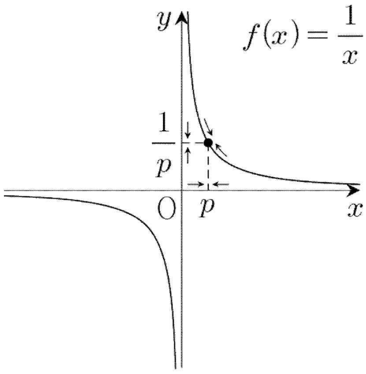
2023 수능 수학독본 샘플 (by 이동훈)

주제 04 구간이 나누어진 함수의 연속성 : 유리함수

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 연속성에 대하여 알아보자.



위의 그림처럼 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에 속하는 임의의 실수 p에 대하여

$$\lim_{x\to p}f(x)=f(p)$$

이므로 함수 $f(x)$는 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.

하지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이 아니다.

몇 개의 예를 더 생각해보자.

함수 $y=\dfrac{1}{x-1}$는 $x=1$에서 불연속이다. (왜냐하면 $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)
그리고 이 함수는 두 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이다. 이처럼 점에서의 연속성과 구간에서의 연속성을 구별할 수 있어야 한다.

함수 $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이다. (왜냐하면 $x=1$, $x=2$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)
그리고 이 함수는 세 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ \infty)$에서 연속이다.

2023 수능 수학독본 샘플 (by 이동훈)

함수 $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}$는 $x=1$에서 불연속이다. (왜냐하면 $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.) 그리고 이 함수는 두 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이다.
이 함수의 방정식을 정리하면
$y=x-2(x\neq 1)$
이다. 이때, 이 함수가 $x=1$에서 불연속임을 잊어서는 안 된다.

함수 $y=\dfrac{x}{x(x-1)}$은 $x=0$, $x=1$에서 불연속이다. (왜냐하면 $x=0$, $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)
이 함수의 방정식을 정리하면
$y=\dfrac{1}{x-1}$ (단, $x\neq 0$, $x\neq 1$)
이다. 이때, 이 함수가 $x=0$에서 불연속임을 잊어서는 안 된다.

함수 $y=\dfrac{1}{x^2-x+1}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
왜냐하면 모든 실수 x에 대하여 (분모)$=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이기 때문이다.

함수 $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}(a\neq 0)$이 실수 전체의 집합에서 연속일 필요충분조건은
$ax^2+bx+c\neq 0$ 즉, (판별식)$=b^2-4ac<0$
이다. 다시 말하면 (분모)$\neq 0$ $\Leftrightarrow$ (분모)>0 또는 (분모)<0이다.

삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수
$y=\dfrac{1}{f(x)}$
은 적어도 1개 이상의 점에서 불연속이다.
왜냐하면 모든 삼차방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나 이상의 실근을 갖기 때문이다. 이때, 한 실근을 α라고 하면
$f(x)=(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ $(a\neq 0)$
이고, 함수
$y=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$
는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

2023 수능 수학독본 샘플 (by 이동훈)

문제 12

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\dfrac{x}{f(x)}$는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이다.
(나) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

$f(4)$의 값을 구하시오. [4점](2019(6)-나형28)[1)]

〈문제12〉
앞선 이론을 이해하였다면 생각보다 쉬운 문제이다.

2023 수능 수학독본 샘플 (by 이동훈)

예제 5

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $x=0$에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)g(x)=x$
(나) $g(0)=1$

이때, $f(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[풀이]

조건 (나)에서

$f(0)g(0)=f(0)\times 1=0$, 즉, $f(0)=0$

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^2+ax$

로 두자.

조건 (가)에서

$g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$)

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$ 즉,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2+ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{1}{a}=1$, $a=1$

$\therefore$ $f(x)=x^2+x$

$\therefore$ $f(2)=6$

답 ④

2023 수능 수학독본 샘플 (by 이동훈)

문제 13

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점](2019-나형21)[2)]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

〈문제13〉

식 변형의 필요충분조건에 대하여 고민해보자.

2023 수능 수학독본 샘플 (by 이동훈)

아래는 풀이입니다.

---

1)

12 | 답 24

[풀이1] 시험장

(가): 함수 $f(x)$가 $x-1$과 $x-2$를 인수로 가지면 함수 $\dfrac{x}{f(x)}$는 $x=1$과 $x=2$에서 불연속이다.

