211205 김지헌 portfolio

1p ~ 2p :

출제의도 : 등차수열은 정의역이 자연수 전체의 집합인 일차함수이다.

3p ~ 5p :

출제의도 : 명제의 대우를 통해 익숙하지 않은 유형을 익숙한 유형으로 변환하기.

6p ~ 8p :

출제의도 : 구간에 대한 집합적 해석과 다항함수 개형의 전반적인 이해도 점검

9p ~ 10p :

출제의도 : 몫의 미분법과 합성함수의 적분, 그리고 초월함수의 개형 이해도 점검 (미적분)

11p ~ 12p :

출제의도 : 삼각함수의 주기성과 역함수의 미분가능성, 미분계수의 이해도 점검 (미적분)

13p ~ 15p :

출제의도 : 등차수열의 주기성에 따른 주기함수의 새로운 정의 조건 해석 능력 점검

16p ~ 20p :

출제의도 : 호흡이 긴 다항함수의 개형 추론 문제 해결 능력 점검

21p ~ 22p :

출제의도 : 부등식의 극한에 대한 기본적인 이해도 점검

23p ~ 31p :

극한에 대한 개념이 바탕이 됐을 때, 미적분에 대한 개념 서술 일부

32p ~ 45p :

전반적인 개념이 바탕이 됐을 때, 지수로그단원의 실전 개념 서술 일부

7. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_1 = b_5$
(나) 두 자연수 p, q에 대하여 $a_p = b_q$를 만족하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 5이다.

어떤 양의 짝수 m에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} b_k$일 때, m의 값을 구하시오.

수열 $\{a_n\}$의 초항을 a, 공차를 d라 할 때 $a_1 = b_5$에서 $b_5 = a$이다.

조건 (나)에서 $d = 0$일 때 두 자연수 p, q에 대하여 $a_p = b_q$를 만족하는 순서쌍 (p, q)의 개수는 셀 수 없으므로 $d \neq 0$이다. $a_\alpha = b_\beta$이고 1보다 큰 상수 α와 5보다 큰 상수 β가 존재한다고 가정할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{1+n(\alpha-1)} = b_{5+n(\beta-5)}$이다. $q \geq 1$이므로 $p \leq 5$이며, 이는 수열 $\{b_n\}$의 공차를 d'이라 할 때 $d \times d' < 0$임을 의미한다. 즉, 가능한 p는 $p = 1, 2, 3, 4, 5$이다.

따라서 어떤 음의 정수 s에 대하여 $d' = sd$이다. $a_k - b_k = c_k$를 만족하는 c_k에 대하여 등차수열 $\{c_n\}$은 $c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) = (a_{n+1} - a_n) - (b_{n+1} - b_n) = d - sd = (1-s)d$이므로

$c_{n+1} = c_n + (1-s)d$, $c_5 = a_5 - b_5 = a_5 - a_1 = 4d$이다. 즉, $c_n = (n-5)\{(1-s)d\} + 4d$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k = m \times \left(\frac{c_1 + c_m}{2}\right) = m \times \left(\frac{4sd + (m-5)\{(1-s)d\} + 4d}{2}\right)$이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} b_k$에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k = 0$이고 $m > 0$에서 $\dfrac{4sd + (m-5)\{(1-s)d\} + 4d}{2} = 0$을 만족하는 양의 짝수를 찾자. $4s + (m-5)(1-s) + 4 = 0$에서 $m - 5 = \dfrac{4s+4}{s-1} = 4 + \dfrac{8}{s-1}$이다. s가 음의 정수이므로 $s = -1, -3, -7$일 때 m의 값은 각각 $m = 5, 7, 8$이고 m은 양의 짝수이므로 $m = 8$이다.

