함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)에서 함수 $\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$의 도함수

$\sqrt{4-2f(x)}$ 또한 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 함수 $\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$는 실수 전체의

집합에서 미분가능하다. (공통과목 문제에서 '함수가 미분가능하다.'와 '도함수가 연속이다.'를

같다고 생각하자!) 따라서 조건 (나)에 따라 함수 $f(x)$ 또한 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$4-2f(x) \geq 0$에서 $f(x) \leq 2$이며 $f(0)=\int_0^0 \sqrt{4-2f(t)}\,dt=0$이고 $f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$이므로 $f'(0)=2$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 미분가능하고 조건 (가)에서 $f'(b)=\sqrt{4-2f(b)}=\sqrt{4-2c}=0$이므로

$c=2$이다. 따라서 식 $2a(x-b)=\sqrt{4-2\{a(x-b)^2+2\}}$의 양변을 제곱하면

$4a^2(x-b)^2=4-2\{a(x-b)^2+2\}$이며, 양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $4a^2=-2a$이고

일차항의 계수를 비교하면 $-8a^2b=4ab$이다. 즉, $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=0$이다.

$a=0$일 때 $f(x)=2$에서 앞서 구한 $f'(0)=2$에 모순이므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.

이차함수 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-b)^2+2$가 $x<b$에서 원점을 지나므로 $b>0$이고 $b^2=4$에서 $b=2$이다.

이때 $f(x) \leq 2$이고 $\sqrt{4-2f(x)} \geq 0$에서 함수 $f'(x) \geq 0$이므로 $x \geq 2$에서 $f(x)=2$이다.

$\therefore \int_0^2 -\frac{1}{2}(x-2)^2+2\,dx+4=\frac{32}{3}$에서 $p=3$, $q=32$이므로 $p+q=35$이다.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $f'(x)=2\sqrt{f(x)}$

(나) 방정식 $\int_0^x f(t)dt=f(x)$는 오직 서로 다른 두 실근 α, β만을 가지며 $\alpha+\beta=5$이다.

$(6\alpha+\beta)^3$의 값을 구하시오. (단, α와 β는 상수이다.)

조건 (가)를 분석하기 위해 단순화하여 $f(x)$가 다항함수라 가정하자.

수학에서 복잡한 문제를 해결하기 위해 단순화하여 시작하는 것이 자주 사용되는 접근법이었음을, 가령 실수 a의 n제곱근에서 a가 갖추어야할 조건을 n이 자연수일 때에서 출발하여 각각 n이 정수, 유리수, 실수일 때로 넘어갔음을 통해 기억하자. $f(x)$가 상수함수가 아니라면 $f(x)$가 n차 함수라 할 때 좌변은 $(n-1)$차함수이며 우변은 $\frac{n}{2}$차함수이므로 $n-1=\frac{n}{2}$에서 $n=2$이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, $(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2=4ax^2+4bx+4c$이고 양변의 최고차항의 계수를 비교하여 각각 $4a^2=4a$에서 $a=0$ 또는 $a=1$이며 $a=0$일 때 $f(x)=0$이고 $a=1$일 때 $b^2=4c$, 즉 $f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$이다. 이렇게 큰 틀을 잡고 본격적으로 조건 (가)를 분석해보자.

$f(x)\neq 0$일 때, 양변에 $2\sqrt{f(x)}$를 나눌 수 있으므로 $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=1$에서 $\sqrt{f(x)}=x+C$, $f(x)=(x+C)^2$이다. 한편, $f(x)=0$일 때 또한 $f'(x)=0$에서 조건 (가)가 성립함을 확인할 수 있다. $\sqrt{f(x)}$의 미분이 선택과목에서 미적분을 고르지 않은 학생이 풀 수 없지 않느냐 할 수 있지만, $\sqrt{f(x)}=g(x)$라 할 때, $f(x)=\{g(x)\}^2$의 도함수가 $f'(x)=2g(x)g'(x)$이므로 식 $f'(x)=\sqrt{f(x)}$에서 $2g(x)g'(x)=g(x)$이다. 따라서 $g(x)=0$ 이거나 $g'(x)=1$에서 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=(x+C)^2$이 성립함을 확인할 수 있다.

"모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$" 이거나 "모든 실수 x에 대하여 $f(x)=(x+C)^2$"은 아닐 수 있다!

즉, 한 번 더 $f(x)$가 다항함수라 가정하고 조건 (나)를 분석하자. $f(x)=0$일 때 식 $\int_0^x f(t)dt=f(x)$이 항등식이 되므로 주어진 조건을 만족하지 않는다. $f(x)=(x+C)^2$일 때, $\int_0^0 f(t)dt=0$에서

방정식 $\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 오직 두 실근만을 가지므로 두 곡선 $y=\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3$과 $y=(x+C)^2$이 접할 때, 즉 $(x+C)^2=2(x+C)$에서 $x+C=0$ 또는 $x+C=2$이다.