이차함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=k(x-1)(x-2)$ $(k\neq 0)$

(나): $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}k(x-1)=k=4$

$\therefore$ $f(4)=4\times 3\times 2=24$

답 24

[풀이2]

이차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는다고 가정하자.

모든 실수 x에 대하여

$f(x)>0$ ($\leftarrow$최고차항의 계수가 양수인 경우)

또는

$f(x)<0$ ($\leftarrow$최고차항의 계수가 음수인 경우)

이므로 조건 (가)에서 주어진 함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 이는 가정에 모순이다.

이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는다고 하자.

인수정리에 의하여

$f(x)=k(x-\alpha)^2$(단, k는 0이 아닌 상수)

조건 (가)에서 주어진 함수는

$$y=\frac{x}{k(x-\alpha)^2}$$

$\alpha=0$이면 $y=\dfrac{1}{kx}$이므로, 이 함수는 $x=0$에서만 불연속이다.($\because$ 함수가 $x=0$에서 정의되지 않기 때문이다.)

$\alpha\neq 0$이면 이 함수는 $x=\alpha$에서만 불연속이다.($\because$ 함수가 $x=\alpha$에서 정의되지 않기 때문이다.)

정리하면 이 함수는 $x=\alpha$에서만 불연속이다. 이는 가정에 모순이다.

따라서 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

인수정리에 의하여

$f(x)=k(x-\beta)(x-\gamma)$

(단, k는 0이 아닌 상수, $\beta<\gamma$)

조건 (가)에서 주어진 함수는

$$y=\frac{x}{k(x-\beta)(x-\gamma)}$$

$\beta=0$이면 $y=\dfrac{x}{kx(x-\gamma)}$이므로, 이 함수는 $x=0$, $x=\gamma$에서 불연속이다.($\because$ 함수가 $x=0$, $x=\gamma$에서 정의되지 않기 때문이다.)

$\gamma = 0$이면 $y = \dfrac{x}{kx(x-\beta)}$이므로, 이 함수는 $x=0$, $x=\beta$에서 불연속이다.($\because$ 함수가 $x=0$, $x=\beta$에서 정의되지 않기 때문이다.)
이는 가정에 모순이다. 따라서 $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$이다.
이 함수는 $x=\beta$, $x=\gamma$에서 불연속이므로 $\beta=1$, $\gamma=2$이다.
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x) = k(x-1)(x-2)$
조건 (나)에서 함수의 극한에 대한 성질에 의하여
$\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \to 2} k(x-1) = k = 4$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x) = 4(x-1)(x-2)$
$\therefore\ f(4) = 24$
답 24

[참고1]
조건 (가)에서 바로 $f(x) = k(x-1)(x-2)$(단, k는 0이 아닌 상수)로 둘 수도 있다. 왜냐하면
함수 $\dfrac{x}{k(x-1)(x-2)}$ $(k \neq 0)$가 $x=1$, $x=2$에서 불연속인 것은 자명하기 때문이다.

[참고2]
다음의 두 명제를 함께 기억해둘 필요가 있다.
함수 $y = \dfrac{1}{x}$은 실수 전체의 집합에서 연속이다. (거짓)
함수 $y = \dfrac{1}{x}$은 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다. (참)
첫 번째 명제가 거짓인 이유는 함수 $y = \dfrac{1}{x}$이 $x=0$에서 정의되지 않으므로 불연속이기 때문이다.

2)
13 | 답 ①

[풀이1] 시험장
조건 (가)에서 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면
$f(0)g(0) = f(0) = 0$ $(\because g(0) = 1)$
함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x) = x(x^2 + ax + b)$
함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2+ax+b} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

이때, (분모)$= x^2 + ax + b > 0$이어야 한다.
그래야 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 수 있다.

2023 수능 수학독본 샘플 (by 이동훈)

($\because$ 만약 방정식 $x^2+ax+b=0$이 실근을 가지면 (분모)$=0$이 되는 x가 존재하므로 함수 $g(x)$는 불연속이다.)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4b<0$ $\cdots$㉠

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\dfrac{3}{b}=1=g(0)$, 즉 $b=3$ $\cdots$㉡

$f(1)=1+a+b=a+4$가 자연수이므로

a는 -3 이상의 정수이다. 즉,

$a=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ $\cdots$㉢

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$, 즉 $-3\le a\le 3$ $\cdots$㉣

㉢, ㉣에서

$a=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$g(2)=\dfrac{5}{2a+7}$는 $a=3$일 때 최솟값 $\dfrac{5}{13}$를 갖는다.