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

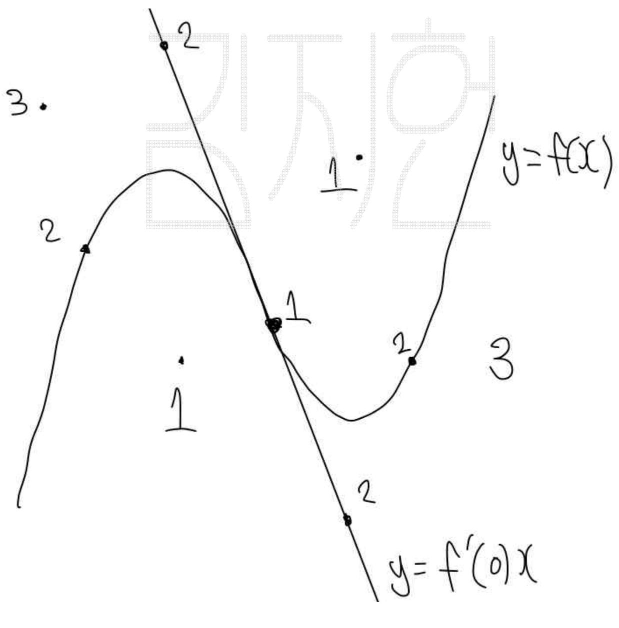
(가) $x \neq 0$에서 정의된 함수 $y = \dfrac{f(x)}{x} - f'(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

(나) $x = \alpha$에서 극솟값, $x = \beta$에서 극댓값을 가지며 $f(\alpha) + \alpha = f(\beta) + \beta$이다.

곡선 $y = f(x)$가 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

조건 (가)에서 $x \neq 0$이라면 $\dfrac{f(x)}{x} - f'(x) \neq 0$이다. 함수 $f(x)$가 다항함수이므로 $\dfrac{f(x)}{x}$는 $x \neq 0$에서 연속함수이다. 따라서 주어진 명제를 "$t \neq 0$이라면 $\displaystyle\lim_{x \to t} \dfrac{f(x)}{x} - f'(x) \neq 0$이다."와 같이 쓰자. 이때 명제의 대우는 $\displaystyle\lim_{x \to t} \dfrac{f(x)}{x} - f'(x) = 0$이라면 $t = 0$이다. 즉, $\displaystyle\lim_{x \to t} \dfrac{f(x)}{x} = f'(t) = m$인 어떤 실수 m이 존재한다. $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to t} \dfrac{f(x)}{x} = m \\ f'(t) = m \end{cases}$에서 $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to t} f(x) = mt \\ f'(t) = m \end{cases}$이고 $\begin{cases} f(t) = mt \\ f'(t) = m \end{cases}$이다. 다시 말해 $\begin{cases} f(t) = mt \\ f'(t) = m \end{cases}$이라면 $t = 0$이다. 이때 $f(0) = 0$이고, 이는 원점에서 곡선 $y = f(t)$위의 원점이 아닌 임의의 점에 대해 접선을 그을 수 없음을 의미한다. 조건 (나)에서 $y = f(x)$가 극값을 가지는 삼차함수이므로 좌표평면 위의 임의의 점에서 곡선 $y = f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수는 다음과 같다.



* 극값을 갖는 삼차함수 $y = f(x)$에 대하여 좌표평면 위의 점에서 그래프에 그을 수 있는 접선의 개수는 변곡점에서의 접선의 그래프를 $y = l(x)$라 할 때 다음과 같다.

그을 수 있는 접선의 개수	$y = f(x)$	$y \neq f(x)$
$y = l(x)$	1	2
$y \neq l(x)$	2	3

$x\neq 0$에서 연립방정식 $\begin{cases} f(x)=mx \\ f'(x)=m \end{cases}$의 실근의 개수가 0임을 주목하자. 위의 그림을 참고하였을 때

점 $(0,\ 0)$이 변곡점이 아니라고 가정하면 $x\neq 0$에서 연립방정식 $\begin{cases} f(x)=mx \\ f'(x)=m \end{cases}$는 적어도 하나의

실근을 가진다. 따라서 함수 $f(x)$는 원점이 변곡점이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

삼차함수는 변곡점에 대하여 점대칭인 함수이므로 $\beta=-\alpha$이며 $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$f(x)=x^3+3\alpha\beta x$에서 $f(\beta)-f(\alpha)=-\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$이다. 조건 (나)에서 $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=-1$이므로

$-\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{\beta-\alpha}=-(\beta-\alpha)^2=-4\alpha^2=-1$이므로 $\alpha=\dfrac{1}{2},\ \beta=-\dfrac{1}{2},\ f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x$이다.

