right| = |x + 2| \, |x - 2| < (4 + \delta)\delta$$

이제 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때, $(4+\delta)\delta < \epsilon$이도록 하는 $\delta > 0$을 찾으면 됩니다. 여러 가지 방법이 있는데, 생각나는 가장 쉬운 방법은 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$로 잡는 것입니다. 그러면

$$0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow \left|x^2 - 4\right| < (4+\delta)\delta \leq 5 \times \epsilon/5 = \epsilon$$

이므로 증명이 끝났습니다.

함수의 극한을 sequence의 수렴으로도 설명할 수 있습니다.

Theorem 1.2. 함수 $f : E \subseteq X \to Y$와 점 $p \in E', q \in Y$에 대하여 다음은 동치.

(a) $\lim_{x\to p} f(x) = q$.

(b) Sequence (p_n) in E가 $p_n \neq p, \lim_n p_n = p$를 만족하면 $\lim_n f(p_n) = q$.

Proof. ($\Rightarrow$): $p_n \neq p, \lim_n p_n = p$인 sequence (p_n) in E를 잡는다. 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\delta > 0$ s.t. $[d_Y(f(x), q) < \epsilon$ if $x \in E$ and $0 < d_X(x,p) < \delta]$인 δ를 찾는다. 그리고 $n \geq N$이면 $0 < d_X(p_n, p) < \delta$인 N을 찾으면, $n \geq N$에 대하여 $d_Y(f(p_n), q) < \epsilon$이다. 따라서 $\lim_n f(p_n) = q$.
($\Leftarrow$): 대우를 보이기 위해 결론을 부정하자. 그러면 for some $\epsilon > 0$, for any $n \in \mathbb{N}$ there exists some $p_n \in E$ s.t. $0 < d_X(p_n, p) < 1/n$ but $d_Y(f(p_n), q) \geq \epsilon$. 그러면 $p_n \neq p, p_n \to p$인데 $(f(p_n))$은 q로 수렴하지 않는다. □

Corollary 1.3. f의 p에서의 limit이 존재하면 유일하다.

Proof. Metric space에서 limit의 유일성에 의해... □

$X = Y = \mathbb{R}$일 때, 함수의 극한의 덧셈, 상수배, 곱셈, 나눗셈에 관한 성질들 모두 잘 성립합니다(증명은 생략).

Definition 1.4. 함수 $f : E \subseteq X \to Y$ **continuous at** $p \in E$라는 것은 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\delta > 0$이 존재하여

$$d_X(x,p) < \delta \Longrightarrow d_U(f(x), f(p)) < \epsilon \quad (x \in E)$$

라는 것이다. f가 E의 모든 점에서 연속이면 f는 **continuous on** E이다.

Limit의 정의와 비교해 보면 다음을 얻습니다(이것이 고등학교에서 연속의 정의입니다).

Proposition 1.5. $p \in E \cap E'$에 대하여 f is continuous at p if and only if $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

만약 $p \in E \backslash E'$이면, 즉 p가 isolated point of E이면 p에서의 극한은 정의되지 않지만, 정의에 의해 f는 p에서 항상 연속입니다. 이 사실을 염두에 두면, Theorem 1.2로부터 continuity와 sequence의 수렴의 관계를 얻습니다.

Theorem 1.6. 함수 $f : E \subseteq X \to Y$와 점 $p \in E$에 대하여 다음은 동치.

(a) f is continuous at p.

(b) Sequence (p_n) in E가 $\lim_n p_n = p$를 만족하면 $\lim_n f(p_n) = f(p)$.

연속함수의 덧셈, 상수배, 곱셈, 나눗셈(분모가 0이 되지 않는 경우에)의 결과에 관한 성질들 모두 잘 성립합니다. (극한의 성질로부터)

연속함수의 개념을 metric을 사용하지 않고 open set만을 이용하여 더 일반적인 상황에서 정의할 수 있는데, metric space에서의 정의와 동치입니다. 앞으로 연속함수가 위상적 성질을 어떻게 보존하는지를 논의할 때 새로운 정의가 필요합니다.

