## 30

**[수능적 해법 1]**

먼저 (가) 조건을 해결하기 위해 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하자.

$$g(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$$
$$g'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=\{-ax^2+(2a-b)x+b-c\}e^{-x}$$
$$g''(x)=(-2ax+2a-b)e^{-x}+\{ax^2+(b-2a)x+c-b\}e^{-x}$$
$$=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}$$

에서 이차방정식 $ax^2+(b-4a)x+a-b+c=0$의 실근이 $1$, $4$여야 한다.

따라서 근과 계수의 관계를 활용하면 $-\dfrac{b-4a}{a}=5$, $\dfrac{2a-2b+c}{a}=4$이므로

정리하면 $a+b=0$, $2a+2b-c=0$에서 $c=0$, $b=-a$임을 알 수 있다.

즉, (가) 조건을 적용해서 식을 다시 써보면

$$g(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}=(ax^2-ax)e^{-x} \cdots ①$$

임을 알 수 있다. 이제 (나) 조건을 해결하기 위해 접선의 방정식을 도입하면

$$y=g'(t)(x-t)+g(t)$$

인데, $(0,k)$를 대입했을 때, 만족하는 $t$의 값이 3개가 되어야 한다.[1]
대입하면 방정식

$$k=g(t)-tg'(t) \cdots ②$$

이고, 이 방정식의 실근이 3개가 되어야 하므로 오른쪽 함수를 $h(t)=g(t)-tg'(t)$라 한 후 미분해서 그래프를 그리자.[2]

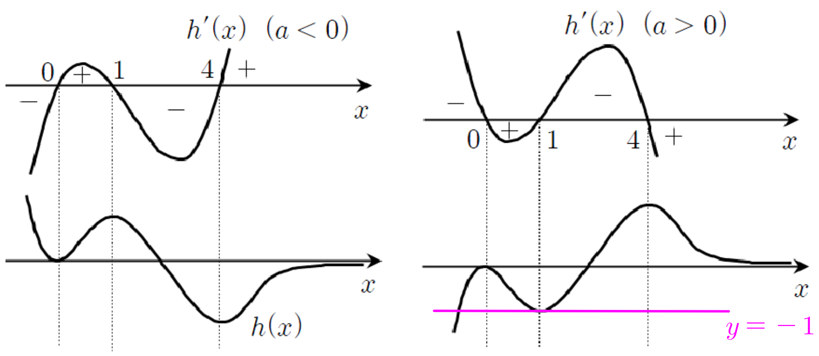
$$\{g(t)-tg'(t)\}'=g'(t)-g'(t)-tg''(t)=-tg''(t)=-at(t-1)(t-4)e^{-t}$$

이므로 도함수 $h'(t)$의 부호와 $h(t)=g(t)-tg'(t)=at^2(t-2)e^{-t}$에서 $h(0)=h(2)=0$임을 활용해서 원함수 $h(t)=at^2(t-2)e^{-t}$의 개형을 추론해보자.[3]

1) 여기서 $t$의 값은 "접점의 $x$좌표의 개수" 인데 그것은 곧 "접선의 개수"와 같다. 앞서 수능특강에서 배운 바 있다.

2) 이차방정식 까지는 실근의 개수를 판정할 때 근의 공식을 활용하고 인수분해가 힘든 고차방정식 혹은 초월함수일 때에는 그래프를 그리는 것이 일반적이다.

3) $g(t)-tg'(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$ 이기 때문에 $a(t^3-2t^2)e^{-t}$ $=at^2(t-2)\times e^{-t}$ 의 그래프를 그리는 것이다. 즉, 곱함수 그리기를 어느 정도 활용하면서 그리면 쉽게 그릴 수 있다.




위와 같이 그래프를 추론할 수 있는데, 실근이 3개일 조건이 $-1<k<0$이라 하였으므로 오른쪽 그래프가 되어야 한다. 즉, $h(1)=-1$이어야 하므로

$h(1)=g(1)-g'(1)=-f'(1)e^{-1}=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$이다.

따라서 $g(x)=(ex^2-ex)e^{-x}$이 되고, $g(-2)\times g(4)=6e^3\times 12e^{-3}=72$이다.

**[수능적 해법 2]**[1)]

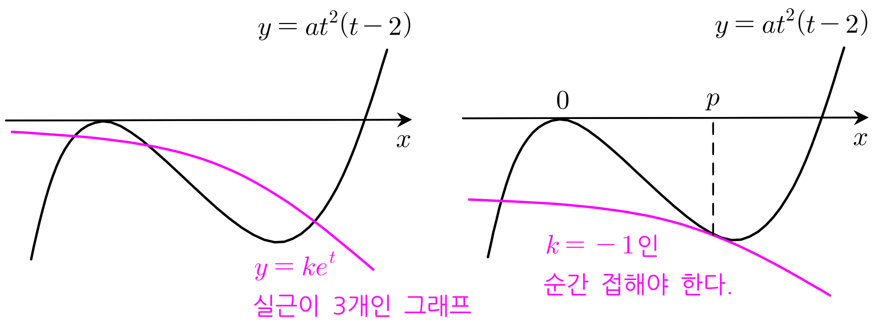
(가)와 (나) 조건을 해석한 [수능적 해법 1]의 ②부터 시작하자.