방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$가 x축으로 둘러싸인 부분의

넓이는 $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{0} x^3-\frac{3}{2}x\,dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} -\left(x^3-\frac{3}{2}x\right)dx=\frac{9}{8}$이다. $\therefore p=8,\ q=9,\ p+q=17$

13. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$는 $x<2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수의 그래프의 일부이며, $x \geq 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 최고차항의 계수가 1인 이차함수의 그래프의 일부이다. 함수 $g(x)=\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$는 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $g(x)$의 극솟값의 집합은 $\{0\}$이다.

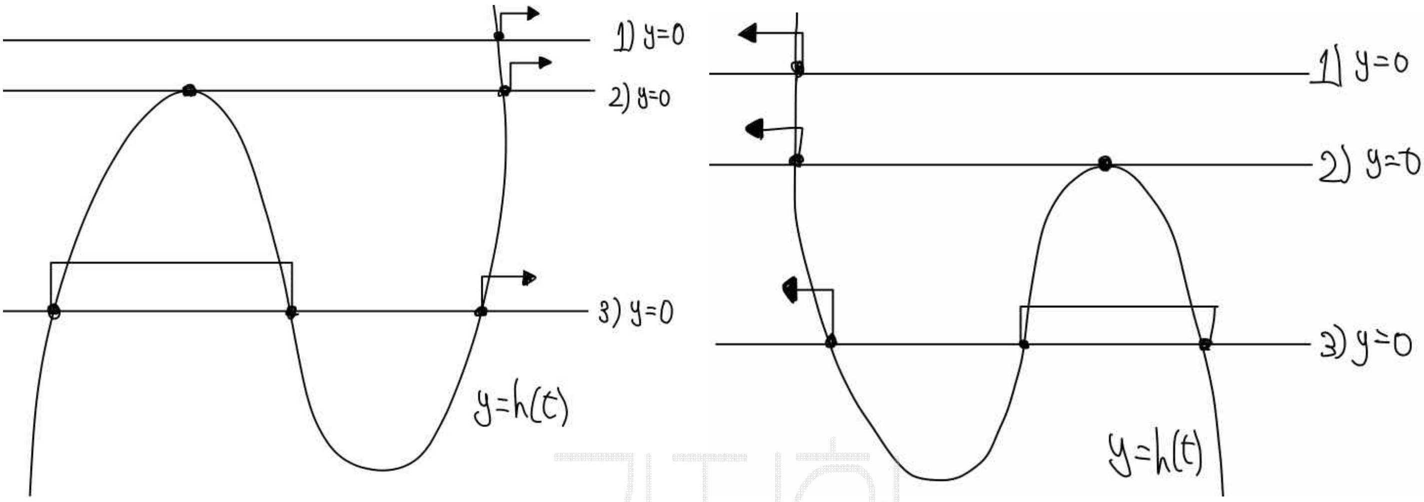
(나) $x=8$에서 극값을 갖는 삼차함수 $h(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 t의 집합은 $\{t|h(t) \geq 0\}$이다.

$f(3)-f(1)$의 값을 구하시오.

함수 $f(x)$를 $f(x)=\begin{cases} f_1(x) \ (x<2) \\ f_2(x) \ (x \geq 2) \end{cases}$라 할 때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가함수이므로

$x<2$에서 $f_1{}'(x) \geq 0$이고 $x \geq 2$에서 $f_2{}'(x) \geq 0$이며 $g(x)=\begin{cases} f_1{}'(x) \ (x<2) \\ f_2{}'(x) \ (x \geq 2) \end{cases}$이다.

