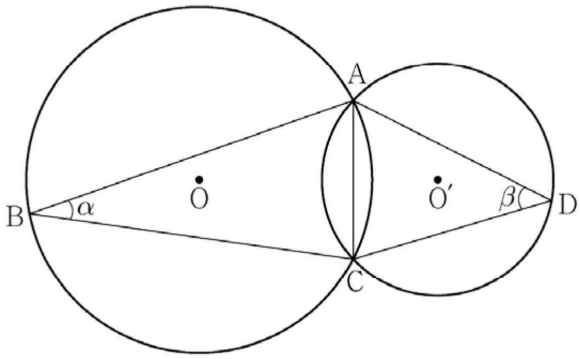
2022학년도 대학수학능력시험 예시문항 21번	난이도 : ★★★

그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 ∠ABC$=\alpha$, ∠ADC$=\beta$라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\quad \overline{\mathrm{OO'}}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



해설

세 점 A, B, C를 지나는 원을 O, 세 점 A, C, D를 지나는 원을 O'라 할 때,

원 O의 반지름을 R이라 할 때, 사인법칙에 따라 $\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\alpha}=2R$이고

원 O'의 반지름을 r이라 할 때, 사인법칙에 따라 $\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\beta}=2r$이다.

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\alpha}}{\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\beta}}=\frac{2R}{2r}=\frac{3}{2}$에서 $R=3k$, $r=2k$로 둘 수 있다.

원주각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{AOC}=2\alpha$, $\angle\mathrm{AO'C}=2\beta$이고, $\angle\mathrm{COO'}=\alpha$, $\angle\mathrm{CO'O}=\beta$이다.

삼각형 OCO′에서 $\overline{\mathrm{OC}}=R=3k$, $\overline{\mathrm{O'C}}=r=2k$, $\cos(\angle\mathrm{OCO'})=\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$이고

코사인법칙에 따라서 $\overline{\mathrm{OO'}}^2=9k^2+4k^2-2\times6k^2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$에서 $17k^2=1$, $k=\frac{\sqrt{17}}{17}$ $(k>0)$이다.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\pi R^2=9\pi k^2=\frac{9}{17}\pi$이고, $p=17$, $q=9$, $p+q=26$이다.

Comment

두 삼각형 ABC, ACD에서 선분 AC는 고정되어 있지만 두 점 B, D는 $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$만 만족시키면서 **원 위를 돌아다니는 어떤 점이어도 상관없습니다.**

점 B의 입장에서는 $\angle ACB$, $\angle BAC$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 중 아무것도 결정된 것이 없고
점 D의 입장에서는 $\angle ACD$, $\angle DAC$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ 중 아무것도 결정된 것이 없기 때문입니다.

결론적으로 우리는 두 점 B, D의 위치를 **임의로 지정해서** 문제를 풀이할 수 있습니다.

이를 시험장에서 알아차렸다면 이후 풀이가 자연스럽게 각만 일정한 상황이므로 원주각을 이용하거나, 삼각형의 외심 중 특수한 성질이 있는 직각삼각형을 이용하는 방향으로 흘러가게 됩니다.

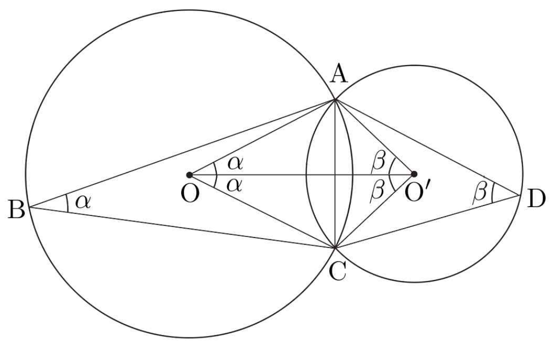
조건을 분석해보면 $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{2}$는 사인법칙에서 반지름의 비를 결정하는 역할을,

$\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{3}$는 $\angle OCO'$를 결정하는 역할을, $\overline{OO'} = 1$는 반지름의 길이를 결정하는 역할을 합니다.

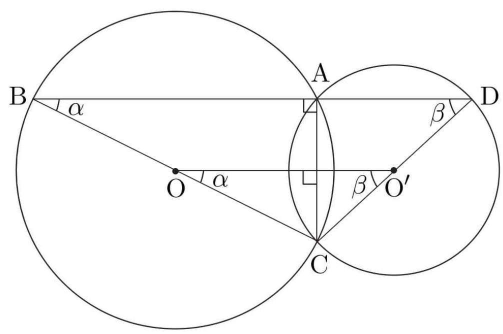
교과과정 내에서 $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{2}$와 같은 식을 따로 다루는 공식을 배운 적이 없으므로 사인법칙을 응용해서 같은 꼴을 만들어보겠다는 생각을 하는 게 합당하고, $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{3}$와 같은 식을 다루는 공식은 미적분의 덧셈정리 빼고 없으므로 그림 내에서 두 각 α와 β를 더한 꼴을 찾겠다고 생각했으면 베스트입니다.

$\overline{OO'} = 1$를 제외하곤 길이를 특정 지을 정보가 없으니 이를 이용해서 길이를 찾고 마무리하면 됩니다. (만약 구하는 값이 넓이가 아니라 각이나 길이의 비율에 관한 것이었다면 $\overline{OO'} = 1$는 조건으로 주어지지 않았겠죠....?)

그 외



원주각을 이용할 시 나오는 그림



직각삼각형의 외심을 이용할 시 나오는 그림