$x+C=0$일 때 식 $\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 성립해야하므로 $C=0$이고, 방정식 $\frac{1}{3}x^3=x^2$이 두 실근 $x=0$과 $x=3$을 가지지만 두 실근의 합이 3이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다.

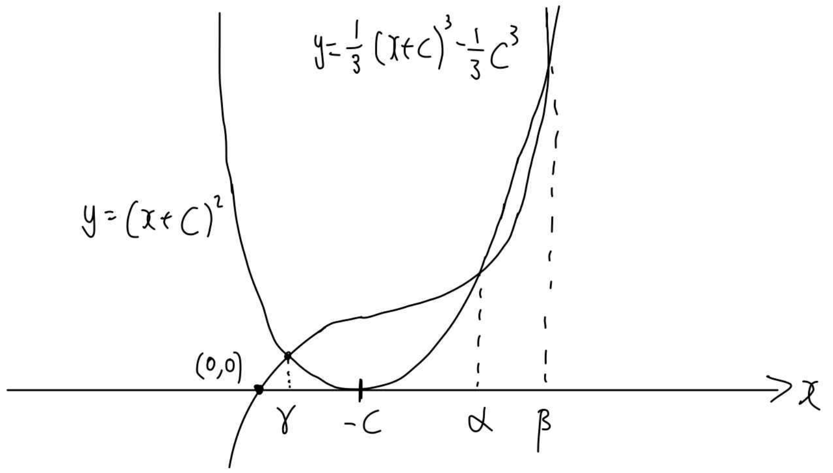
$x+C=2$일 때 식 $\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 성립해야하므로 $\frac{8}{3}-\frac{1}{3}C^3=4$에서 $C=-\sqrt[3]{4}$이고, 방정식 $\frac{1}{3}(x-\sqrt[3]{4})^3+\frac{4}{3}=(x-\sqrt[3]{4})^2$은 $x-\sqrt[3]{4}=X$라 할 때 $\frac{1}{3}X^3-X^3+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(X-2)^2(X+1)=0$에서 두 실근 $x=2+\sqrt[3]{4}$와 $x=-1+\sqrt[3]{4}$을 가지지만 두 실근의 합이 $1+2\sqrt[3]{4}$이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다. ($x+C=2$에서 $\frac{1}{3}X^3-X^3+\frac{4}{3}$이 $(X-2)^2$을 인수로 가짐을 유추한 이후, 상수항을 각각 비교하여 다른 인수가 $X+1$임을 찾음으로써 계산을 줄일 수 있다. 물론 $x-\sqrt[3]{4}=X$와 같이 치환을 하여 식을 단순화한 것 역시 중요하다. 수능은 '시간 안에' 푸는 게 중요함을 잊지 말자.)

따라서 $f(x)$는 '구간에 따라' $f(x)=0$이거나 $f(x)=(x+C)^2$이고, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)$는 두 상수 p, q에 대하여 다음과 같이 세 경우로 나눌 수 있다.

$i)\ f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le p) \\ (x-p)^2 & (x>p) \end{cases}$, $ii)\ f(x)=\begin{cases} (x-p)^2 & (x\le p) \\ 0 & (x>p) \end{cases}$, $iii)\ f(x)=\begin{cases} (x-p)^2 & (x\le p) \\ 0 & (p<x<q) \\ (x-q)^2 & (x\ge q) \end{cases}$

방정식 $\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 $x>C$에서 서로 다른 두 실근을 갖고 $x<C$에서 한 근을 가질 것이라 가정할 때, $x<C$에서 갖는 근을 $x=\gamma$라 하자. 이때 $i)$의 경우에서 서로 다른 두 실근을 가질 수 있다. (다음 쪽의 그래프를 통해 이를 확인하자.) $(x+C)^2\ge 0$에서 사이값 정리에 의하여 $0<\gamma<-C$이다. (함수 $y=\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3-(x+C)^2$이 $x=\gamma$에서 부호변화가 생김을

관찰하자.) 이 때 두 곡선 $y=\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3$와 $y=(x+C)^2$의 그래프는 다음과 같다.



앞서 계산한 결과를 바탕으로 $-\frac{1}{3}C^3>\frac{4}{3}$일 때, 즉 $C<-\sqrt[3]{4}$일 때 방정식

$\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 $x>C$에서 서로 다른 두 실근을 갖고 $x<C$에서 한 근을 가진다.

$x+C=X$에서 삼차방정식 $\frac{1}{3}X^3-X^2-\frac{1}{3}C^3=0$의 세 실근의 합은 근과 계수의 관계에 따라

$(\alpha+C)+(\beta+C)+(\gamma+C)=3$이다. 조건 (나)에서 $\alpha+\beta=5$이므로 $5+\gamma+3C<5+2C\neq 3$이므로

$(\because 5+2C<5-2\sqrt[3]{4}<3)$ 조건 (나)를 만족하지 않는다.