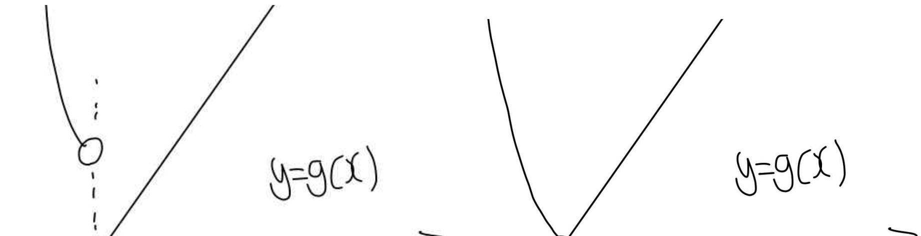
$h(t)$가 극값을 가지는 삼차함수의 개형이므로 집합 $\{t | h(t) \geq 0\}$은 1) 반닫힌구간이거나 2) 반닫힌 구간과 원소의 개수가 하나인 집합의 합집합이거나 3) 닫힌구간과 반닫힌구간의 합집합이다.



i) $x<2$에서 $f_1{}'(x)>0$인 경우,

$x<2$에서 $f_1{}'(x)>f'_1(2)$이다. $f_2{}'(x)$가 증가함수이므로 조건 (가)에서 $f_2{}'(2)=0$이다.

따라서 $f_1{}'(2)>0$일 때와 $f_1{}'(2)=0$일 때에 따라 $y=g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



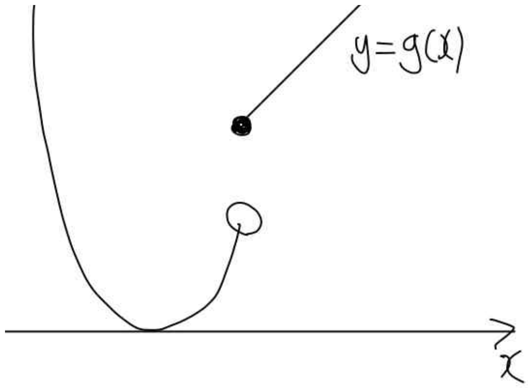
이때 조건 (나)에서 방정식 $g(x)=t$의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 t의 집합은 열린구간

이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

ii) $x<2$에서 $f_1{}'(x)=0$인 x가 존재하는 경우,

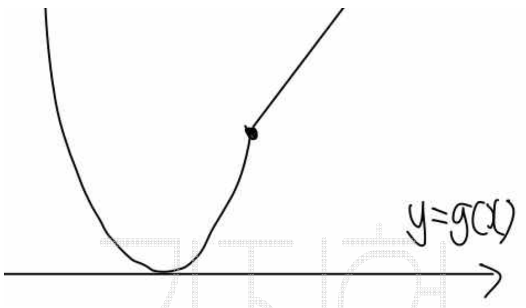
$t<2$인 어떤 실수 t에 대하여 $f_1(x)=(x-t)^3$이다. $f_1{}'(2)<f_2{}'(2)$라 가정할 때 $y=g(x)$의 그래프

개형은 다음과 같다.



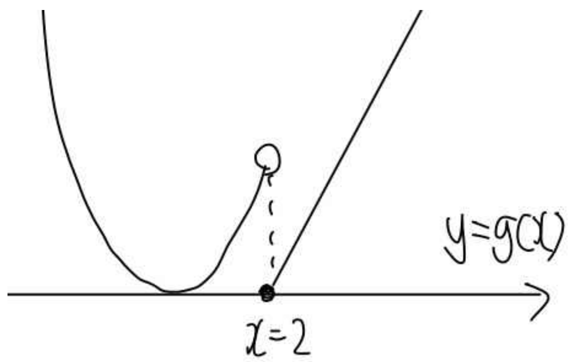
조건 (나)에서 방정식 $g(x)=t$의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 t의 집합은 열린구간과 반닫힌 구간의 합집합이므로 $f_1{}'(2) \geq f_2{}'(2)$이다.