Definition 1.7. $f : X \to Y$ (여기서 X, Y는 그냥 집합)에 대하여, $f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$를 **image(상) of** $A \subseteq X$ **under** f라고 하고, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$를 **preimage(역상) of** $B \subseteq Y$ **under** f라고 한다.

Theorem 1.8. $f : E \subseteq X \to Y$에 대하여 다음은 동치.

(a) f is continuous on E.

(b) $B \subseteq Y$가 open in Y이면 $f^{-1}(B)$도 open in E.

(c) $B \subseteq Y$가 closed in Y이면 $f^{-1}(B)$도 closed in E.

즉 연속함수는 'open set의 preimage가 open set인 함수'이다.

Proof. (a)⇒(b): $B \subseteq Y$가 open이라고 하자. 임의의 $x \in f^{-1}(B)$에 대해, $\epsilon > 0$이 존재하여 $N_\epsilon(f(x)) \subseteq B$이다. f가 continuous at x이므로 $\delta > 0$가 존재하여 $f(N_\delta(x_0) \cap E) \subseteq N_\epsilon(f(x))$이다. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$인 사실을 이용하면(왜 그런가?),

$$N_\delta(x_0) \cap E \subseteq f^{-1}(f(N_\delta(x_0) \cap E)) \cap f^{-1}(N_\epsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(B)$$

이다. 따라서 $f^{-1}(B)$ is open in E.
(b)$\Rightarrow$(a): $x \in E$라고 하고, 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $N_\epsilon(f(x))$는 open in Y이므로 $f^{-1}(N_\epsilon(f(x)))$도 open in E이다. 따라서 $\delta > 0$가 존재하여 $N_\delta(x) \cap E \subseteq f^{-1}(N_\epsilon(f(x)))$이고, $f(N_\delta(x) \cap E) \subseteq f(f^{-1}(N_\epsilon(f(x)))) \subseteq N_\epsilon(f(x))$이다. 따라서 f is continous at x. x는 임의의 점이었으므로 f is continuous on E.
(b)$\Leftrightarrow$(c): 연습문제로 남김. □

Corollary 1.9. $f : X \to Y, g : Y \to Z$가 연속이면 $g \circ f : X \to Z$도 연속이다.

Proof. Open set $U \subseteq Z$에 대하여, g가 연속이므로 $g^{-1}(U) \subseteq Y$도 open. f가 연속이므로 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X$도 open. □

1.2 Continuity and Compactness

Section 1.2의 주요한 결과는 **최대최소정리**입니다.

Theorem 1.10. 연속함수 $f : X \to Y$에 대하여 X가 compact이면 $f(X)$도 compact.

Proof. $\{U_i\}_{i \in I}$가 $f(X)$의 open cover라고 하자. Theorem 1.8에 의해 각 $f^{-1}(U_i)$는 open in X이고, 따라서 $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$는 open cover of X. X가 compact이므로 finite subcover $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=i_1,\dots,i_n}$이 존재한다. 따라서

$$f(X) = f(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(U_{i_k})) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

이므로, $\{U_i\}_{i \in I}$의 finite subcover를 찾았다. □

이제 최대최소정리는 당연한 따름정리입니다.

Corollary 1.11 (최대최소정리)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 연속이면 f는 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

Proof. $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$은 compact이므로, Theorem 1.10에 의해 $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}$도 compact이고 따라서 bounded and closed이다. $\mathbb{R}$의 bounded and closed subset은 최댓값과 최솟값을 가지므로(왜 그런가?) 증명 끝. □

뭔가 허무한 느낌입니다. 고등학교 때부터 증명을 미뤄온 최대최소정리의 증명 자체는 단 몇 줄로 끝났습니다. 하지만 여기에 이르기까지 무엇을 공부했는지—실수의 완비성, 수열, open set, limit point, compactness, Heine-Borel ...—를 생각해보면 실로 대단한 정리인 것입니다. 같은 느낌을 잠시 후에 사잇값정리를 증명할 때 받게 될 것입니다.

