칼럼을 시작하기에 앞서 예상 가능한 질문들에 답변 :

1. 선생님은 사실상 문항 제작 원툴 아니었나요? 비법을 공개해도 괜찮나요?

어차피 수능 수학 문제는 제가 제일 잘 만들 수 있을 거라는 스스로에 대한 믿음이 있습니다.

2. 수능 수학은 재능 보다는 노력의 영역이라고 들었는데, 제작도 노력의 영역인가요?

저는 좀 더 재능을 탄다고 생각합니다. 정확히 말하면, 시간대비 퀄리티가 재능의 영역이겠지요.

어느 정도 문제를 만드는 능력이 생긴 이후에 소위 평가원틱한 문제를 만드는 것에 시간이

상당히 많이 걸림을 인지할 수 있을 것입니다. 이 시간을 줄이는게 문만러에게 핵심일 듯합니다.

3. 문항 제작은 돈을 많이 버는 것으로 알고 있는데 돈을 벌 목적으로 만들어도 괜찮을까요?

과외하세요. 과외가 제일 돈 많이 법니다. 제작 실력이 증가하는 데 까지 시간이 많이 소요돼요.

4. 이 칼럼 왜 쓰나요? 수험생에게는 도움이 안 되지 않나요? 선생님의 철학과 어울리지 않아요.

수험생들에게는 출제자의 의도를 읽는 방법 즈음의 칼럼으로 보셔도 되도록 썼습니다.

동시에 제가 강사로써 이만큼 컨텐츠를 잘 만들 수 있다는 걸 공개적으로 어필하려고요.

안녕하세요. 김지헌T입니다.

우선, 제가 만들었던 문제의 제작과정을 소개하면서 칼럼의 서두를 써볼까 싶어요.

제가 고3때 만들었던 문제를 최근에 리뉴얼하게 됐는데, 이를 바탕으로 시작해보겠습니다.

우선적으로, 저는 평가원이 문항을 ‘학생들이 교육과정을 잘 이수했는지’ 평가하기 위해 문항을

출제한다고 생각합니다. 따라서 문항 출제의 시작은 반드시 ‘개념’에서 출발합니다.

일단 문제를 첫 시작할 때 곱의 미분법 개념으로부터 시작을 했었습니다.

$$\int_0^x f'(t)g(t)dt+\int_0^x f(t)g'(t)dt=f(x)g(x)-f(0)g(0)$$

우변에서 $f(0)g(0)$은 상수이므로, 저는 이 식을 다음과 같이 변형했습니다.

$$\int_0^x f'(t)g(t)dt+\int_0^x f(t)g'(t)dt-\boldsymbol{f(x)}-\boldsymbol{g(x)}=f(x)g(x)-\boldsymbol{f(x)}-\boldsymbol{g(x)}+C_1$$

왜 이렇게 변형을 했느냐? 항 $f(x)g(x)$을 보고 인수분해 형태로 이끌어 보고 싶었습니다.

따라서 대략적으로 정리하면 $\int_0^x f'(t)g(t)dt+\int_0^x f(t)g'(t)dt-f(x)-g(x)+C_2=\{f(x)-1\}\{g(x)-1\}$.

좌변의 식이 상수함수가 아닌 함수가 된다고 생각해봅시다. 기본적으로 평가원은 조건을 쓸 때

조건이 4개 이상 되는 경우가 없는데, 경험적으로 이는 상당히 복잡해질 것으로 추론됩니다.

따라서 어떤 함수 $h(x)$에 대하여 좌변의 식을 $C_2+h(x)$와 $-h(x)$ 즈음의 합으로 전개할까 싶어요.

그러므로 $\int_0^x f'(t)g(t)dt-f(x)=-h(x)$라 하고 $\int_0^x f(t)g'(t)dt-g(x)=h(x)$라 합시다.

*상당히 발상적으로 느껴질 수 있지만, 추후 설명을 더 하겠습니다. 암튼, 이대로 조건을 써봅시다.

(가) $f(x)-h(x)=\int_0^x f'(t)g(t)dt$

(나) $g(x)+h(x)=\int_0^x f(t)g'(t)dt$

자, 원래 제가 출제하려 했던 상황 자체는 우변의 인수분해 형태에서 출발했음을 잊지 맙시다.

그러면 조건 (가)와 조건 (나)를 합쳤을 때 $g(x)-1=\dfrac{C_2}{f(x)-1}$이므로, $g(x)$는 평행이동을 거친,

$f(x)$에 대한 분수함수 형태가 되겠네요. 일반적으로 분수함수 형태에서 문제가 어떻게 출제됐죠?