$f_1{}'(2)=f_2{}'(2)$일 때 $y=g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



조건 (나)에서 방정식 $g(x)=t$의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 t의 집합은 반열린구간이다.

따라서 $f_1{}'(2) > f_2{}'(2)$이며 이때 $y=g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



이때 조건 (가)에서 함수 $g(x)$의 극솟값은 반드시 0이고 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극솟값 $f_2{}'(2)$를 가지므로 $f_2{}'(2)=0$이다. 함수 $h(x)$의 최고차항의 계수를 a라 할 때, $a>0$이고 $h(t)=at^2\left(t-f_1{}'(2)\right)$

이므로 $h'(t)=3at\left(t-\frac{2}{3}f_1{}'(2)\right)$에서 $\frac{2}{3}f_1{}'(2)=8$이다. $\therefore f_1{}'(2)=3(2-t)^2=12$

$t<2$에서 $t=0$이므로 $f(x)=\begin{cases} x^3+c & (x<2) \\ (x-2)^2+8+c & (x \geq 2) \end{cases}$이고 $f(3)-f(1)=9+c-1-c=8$이다.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $x \neq 2$에서 $f(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)}$이다.

(나) 음이 아닌 모든 실수 p에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=p$의 실근의 개수는 1이다.

함수 $y=f(x)$의 모든 변곡점의 x좌표의 합을 구하시오.

$x \neq 2$에서 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$에서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$를 $\alpha(x)$라 할 때 $\dfrac{\alpha(x)'}{\alpha(x)} = 1$이다.

즉, $\ln|\alpha(x)| = x + C$, $|\alpha(x)| = e^{x+C}$이다. (단, C는 상수이다.)

조건 (나)에서 방정식 $f(x) = 0$의 실근의 개수는 1이고 $e^{x+C} > 0$, $-e^{x+C} < 0$이므로 방정식 $g(x) = 0$

의 실근이 오직 하나 존재한다. 이때, 조건 (가)에서 $x \neq 2$에서 $g(x) \neq 0$이므로 $g(x) = (x-2)^2$이다.

즉, $x \neq 2$에서 $f(x) = (x-2)^2 e^{x+C}$ 또는 $f(x) = -(x-2)^2 e^{x+C}$이다.

$x < 2$에서 $f(x) = (x-2)^2 e^{x+C}$이라 가정할 때, $f'(x) = (x^2 - 2x)e^{x+C}$에서 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서

극대이다. 즉, $x < 2$에서 $0 < t < f(0)$인 모든 실수 t에 대하여 방정식 $f(x) = t$의 실근의 개수는 2

이다. 따라서 $x < 2$에서 $f(x) = -(x-2)^2 e^{x+C}$이다.

$x > 2$에서 $f(x) = -(x-2)^2 e^{x+C}$이라 가정할 때 임의의 양수 t에 대하여 방정식 $f(x) = t$은 실근이

존재하지 않는다. 따라서 $x > 2$에서 $f(x) = (x-2)^2 e^{x+C}$이다. $\therefore f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 e^{x+C_1} & (x \geq 2) \\ -(x-2)^2 e^{x+C_2} & (x < 2) \end{cases}$

$f''(x) = \begin{cases} (x^2 - 2)e^{x+C_1} & (x > 2) \\ 0 & (x = 2) \\ -(x^2 - 2)e^{x+C_2} & (x < 2) \end{cases}$이므로 곡선 $y = f(x)$의 변곡점은 $\left(-\sqrt{2},\ -(2+\sqrt{2})^2 e^{-\sqrt{2}+C_2}\right)$,

$\left(\sqrt{2},\ -(2-\sqrt{2})^2 e^{\sqrt{2}+C_2}\right)$, $(2,\ 0)$이다. $\therefore -\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 = 2$

상수 a에 대하여 $a-2 \leq x < a$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $\cos\left\{\frac{\pi}{2}f(x)\right\}=1-x$

(나) 함수 $\{f(x)\}^2$은 미분가능한 함수이다.

$\lim_{x\to a+}\pi^2 f'(x-2)f(x-2)$의 값을 구하시오.