연속함수의 역함수는 연속함수 일까요? 'Yes'라고 대답하고 싶은 충동이 들겠지만...

Example. $\{0\} \cup (1, 2]$에서 f를 다음과 같이 정의합니다.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{if } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

그러면 f는 연속이고(0은 정의역의 isolated point이므로 항상 연속), f는 injective[1]이므로 그 치역에서 역함수를 정의할 수 있습니다. 그런데

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

이므로 f^{-1}은 $[0, 1]$에서 연속이 아닙니다.

정의역이 compact인 전단사 연속함수는 그 역함수도 연속함수입니다.

Theorem 1.12. Bijection $f : X \to Y$가 X에서 연속이고 X이 compact이면 $f^{-1} : Y \to X$도 연속이다.

Proof. Theorem 1.8에 의하여, open set $U \subseteq X$에 대하여 $f(U) \subseteq Y$가 open인 것을 보이면 된다.

$$\begin{aligned} U \text{ is open in } X. &\Longrightarrow X \backslash U \text{ is closed in } X. \\ &\Longrightarrow X \backslash U \text{ is compact.} \\ &\Longrightarrow f(X \backslash U) = Y \backslash f(U) \text{ is closed in } Y. \\ &\Longrightarrow f(U) \text{ is open in } Y. \end{aligned}$$

[1]injection = 단사함수 = 일대일함수. surjection = 전사함수 = 치역과 공역이 같은 함수. bijection = injection and surjection = 전단사함수 = 일대일대응.

$\square$

1.3 Continuity and Connectedness

Section 1.3의 주요한 결과는 **사잇값정리**입니다.

Lemma 1.13. $E \subseteq X$에 대하여 다음은 동치.

(a) S is not connected.

(b) There exists a surjective continuous function $f : S \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Proof. U, V가 S의 separation이라고 하자.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in U \\ 1, & \text{if } x \in V \end{cases}$$

로 정의하면, f는 전사 연속함수. 역으로 그러한 f가 존재한다고 하면,

$$U = f^{-1}(\{0\}), \quad V = f^{-1}(\{1\})$$

로 정의하면 U, V는 S의 separation이다. $\square$

Theorem 1.14. 연속함수 $f : X \to Y$에 대하여 X가 connected이면 $f(X)$도 connected.

Proof. $f(X)$가 connected가 아니라고 가정하면, Lemma 1.13에 의해 전사 연속함수 $g : f(X) \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$이 존재한다. 따라서 $g \circ f : X \to \{0, 1\}$도 전사 연속함수이므로 X는 not connected. $\square$

Corollary 1.15 (사잇값정리)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c) = k$인 $c \in (a, b)$가 존재한다.

Proof. $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}$이 connected이고, $\mathbb{R}$의 conencted set은 구간이므로... $\square$

사잇값정리를 (한 줄로!) 증명했습니다.

Connectedness의 정의는 'separation이 존재하지 않는다'이므로, 정의만을 이용하여 어떤 집합이 connected임을 보이는 것은 어려울 때가 많습니다. Theorem 1.14을 이용하면 어떤 집합 S에 대하여 다른 connected set(예: $\mathbb{R}$의 구간에서 S로 가는 전사 연속함수만 찾으면 됩니다.

Example. $\mathbb{R}^N$의 두 점 x, y에 대하여, **line segment(선분)** $[x, y]$를

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty \in \mathbb{R}^N : t \in [0, 1]\}$$

로 정의하면, $[0, 1]$에서 정의된 전사 연속함수

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\to [x, y] \\ t &\mapsto (1-t)x + ty \end{aligned}$$

가 존재하므로 $[x, y]$는 connected.