방정식 $k=g(t)-tg'(t)$에 직접 $g(t)$와 $tg'(t)$를 대입해서 정리하면

$k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$이고 양변 모두 쉽게 그릴 수 있는 그래프로 바꾸기 위해서

$e^t$를 양변에 곱하면 $ke^t=at^2(t-2)$가 된다.

지수함수 $y=ke^t$와 다항함수 $y=at^2(t-2)$의 그래프를 그려보면 실근의 개수를 추론할 수 있는데 $-1<k<0$이어야 하므로 $a<0$일 때에는 실근이 많아봐야 2개임을 알 수 있다. 따라서 $a>0$이고 그래프를 그려보면 다음과 같다.




따라서 접할 조건인 함숫값이 같고, 접선의 기울기가 같음을 활용하자.[2)] 접점의 $x$좌표를 $p$라 하면 $-e^p=a(p^3-2p^2)$, $-e^p=a(3p^2-4p)$이므로 연립하면

$a(p^3-2p^2)=a(3p^2-4p)$, $ap(p-1)(p-4)=0$이므로 $p=1$임을 알 수 있다.[3)]

따라서 $p=1$을 $-e^p=a(p^3-2p^2)$에 대입하면 $a=e$이고,

$g(x)=(ex^2-ex)e^{-x}$이다. 즉, $g(-2)\times g(4)=6e^3\times 12e^{-3}=72$이다.

1) 이 풀이의 아이디어는 김수민님에게서 나왔습니다.

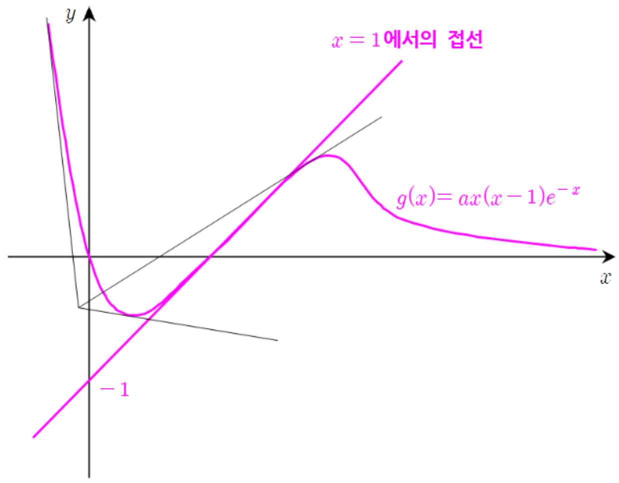
2) 일반적으로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 접하면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$라는 조건을 만족해야 한다.

3) 그래프에서 $p$는 0과 4가 아님을 알 수 있다.

# 2014.11 분석 및 해제

**[스피드 해법 1]**

①에서 $g(x)=ax(x-1)e^{-x}$이므로 곡선 $y=g(x)$의 개형을 곱함수 그래프 그리기로 그릴 수 있다. 그려보면 $a<0$인 개형에서는 $-1<k<0$에서 그은 접선의 개수가 3개가 될 수 없다. 따라서 그림과 같이 $a>0$일 때, 다음과 같이 $x=1$에서 변곡점에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 사이에 점 $(0,\ k)$가 있어야 접선이 3개임을 알 수 있다.[1)]




따라서 $x=1$에서의 접선을 찾아보면 $y=g'(1)(x-1)+g(1)$인데 $(0,\ -1)$을 지나야 하므로 대입하면 $-1=-g'(1)+g(1)$이다. 식을 정리하면

$g(1)-g'(1)=-f'(1)e^{-1}=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$이다.

즉, $g(-2)\times g(4)=6e^3\times 12e^{-3}=72$

**[스피드 해법 2]**

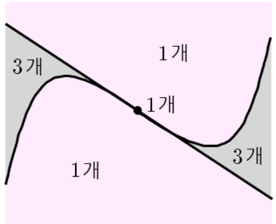
약간의 비약이 있는 풀이이지만 시험장에서 이렇게 푼 학생도 많았기 때문에 설명해보겠다.

[스피드 해법 1]과 기본적인 골격은 같다고 생각하면 된다.