$1-\cos\left\{\frac{\pi}{2}f(x)\right\}=x$에서 함수 $g(x)=1-\cos\frac{\pi}{2}x$에 대하여 $g(f(x))=x$이다.

a가 짝수가 아닐 때 $f(x)$는 적어도 한 점에서 불연속이므로 a는 짝수이다.

$a-2<\alpha<a$인 α에 대하여 극한값 $\lim_{x\to\alpha}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(\alpha)\}^2}{x-\alpha}$이 존재한다.

$\alpha=a-2$일 때 극한값 $\lim_{x\to\alpha+}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(\alpha)\}^2}{x-\alpha}$이 존재한다.

$f(\alpha)=\beta,\ x=g(t)$라 할 때 $g'(f(x))f'(x)=1$에서 $g'(\beta)\neq 0$일 때 함수 $\{f(x)\}^2$은 미분가능하므로

$\lim_{x\to\alpha}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(\alpha)\}^2}{x-\alpha}=2f(\alpha)f'(\alpha)=\frac{2\beta}{g'(\beta)}$이다.

$$\because\ \lim_{x\to\alpha}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(\alpha)\}^2}{x-\alpha}=\lim_{t\to\beta}\frac{\{f(g(t))\}^2-\beta^2}{g(t)-g(\beta)}=\lim_{t\to\beta}\frac{t^2-\beta^2}{g(t)-g(\beta)}=\lim_{t\to\beta}\frac{(t-\beta)(t+\beta)}{g(t)-g(\beta)}=\frac{2\beta}{g'(\beta)}$$

$g'(\beta)=0$일 때 $\sin\frac{\pi}{2}\beta=0$에서 β는 짝수이다. $\beta\neq 0$이라면 극한값 $\lim_{t\to\beta}\frac{t^2-\beta^2}{g(t)-g(\beta)}$이 존재하지

않는다. 즉, $f(\alpha)$가 짝수일 때, $f(\alpha)=0$이 성립한다.

a는 짝수이며 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $f(a-2)$의 값은 0 또는 2이므로 $f(a-2)=0$이다.

$$\therefore\lim_{x\to a+}\pi^2f'(x-2)f(x-2)=\frac{\pi^2}{2}\times\lim_{x\to a-2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a-2)\}^2}{x-(a-2)}=\frac{\pi^2}{2}\times\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{g(t)-g(0)}=\frac{\pi^2}{2}\times\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos\frac{\pi}{2}t}$$

$\frac{\pi}{2}t=T$라 할 때 $t\to 0$에서 $T\to 0$이므로 $\frac{\pi^2}{2}\times\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos\frac{\pi}{2}t}=\frac{\pi^2}{2}\times\frac{4}{\pi^2}\times\lim_{T\to 0}\frac{T^2}{1-\cos T}=2$이다.

$$\therefore\lim_{x\to a+}\pi^2f'(x-2)f(x-2)=2$$

공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$와 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $x > 2a_1$인 x에 대하여 $g(x)$는 일차함수이다.

(나) 모든 자연수 n과 구간 $[a_2,\ a_1]$에 속하는 x에 대하여 $f(x) = g(x + a_n)$이다.

(다) 모든 자연수 n에 대하여 $g(n) = a_n$이다.

함수 $g(x)$의 최댓값을 M이라 할 때, $\dfrac{9+\sqrt{3}}{M}$의 최댓값을 구하시오.