Theorem 1.14의 중요한 결과 하나를 언급하고 Section 1.3을 마무리하겠습니다. 함수 $f : X \to X$에 대하여 $f(x) = x$인 $x \in X$를 **fixed point(고정점) of** f라고 합니다. Fixed point의 존재성은 수학의 각 분야에서 자주 언급되는데, $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$이고 f가 연속일 때 fixed point의 존재성을 주장할 수 있습니다.

Corollary 1.16. $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to [a, b] \subset \mathbb{R}$이 연속일 때, f는 fixed point를 가진다.

Proof. $g(x) = x - f(x)$로 정의하면,

$$g(a) = a - f(a) \leq 0 \leq b - f(b) = g(b)$$

이므로 사잇값 정리에 의해 $g(c) = c - f(c) = 0$인 $c \in [a, b]$가 존재한다. □

1.4 Uniform Continuity

이제 고등학교나 미적분학에서는 전혀 볼 수 없었던 새로운 개념인 uniform continuity를 정의하려고 합니다.

Definition 1.17. Metric space[2] X, Y에 대하여 함수 $f : X \to Y$가 **uniformly continuous(고른연속) on** X라는 것은, 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 양수 $\delta > 0$이 존재하여

$$d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon \quad (x, y \in X) \tag{1}$$

[2]그냥 연속과 달리 거리의 개념이 꼭 필요합니다.

를 만족하는 것이다.

Remark. '어떤 함수가 continuous on X'의 정의는 f가 **각** $x \in X$**에서 continuous**인 것입니다. 즉, continuity는 기본적으로 각 점의 근방에서의 local한 성질입니다. 그런데 uniform continuity는 정의역 전체를 control할 수 있는 $\delta > 0$을 요구하는, global한 성질입니다.[3] 그래서 'f가 $x \in X$에서 uniform continuous하다'라는 말은 그 자체로 non-sense.

Proposition 1.18. $f : X \to Y$가 uniformly continuous on X이면 continuous on X.

Proof. $\epsilon > 0$에 대하여 (1)을 만족하는 $\delta > 0$를 찾는다. 각 $x \in X$에 대하여,

$$y \in X, d_X(x, y) < \delta \to d_Y(f(x), f(Y)) < \epsilon$$

이므로 f는 continuous at x. $x \in X$는 임의의 점이므로, f는 continuous on X. □

Example.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 $f(x) = x^2$로 정의하면, f is not uniformly continuous on $\mathbb{R}$.
f가 정의역에서 uniformly continuous라고 가정하면,

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \Longrightarrow \left|x^2 - y^2\right| < 1$$

인 $\delta > 0$이 존재합니다. 그런데

$$x = \frac{1}{\delta}, \quad y = x + \frac{\delta}{2}$$

로 잡으면,

$$\left|x^2 - y^2\right| = |x + y|\,|x - y| \geq \frac{2}{\delta} \times \frac{\delta}{2} = 1$$

이므로 모순.

(b) 그런데 (a)의 f의 정의역을 $[0, 1]$로 제한시키면 f is uniformly continuous on $[0, 1]$.

[3]수학에서 uniform이라는 단어는 보통 어떤 집합 전체를 control할 수 있는 어떤 대상의 존재를 의미합니다.

$\epsilon > 0$에 대하여 $\delta = \epsilon/2^4$로 정의하면

$$x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta \Longrightarrow \left|x^2 - y^2\right| = |x+y|\,|x-y| \le 2\delta = \epsilon.$$

즉 uniform continuity는 정의역에 의존한다.

$f : X \to Y$가 uniformly continuous on X일 충분조건 몇 개를 소개합니다.

Proposition 1.19. $f : X \to Y$에 대하여

$$d_Y(f(x), f(y)) \le M d_X(x, y) \quad (x, y \in X)$$

를 만족하는 $M > 0$이 존재하면 f is uniformly continuous on X.