$g(x)=f(x)e^{-x}$에서 일단 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수라 생각하면[2)] $f(x)=0$가 실근을 2개 가지는 경우, 1개 가지는 경우, 실근을 가지지 않는 경우 정도로 분류한 후 곱함수 그리기를 활용하면서 동시에 (가)에서의 변곡점이 2개 있음을 활용하면 곡선 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 대략적으로 추측할 수 있다.[3)]

또한 (나) 조건의 “접선 3개”가 가능한 순간을 생각해서 그래프를 그려보자.[4)]

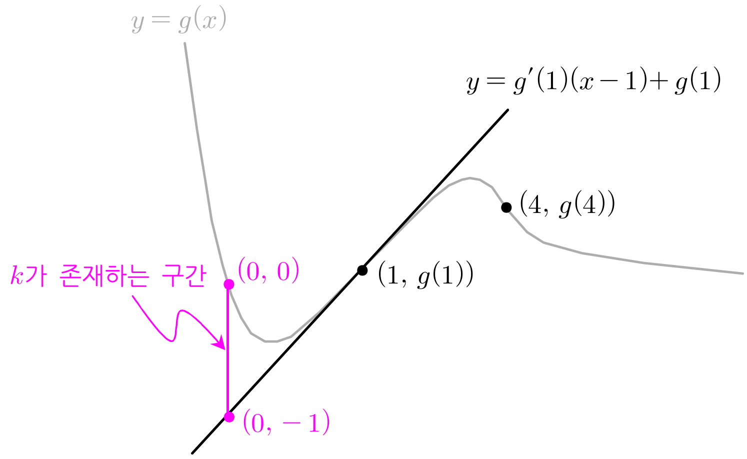
1) 삼차함수의 접선의 개수와 매우 유사하다.




2) 최고차항을 양수라고 가정하는 것에서 일단 비약이다.

3) 곱함수를 그린다는 것은 대단한 성질을 활용하는 것이 아니라 함숫값을 직접 하나하나 곱해서 생각하는 단순한 사칙연산이다.

4) 그래프를 그려보면 알지만 실근이 2개인 경우와 1개인 경우는 무조건 변곡점이 존재하고 실근이 0개인 경우에는 변곡점이 존재하지 않을 수도 있음을 예측할 수 있다. 또한 (가) 조건에서 변곡점이 2개 있음을 논리적으로 예측할 수도 있다.




즉, 모든 상황이 위의 그림에 맞아 들어가게 되고 그림에서 $k$가 존재하는 구간을 활용하면 $g(0)=0$이고 $g(1)-g'(1)=-1$임을 알 수 있다.

$g(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$에 대입해보면 $g(0)=0$에서 $c=0$임을 알 수 있다.
따라서 $g(x)=\left(ax^2+bx\right)e^{-x}$이고 미분하면

$$g'(x)=(2ax+b)e^{-x}+\left(-ax^2-bx\right)e^{-x}=\left\{-ax^2+(2a-b)x+b\right\}e^{-x}$$

이므로 $g(1)=(a+b)e^{-x}$, $g'(1)=ae^{-1}$에서 $g(1)-g'(1)=be^{-1}=-1$이다.
즉, $b=-e$임을 알 수 있다.

$$g''(x)=\left\{ax^2+(-e-4a)x+2a+2e\right\}e^{-x}$$

방정식 $g''(x)=0$에서 $x=4$가 실근이 되어야 하므로 $a=e$임을 알 수 있다.
즉, $g(-2)\times g(4)=6e^3\times 12e^{-3}=72$

**[정답] 72**

**[스피드 해법 3]**[1)]
우선 열심히 계산해서 (가) 조건을 완료하면 [수능적 해법]의 ①에서

$$g(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}=a\left(x^2-x\right)e^{-x}$$

임을 알 수 있다. 그런데 구하는 것은 $g(-2)\times g(4)$이다. 대입해보면

$$g(-2)\times g(4)=6ae^2\times 12ae^{-4}=72a^2e^{-2}$$

1) 스피드 해법이라기 보다는 시험장에서 꽤 많은 사람이 구사한 야매라고 생각하면 된다.

이다. 여기서 수능 주관식의 답은 정수가 되어야 하므로 $a=(상수)\times e$임을 예측할 수 있는데, 수능은 대부분 간단한 값이 정답이기 때문에 $a=e$로 대입해서 72로 답한 학생도 많았다.[1)]

**[정답] 72**

위의 마지막 [스피드 해법 3]은 공부할 때에는 재미로 보는 정도면 충분하고 시험장에서는 목숨걸고 정답을 알아내야 하기 때문에 저러한 방법도 유효하다.

공부할 때에는 절대 위의 풀이를 중점으로 두면 안 됨을 명심하자.[2)]

1) 상식적으로 $a=\frac{e}{2}$나, $a=2e$ 등도 가능하기 때문에 인생을 확률에 맡기는 것과 같다.

2) 수학을 [스피드 해법3]에 중점을 두고 공부하는 것은 비정상이다.