수열 $\{a_n\}$의 초항을 a, 공차를 d라 할 때 조건 (가)와 조건 (다)에서 $a_n = a+(n-1)d = g(n)$이고

$x > 2a$에서 $g(x) = dx + a - d$이다. 또한, $2a > 1$일 때 $n=1$에서 조건 (다)를 만족하지 않으므로

$a \le \dfrac{1}{2}$이다. 조건 (나)에서 $n=1$일 때 $2a+d \le x \le 2a$에서 $f(x-a) = g(x)$이며 $n=2$일 때

$2a+2d \le x \le 2a+d$에서 $f(x-a-d) = g(x)$이다. $x = 2a+d$이며 $n=1$과 $n=2$일 때를 비교하면

$f(a+d) = f(a)$, 즉 $f(a_2) = f(a_1)$이다. 일반화하여 $n=k$와 $n=k+1$일 때를 각각 비교하면

$f(x) = g(x+a_k) = g(x+a_{k+1})$에서 $x \le 2a$에서 $g(x+d) = g(x)$이 성립한다. $\therefore g'(x+d) = g'(x)$

주기함수를 등차수열을 이용하여 조건 (나)와 같은 표현법으로 나타낼 수 있음을 주목하자.

$f(a_2) = f(a_1)$이면서 $f'(a_2) = f'(a_1)$이 가능한 경우에 대해서 고려해보자. 우선적으로 수열 $\{a_n\}$의

공차가 0이 아니므로 $a_2 \ne a_1$이고 $f(a_2) = f(a_1)$에서 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 가진다.

삼차함수 $f(x)$의 그래프가 변곡점을 기준으로 점대칭이므로 $f(a_2) = f(a_1)$이면서 $f'(a_2) = f'(a_1)$일

때 변곡점의 y좌표는 $f(a_2) = f(a_1)$이다. 즉, $f(x)$의 최고차항의 계수를 p, 상수항을 q라 할 때

$f(x) = p(x-a)\left(x-a-\dfrac{d}{2}\right)(x-a-d)+q$이다. $x = 2a$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 2a-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2a+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2a-} g'(x) = \lim\limits_{x\to 2a+} g'(x)$에서 $g(2a) = f(a) = q = 2ad + a - d$이고

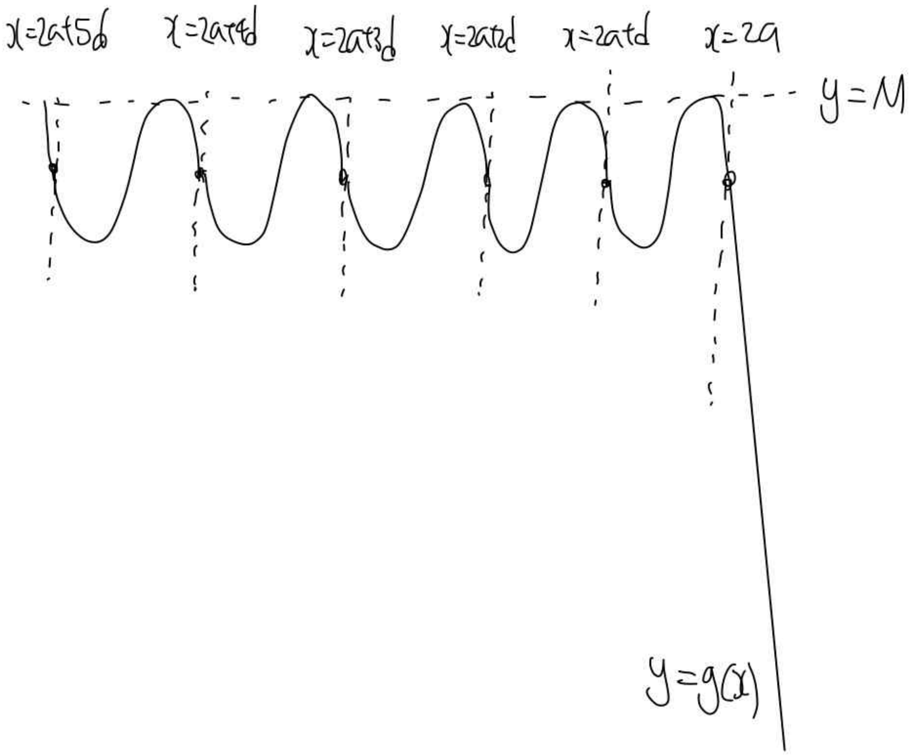
$f'(x) = p\left(x-a-\dfrac{d}{2}\right)(x-a-d) + p(x-a)(x-a-d) + p(x-a)\left(x-a-\dfrac{d}{2}\right)$에서

$g'(2a) = f'(a) = p\left(-\dfrac{d}{2}\right)(-d) = d$이고 $d \ne 0$이므로 $p = \dfrac{2}{d}$이다.