Proof. $\epsilon > 0$에 대하여 $\delta = \epsilon/M$으로 정의하면 (1)을 만족한다. □

Corollary 1.20. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 미분가능하고,[5] $|f'| < M$인 $M > 0$이 존재하면 f is uniformly continuous on $\mathbb{R}$.

Proof. 평균값 정리에 의해

$$|f(x) - f(y)| \le M\,|x-y| \quad (x, y \in X)$$

이므로, Proposition 1.19에 의해. □

다음 정리는 compact set이 어떤 의미에서 finite set의 일반화라고 하는 것인지를 알 수 있게 해 줍니다.

Theorem 1.21. $f : X \to Y$가 연속함수이고 X가 compact이면 f is uniformly continuous on X.

Proof. $\epsilon > 0$이 주어졌다고 하고, 각 $x \in X$에 대하여

$$d_X(x, y) < \delta(x) \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon/2, \quad (y \in X)$$

[4]분모의 2의 정체는 Corollary 1.20 참고.
[5]미분을 아직 정의하지는 않았지만...

인 $\delta(x) > 0$을 찾는다($\delta(x)$는 x에 의존한다는 뜻). 이제 $\{N_{\delta(x)/2}(x)\}_{x\in X}$는 open cover of X이므로, finite subcover $\{N_{\delta(x)/2}(x)\}_{x=x_1,\ldots,x_n}$이 존재한다. 이제 $\delta = \min\{\delta(x_1)/2,\ldots,\delta(x_n)/2\}$로 정의하고 (1)이 성립함을 보이자.
$x, y \in X$에 대하여 $d_X(x,y) < \delta$라고 가정하자. 먼저 $\delta = \min\{\delta(x_1)/2,\ldots,\delta(x_n)/2\}$가 open cover이므로 $x \in N_{\delta(x_i)/2}(x_i)$인 $i = 1,\ldots,n$이 존재한다. 따라서

$$d_X(y,x_i) \le d_X(y,x) + d_X(x,x_i) < \delta + \frac{\delta(x_i)}{2} \le \delta(x_i)$$

이므로 (1.4)에 의해

$$d_Y(f(x),f(y)) \le d_Y(f(x),f(x_i)) + d_Y(f(y),f(x_i)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Uniform continuity의 좋은 점은 Cauchy sequence를 보존해준다는 것입니다. 일반적인 연속함수는 Cauchy sequence를 보존해준다고 보장할 수 없습니다.

Example. $f : (0,1] \to \mathbb{R}$을 $f(x) = 1/x$로 정의하고 $p_n = 1/n$이라 하면 $p_n \to 0$이므로 (p_n)은 Cauchy이지만 $(f(p_n))$은 발산하므로 not Cauchy.

Theorem 1.22. $f : X \to Y$가 uniformly continuous on X이고 (p_n)이 Cauchy sequence in X이면 $(f(p_n))$도 Cauchy sequence.

Proof. $\epsilon > 0$에 대하여 (1)을 만족하는 $\delta > 0$을 잡고,

$$m, n \ge N \Longrightarrow d_X(p_m, p_n) < \delta$$

인 N을 잡는다. 이제

$$m, n \ge N \Longrightarrow d_X(f(p_m), f(p_n)) < \epsilon$$

이므로 $(f(p_n))$은 Cauchy. □

연속함수 $f : E \subseteq X \to Y$에 대하여 $g : X \to Y$가 연속이고 $g|_E = f$이면 g는 **continuous extension of** f라고 합니다. 모든 연속함수가 continuous extension을 가지는 것은 아닙니다.

Example.

(a) $(0,1]$에서 정의된 함수 $x \mapsto 1/x$은 $[0,1]$에서의 continuous extension이 존재하지 않습니다 (0에서의 값을 어떤 것으로 해도 불연속이므로).

(b) $(0,1]$에서 정의된 함수 $x \mapsto \sin(1/x)$은 $[0,1]$에서의 continuous extension이 존재하지 않습니다(0에서의 값을 어떤 것으로 해도 불연속이므로).