두 점근선도 중요한 포인트이고, 두 점근선의 교점에 대한 대칭도 중요한 포인트였고, 이런 저런

생각을 해봅시다. 최종적으로 선택한 개념은 곡선 $\dfrac{1}{x}$은 $(1,\ 1)$에서 접선 $y=-x+2$임을 이용하자

입니다. 볼록성까지 고려했을 때 양수 x에 대하여 $\dfrac{1}{x}\geq -x+2$인데, 이는 산술평균 개념에서도

중요하고 그냥 적당히 이항해서 정리해서 미분해서 증명할 수 도 있으니 분수함수에서 출제되기

좋았기 때문이겠지요. 일단 그러면 (다) 조건을 부등식 쪽으로 끌고 갈 것 까지 정했습니다.

그러면 이제 $h(x)$에 대해서 다시 봐야겠지요. $g(x)=1+\dfrac{C_2}{f(x)-1}$이므로 조건 (가)에서 우변의

integral 안쪽은 $f'(t)+C_2\times\dfrac{f'(t)}{f(t)-1}$이므로 적분할 수 있는 형태가 됩니다.

* 이즈음에서 다시 한 번 짚어봅시다. 앞서 저는 “좌변의 식이 상수함수가 아닌 함수가 된다고 생각해봅시다.”와 같은 말을 했는데, 이는 머릿속에서 수많은 기출 문제를 풀어보면서 느꼈던 것들에 대해서 직관적인 추론에 의함입니다. (실제로 그냥 상수함수로 놓고 출제했습니다.)

이 직관적인 추론을 한번 가볍게 복기해볼게요. 좌변의 식이 상수함수가 아닌 함수가 된다면, 적분 가능한 꼴을 만들기 쉽지 않음을 직감했습니다. 또한, 상수함수라면 $h(x)$가 ln 적분형태로 이끌 수 있을 것이라는 것도 빠르게 눈에 보였습니다. 이정도면 괜찮게 문제가 나오겠죠.

이에 따라 계산해보면 $h'(x)$의 식이 나올 것이고, $h(x)=\ln|f(x)+1|+C_3$이 될 텐데 세 함수의 식을 천천히 써놓고 부등식으로 어떻게 연결지을 수 있을지 떠올려봅시다.

$f(x)=f(x)$ / $g(x)=1+\dfrac{C_2}{f(x)-1}$ / $h(x)=\ln|f(x)+1|+C_3$

$f(x)=X$로 치환하고 본다면, $y=X$, $y=1+\dfrac{C_2}{X-1}$ 그리고 $y=\ln|X+1|+C_3$가 되네요.

저는 이 세 식을 보자마자 $\dfrac{1}{x}\geq -x+2$임을 잘 이용하면 $f(x)>h(x)>g(x)$ 꼴의 부등식을 유도할 수 있음이 보였습니다. (그래프의 형태 자체를 머리 속에서 그릴 수 있어야겠지요.)

자 그러면, 이에 따라 C_1, C_2, C_3의 값을 잘 조정하면서 문제를 이쁘게 만들어 봅시다.

본디 우리가 만드는 문제는 ‘수험생’이 풀 것이며, 수험생은 상당히 비주얼을 중요히 여깁니다. (비주얼이 안 좋으면 사설틱하다는 이야기를 들으니까!) 완성본은 다음과 같습니다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(x)-h(x)=\int_0^x f'(t)g(t)dt$

(나) $g(x)+h(x)=\int_0^x \{f(t)+2\}g'(t)dt$

(다) 0이 아닌 모든 x에 대하여 $f(x)>h(x)>g(x)$이다.

$g(2)e^{h(2)}$의 값을 구하시오.

이정도 문제를 만들었으면 문제에 대해서 스스로 평가해봅시다. 개념은 우선 곱의 미분법 형태에서 적분 꼴 유도한 것 썼고, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$도 분명히 접하는 형태로 이끌어지겠네요.

대소비교하려면 이계도함수까지 써야 될 수 있음도 학생들한테 복기해줄 수 있을 것 이구.

$h(x)$ 계산 과정에서 $\ln$ 적분 꼴도 썼네요. 이정도면 나쁘지 않은 문제입니다.

문제를 만드는 과정 자체는 생각보다 할만했을거라 느끼셨을겁니다.

예과때 누군가 저에게 문제를 어떻게 만드느냐 하면 항상 이러한 방식으로 설명을 해주었었죠.

저는 이 방식을 소위, '짜놓은 상황에 끼워 맞추는' 출제 방식이라고 합니다.

하지만 핵심적인 개념을 녹이는 것에 곁다리가 상당히 많이 들어가면서, 사설틱하긴 하네요.

제가 고3때 만들던 방식대로 문제를 출제하면 다음과 같은 문제가 생깁니다.

우선 학생들이 문제를 풀다가 보면 이게 왜 냈는지 모릅니다. 왜냐면 핵심개념을 완벽히 녹이기 쉽지 않아요. 다만 이 방식이 문제를 처음 만들기 시작하는 분들께는 쉬운 방식일 듯 합니다.

다음 칼럼은 기출 변형에 대한 칼럼입니다.