답 ①

[풀이2] ★

조건 (가)에서 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=0$ 즉, $f(0)=0$

($\because$ 조건(나)에서 $g(0)=1$)

인수정리에 의하여

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 둘 수 있다.

$f(x)=x(x^2+ax+b)$

(단, a, b는 상수)

이를 조건 (가)에 대입하면

$x(x^2+ax+b)g(x)=x(x+3)$

이제 이차방정식

$x^2+ax+b=0$ $\cdots$(*)

에 대하여 생각하자.

- (1) 이차방정식 (*)이 서로 다른 두 실근을 갖는다고 가정하자.

이차방정식 (*)의 서로 다른 두 실근을 α, β라고 하자.(단, $\alpha<\beta$)

인수정리에 의하여

$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$

이므로

$x(x-\alpha)(x-\beta)g(x)=x(x+3)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim\limits_{x\to\alpha}x(x-\alpha)(x-\beta)g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}x(x+3)$

($\because$ 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g(\alpha)$의 값이 존재하고, $\lim_{x\to\alpha} g(x) = g(\alpha)$이다.)

$0 = \alpha(\alpha+3)$ 즉, $\alpha^2 + 3\alpha = 0$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to\beta} x(x-\alpha)(x-\beta)g(x) = \lim_{x\to\beta} x(x+3)$

($\because$ 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g(\beta)$의 값이 존재하고, $\lim_{x\to\beta} g(x) = g(\beta)$이다.)

$0 = \beta(\beta+3)$ 즉, $\beta^2 + 3\beta = 0$

따라서 두 수 α, β는 이차방정식 $x^2 + 3x = 0$의 서로 다른 두 실근이다.

즉, $\alpha = -3$, $\beta = 0$

$x^2(x+3)g(x) = x(x+3)$

양변을 $x(x+3)(\neq 0)$으로 나누면

$g(x) = \frac{1}{x}$(단, $x \neq 0$, $x \neq -3$)

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0,\ -3) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

그런데 $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$는 발산하므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 불연속이다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 이차방정식 (*)은 서로 다른 두 실근을 갖지 못한다.

- (2) 이차방정식 (*)이 중근을 갖는다고 하자.

이차방정식 (*)의 중근을 α라고 하자.

인수정리에 의하여

$x^2 + ax + b = (x-\alpha)^2$

이므로

$x(x-\alpha)^2 g(x) = x(x+3)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to\alpha} x(x-\alpha)^2 g(x) = \lim_{x\to\alpha} x(x+3)$

($\because$ 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g(\alpha)$의 값이 존재하고, $\lim_{x\to\alpha} g(x) = g(\alpha)$이다.)

$0 = \alpha(\alpha+3)$ 풀면 $\alpha = -3$ 또는 $\alpha = 0$

$\alpha = 0$일 때, 함수 $f(x)$의 방정식은

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

그런데 $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{3}{x}\right)$은 무한대로 발산하므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 불연속이다.

$\alpha = -3$일 때, 함수 $f(x)$의 방정식은

2023 수능 수학독본 샘플 (by 이동훈)

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3} & (x\neq 0,\ -3)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

그런데 $\lim_{x\to -3} g(x)=\lim_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}$은 발산하므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 이차방정식 (*)은 중근을 갖지 못한다.

귀류법에 의하여 이차방정식 (*)은 실근을 갖지 않는다.

- (3) 이차방정식 (*)이 실근을 갖지 않는 경우 (즉, 서로 다른 두 허근을 갖는 경우)

이차방정식 (*)의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4b<0$ $\cdots$ ㉠

모든 실수 x에 대하여

$x^2+ax+b>0$

이므로 함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x^2+ax+b} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2+ax+b}=\frac{3}{b}=1=g(0)$$

이므로 $b=3$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+ax^2+3x$(단, a는 상수)

$f(1)=a+4$가 자연수이므로

a는 -3 이상의 정수이다.

그리고 $b=3$을 ㉠에 대입하면

$a^2-12<0$ 풀면 $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

그런데

$-4<-2\sqrt{3}<-3,\ 3<2\sqrt{3}<4$

이므로 a는 -3 이상 3 이하의 정수이다.

$2a+7$가 양수이므로

$g(2)=\dfrac{5}{2a+7}$는

$a=3$일 때, 최솟값 $\dfrac{5}{13}$를 갖는다.

답 ①