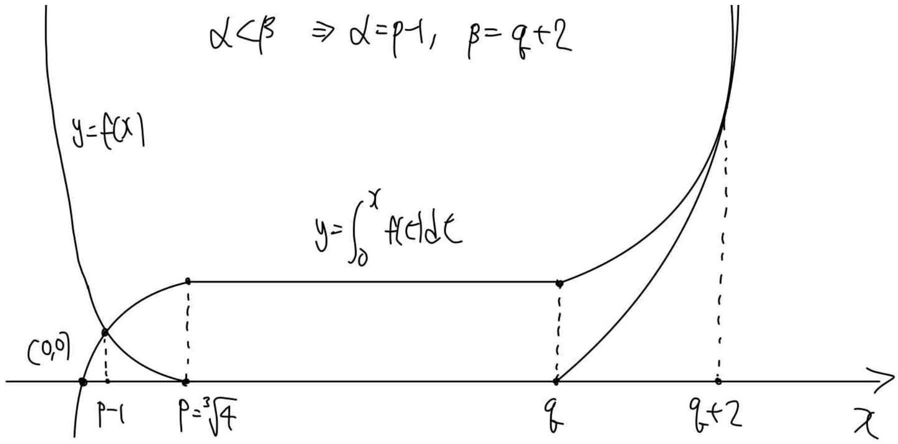
$ii)$의 경우 $x\le p$일 때 $f(x)$는 감소함수이며 $\int_0^x f(t)dt$는 증가함수이므로 방정식 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$

의 $x\le p$에서 실근의 개수는 1 또는 0이다. 또한 $x>p$에서 $f(x)$와 $\int_0^x f(t)dt$는 상수함수이므로

조건 (나)를 만족하지 않는다. 그러므로 $iii)$에서 $f(x)=\begin{cases}(x-p)^2 & (x\le p)\\ 0 & (p<x<q)\\ (x-q)^2 & (x\ge q)\end{cases}$이다.

$\int_0^{\sqrt[3]{4}} t^2dt=\frac{4}{3}$이고 $\int_0^x f(t)dt$는 원점 (0, 0)을 지나므로 $\int_0^{\sqrt[3]{4}} t^2dt=\int_0^{\sqrt[3]{4}}(t-\sqrt[3]{4})^2dt$에서 $p=\sqrt[3]{4}$

이다. 따라서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=\int_0^x f(t)dt$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건 (나)와 $\frac{1}{3}X^3-X^3+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(X-2)^2(X+1)=0$에서 $\alpha+\beta=(p-1)+(q+2)=\sqrt[3]{4}-1+q+2=5$

이므로 $q=4-\sqrt[3]{4}$이다. $\therefore\alpha=\sqrt[3]{4}-1,\ \beta=6-\sqrt[3]{4},\ (6\alpha+\beta)^3=\left(5\sqrt[3]{4}\right)^3=500$

상당히 어려운 문제이지만 많은 개념을 압축하여 집어넣은 '킬러'이므로 큰 흐름을 다시 읽어보자.

식 $f'(x)=2\sqrt{f(x)}$에서 $f(x)\neq 0$일 때, $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=1$에서 $\sqrt{f(x)}=x+C,\ f(x)=(x+C)^2$

이다. 한편, $f(x)=0$일 때 또한 조건 (가)가 성립했다.

$f(x)$가 미분가능하므로 $f(x)$는 다항함수이거나 (상수함수 또는 이차함수)

$i)\ f(x)=\begin{cases}0 & (x\le p)\\(x-p)^2 & (x>p)\end{cases},\ ii)\ f(x)=\begin{cases}(x-p)^2 & (x\le p)\\0 & (x>p)\end{cases},\ iii)\ f(x)=\begin{cases}(x-p)^2 & (x\le p)\\0 & (p<x<q)\\(x-q)^2 & (x\ge q)\end{cases}$

의 경우일 것이다. $f(x)$가 상수함수인 경우 조건 (나)의 식이 항등식이 되어 만족하지 않았다.

$f(x)$가 이차함수인 경우 조건 (나)의 방정식의 실근의 개수가 2일 때 가능한 그래프의 개형이 두 개 나왔으나 두 실근의 합이 각각 3과 $1+2\sqrt[3]{4}$가 되어 조건 (나)를 만족하지 않았다.

$i)$의 경우 사이값 정리와 근과 계수의 관계를 통하여 조건 (나)를 만족할 수 없음을 보였다.

$ii)$의 경우 증가와 감소함수의 특징을 이용하여 조건 (나)의 방정식의 실근의 개수가 2가 될 수 없음을 보였다. 그러므로 $iii)$에서 이전의 계산 결과들을 통해 정답을 도출할 수 있었다.