Corollary 1.23. Complete metric space Y에 대하여 $f : E \subseteq X \to Y$이 uniformly continuous on E이면 continuous extension $g : \overline{E} \subseteq X \to Y$가 존재한다.

Proof. E의 limit point에서의 g의 값을 지정해주면 된다. $x_0 \in X$가 E의 limit point이라고 하자. 그러면 x_0으로 수렴하는 sequence (x_n) in $E \backslash \{x_0\}$이 존재한다. 그러면 (x_n)은 Cauchy이고, 1.22에 의해 $(f(x_n))$도 Cauchy이다. Y가 complete이므로 $f(x_n) \to \alpha$ for some $\alpha \in Y$이다. 이제 $g(x_0) = \alpha$로 정의한다.
이 정의의 well-definedness를 확인하기 위해[6], (x'_n)이 x_0로 수렴하는 sequence in $E\ \{x_0\}$라고 하자. 마찬가지 이유로 $f(x'_n) \to \beta$ for some $\beta \in Y$이다. 이제 $\alpha = \beta$인 것을 보이면 된다.

$$\limsup_n d_X(x_n, x'_n) \le \limsup_n (d_X(x_n, x_0) + d_X(x'_n, x_0)) = 0$$

이므로 $d_X(x_n, x'_n) \to 0$이다. 이제 $\epsilon > 0$에 대하여 (1)을 만족하는 $\delta > 0$을 찾고,

$$n \ge N_1 \Longrightarrow d_X(x_n, x'_n) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_n), f(x'_n)) < \epsilon$$

인 N_1을 찾는다. N_2, N_3을

$$n \ge N_2 \Longrightarrow d_Y(f(x_n), \alpha) < \epsilon$$
$$n \ge N_3 \Longrightarrow d_Y(f(x'_n), \beta) < \epsilon$$

을 만족하도록 잡고 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$으로 하면

$$d_Y(\alpha, \beta) \le d_Y(\alpha, f(x_N)) + d_Y(f(x_N), f(x'_N)) + d_Y(f'(x_N), \beta) < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

[6]여러 가지 가능성 중에서 대표 하나를 이용해서 새로운 것을 정의했을 경우, 대표를 다른 것으로 뽑았을 때도 정의가 같은지를 확인해야 합니다.

이다. $\epsilon > 0$은 임의의 양수이므로 $d_Y(\alpha, \beta) = 0$이고 $\alpha = \beta$이다.

이제 $g : \overline{E} \subseteq X \to Y$의 연속성을 보이는데, E의 limit point에 대해서만 보이면 된다(왜 그런가?). 위에서와 마찬가지로 x_0이 E의 limit point라고 하고, $g(x_0) = \alpha$라고 하자. 양수 $\epsilon > 0$에 대하여

$$d_X(x, y) < \delta' \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{3} \quad (x, y \in X)$$

을 만족하는 $\delta' > 0$을 찾는다. 우리의 주장: for $x \in \overline{E}$, $d_X(x, x_0) < \delta'/2 \Longrightarrow d_Y(g(x), \alpha) < \epsilon$.

$x_0, x \in \overline{E}$이므로 x_0, x으로 수렴하는 E 안의 수열 $(p_n), (q_n)$이 존재한다. 또 정의에 의해 $f(p_n) \to \alpha$이다. 만약 $x \in E'$이면 정의에 의해 $f(q_n) \to g(x)$이고, $x \in E \backslash E'$이면 x는 isolated point이므로 $q_n = x$ for sufficiently largle n이다. 따라서 어느 경우든 $f(q_n) \to g(x)$이다.

$$\begin{aligned}
n \geq M_1 &\Longrightarrow d_X(p_n, x_0) < \frac{\delta'}{2} \\
n \geq M_2 &\Longrightarrow d_Y(f(p_n), \alpha) < \frac{\epsilon}{3} \\
n \geq M_3 &\Longrightarrow d_X(q_n, x) < \frac{\delta'}{2} - d_X(x, x_0) \\
n \geq M_4 &\Longrightarrow d_Y(f(q_n), g(x)) < \frac{\epsilon}{3}
\end{aligned}$$

인 M_1, M_2, M_3, M_4를 찾을 수 있다. 이중 최댓값을 M이라 하면,

$$\begin{aligned}
d_Y(g(x), \alpha) &\leq d_Y(g(x), f(q_M)) + d_Y(f(q_M), f(p_M)) + d_Y(f(p_M), \alpha) \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

1.5 Monotonic Functions

이 글이 끝날 때까지 $X = Y = \mathbb{R}$인 경우만 생각합니다. X가 $\mathbb{R}$이면 좌극한과 우극한의 개념을 생각할 수 있습니다.

Definition 1.24. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$와 $a\le x_0<b, \alpha\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$에 대하여

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\searrow x_0} f(x) = f(x_0+) = \alpha$$

라는 것은 x_0로 수렴하는 (x_0,b) 안의 임의의 수열 (x_n)에 대하여 $f(x_n)\to\alpha$라는 것이다. 이때 q를 **right-handed limit(우극한) of** f **as** $x\to x_0+$라고 한다.
$a<x_0\le b$에 대하여 **left-handed limit(좌극한)** $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x) = f(x_0-) = q$도 마찬가지로 정의한다.

Example. 좌극한이나 우극한이 존재하지 않는 함수의 예시입니다. $[0,1]$에서

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 정의하면 f는 $x_0\in[0,1]$에서 좌극한이나 우극한을 가지지 않습니다.

다음 사실은 쉽게 보일 수 있습니다(증명 생략).

Proposition 1.25. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$와 $a\le x_0<b, \alpha\in\mathbb{R}$에 대하여 다음은 동치.

(a) $f(x_0+)=\alpha$.

(b) 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $\delta>0$이 존재하여

$$x_0<x<x_0+\delta \Longrightarrow |f(x)-\alpha|<\epsilon \quad (x\in(a,b))$$

을 만족한다.

좌극한에 대해서도 비슷한 말을 할 수 있다.

Corollary 1.26. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$와 $a<x_0<b, \alpha\in\mathbb{R}$에 대하여

$$f(x_0+)=f(x_0-)=\alpha \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha.$$

Definition 1.27. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$이 **monotonically increasing(단조증가) on** (a,b)라는 것은 $a<x<y<b \Longrightarrow f(x)\le f(y)$라는 것이다. 마지막 부등호의 방향을 바꾸어 **monotoni-**

cally decreasing(단조감소) on (a,b)도 정의한다. 정의역에서 montonically increasing이거나 monotonic decreasing인 함수를 **monotonic function(단조함수)**라고 한다.

단조함수는 좌극한과 우극한을 항상 가집니다.

Theorem 1.28. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$이 (a,b)에서 단조증가하면 다음이 성립한다.

$$f(x+) = \inf\{f(t) : t\in(x,b)\},\quad a\le x<b$$
$$f(x-) = \sup\{f(t) : t\in(a,x)\},\quad a< x\le b$$

Proof. $a\le x<b$에 대하여 $\alpha=\inf\{f(t):t\in(x,b)\}$라고 하자.

(a) $a<x<b$인 경우: 이 경우에는 $\alpha>-\infty$이므로, 임의의 $\epsilon>0$에 대해 $f(t_0)<\alpha+\epsilon$인 $t_0\in(x,b)$가 존재한다. 이제 $x<t<t_0 \Longrightarrow \alpha\le f(t)\le f(t_0)<\alpha+\epsilon$이므로 $f(x+)=\alpha$이다.

(b) $x=a$인 경우: 만약 $\alpha>-\infty$이면, (a)와 마찬가지로 생각할 수 있다. 만약 $\alpha=-\infty$이면 임의의 $M<0$에 대해 $f(t_0)<M$인 $t_0\in(a,b)$가 존재한다. 이제 $a<x<t_0\Longrightarrow f(x)\le f(t_0)<M$이므로 $f(a+)=-\infty$이다.

$f(x-)$의 경우도 마찬가지로 증명한다. □

Corollary 1.29. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$이 (a,b)에서 단조증가하면 $a<x<y<b$에 대해 다음이 성립한다.

$$f(a+)\le f(x-)\le f(x)\le f(x+)\le f(y-)\le f(y)\le f(y+)\le f(b-)$$

위 정리를 이용하면 단조함수의 불연속점의 개수를 한정할 수 있습니다. $[0,1]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

는 정의역의 모든 점에서 불연속이므로 불연속점의 집합이 uncountable입니다. 그런데 단조함수의 경우 불연속점의 집합은 countable임을 다음 따름정리를 통해 알 수 있습니다.

Corollary 1.30. 단조함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$의 불연속점의 집합은 at most countable.

Proof. f가 단조증가함수라고 하자. $x \in (a, b)$에 대하여 f is continuous at x if and only if $f(x-) = f(x+)$이므로, f의 불연속점의 집합을 D라고 하면 $D = \{x \in (a, b) : f(x-) < f(x+)\}$이다. 이제 각 $x \in D$에 대하여 구간 $(f(x-), f(x+)) \cap \mathbb{Q}$의 원소 r_x을 택할 수 있다. 따라서 $x \mapsto r_x$로 정의된 함수 $r : D \to \mathbb{Q}$는 injective인데(왜 그런가?) $\mathbb{Q}$가 countable이므로 D는 at most countable. □

단조증가의 정의에서, $x < y \implies f(x) \le f(y)$를 $x < y \implies f(x) < f(y)$로 바꾸면 **(strictly) increasing function(증가함수)**의 정의가 됩니다. **(Strictly) decreasing function(감소함수)**도 마찬가지로 정의합니다.

앞에서 정의역이 compact인 continuous bijection은 그 역함수도 연속임을 증명했는데, 정의역이 구간인 증가 연속함수 또는 감소 연속함수도 역함수가 연속입니다.

Theorem 1.31. 구간 I에서 정의된 $f : I \to \mathbb{R}$에 대하여 다음은 동치.

(a) f is injective.

(b) f is strictly increasing on I or strictly decreasing on I.

위 조건들이 참일 때 $f^{-1} : f(I) \to I$는 연속이다.

Proof. (b)⇒(a)는 당연하다. (b)를 부정하면,

$$x < y, \quad f(x) > f(y), \quad z < w, \quad f(z) < f(w)$$

인 $x, y, z, w \in I$가 존재한다. $f(y) < f(z), f(y) = f(z), f(y) > f(z)$ 세 가지 경우 모두를 검토해 보면 어느 경우에도 사잇값 정리에 의해 f가 injective가 될 수 없다.
이제 f가 증가함수라고 하고, $f^{-1} : f(I) \to I$가 연속임을 보인다. $y_0 \in f(I)$에 대하여 $x_0 = f^{-1}(y_0)$라고 하자. 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $\epsilon' = \min\{\epsilon, x_0 - a, b - x_0\}$로 놓고,

$$\delta = \min\{f(x_0 + \epsilon') - y_0, y_0 - f(x_0 - \epsilon)\} > 0$$

라고 하면

$$\begin{aligned} y_0 - \delta < y < y_0 + \delta &\Longrightarrow f(x_0 - \epsilon') \le y_0 - \delta < y < y_0 - \delta \le f(x_0 + \epsilon) \\ &\Longrightarrow x_0 - \epsilon' < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon' \\ &\Longrightarrow x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon \end{aligned}$$

이므로 f^{-1}은 y_0에서 연속이다. □

References

[1] 김성기, 김도한, 계승혁. *해석개론*. 서울대학교출판문화원. 2011.

[2] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill. 1976.