따라서 $f(x) = \dfrac{2}{d}(x-a)\left(x-a-\dfrac{d}{2}\right)(x-a-d) + 2ad + a - d$이다.

$$\therefore g(x) = \begin{cases} dx + a - d & (x > 2a) \\ \dfrac{2}{d}(x-2a)\left(x-2a-\dfrac{d}{2}\right)(x-2a-d) + 2ad + a - d & (2a+d < x \le 2a) \\ g(x-d) & (x < 2a+d) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



계산의 편의성을 위해 함수 $g(x)$와 도함수 $g'(x)$를 x축 음의 방향으로 $2a+\dfrac{d}{2}$만큼 평행이동하여

관찰하자. 즉, $g'\left(x+2a+\dfrac{d}{2}\right)=\dfrac{2}{d}x\left(x-\dfrac{d}{2}\right)+\dfrac{2}{d}\left(x+\dfrac{d}{2}\right)\left(x-\dfrac{d}{2}\right)+\dfrac{2}{d}x\left(x+\dfrac{d}{2}\right)=\dfrac{2}{d}\left(3x^2-\dfrac{d^2}{4}\right)$에서

$g'\left(x+2a+\dfrac{d}{2}\right)=0$일 때 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}d$이다. 따라서 $x=2a+\dfrac{d}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}d$에서 $g(x)$는 극댓값을 가진다.

$g\left(2a+\dfrac{d}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}d\right)=\dfrac{2}{d}\times\left(\dfrac{d}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}d\right)\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6}d\right)\times\left(-\dfrac{d}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}d\right)+2ad+a-d=\dfrac{\sqrt{3}}{18}d^2+2ad+a-d$

이고 $a\le\dfrac{1}{2}$, $d\le-1<-\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{\sqrt{3}}{18}d^2+2ad+a-d=\dfrac{\sqrt{3}}{18}d^2+a(2d+1)-d\ge\dfrac{\sqrt{3}}{18}d^2+\dfrac{1}{2}$

이고 다시 $d\le-1$에서 $\dfrac{\sqrt{3}}{18}d^2+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{\sqrt{3}+9}{18}$에서 함수 $g(x)$의 극댓값 M은 $a=\dfrac{1}{2}$, $d=-1$에서

최솟값 $\dfrac{\sqrt{3}+9}{18}$을 가진다. $M\ge\dfrac{\sqrt{3}+9}{18}$에서 $18\ge\dfrac{\sqrt{3}+9}{M}$이므로 $\dfrac{9+\sqrt{3}}{M}$의 최댓값은 18이다.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $f'(x)=2\sqrt{f(x)}$

(나) 방정식 $\int_0^x f(t)dt=f(x)$는 오직 서로 다른 두 실근 α, β만을 가지며 $\alpha+\beta=5$이다.

$(6\alpha+\beta)^3$의 값을 구하시오. (단, α와 β는 상수이다.)

조건 (가)를 분석하기 위해 단순화하여 $f(x)$가 다항함수라 가정하자.

수학에서 복잡한 문제를 해결하기 위해 단순화하여 시작하는 것이 자주 사용되는 접근법이었음을,

가령 실수 a의 n제곱근에서 a가 갖추어야할 조건을 n이 자연수일 때에서 출발하여 각각 n이

정수, 유리수, 실수일 때로 넘어갔음을 통해 기억하자. $f(x)$가 상수함수가 아니라면 $f(x)$가 n차

함수라 할 때 좌변은 $(n-1)$차함수이며 우변은 $\frac{n}{2}$차함수이므로 $n-1=\frac{n}{2}$에서 $n=2$이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, $(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2=4ax^2+4bx+4c$이고 양변의 최고차항의

계수를 비교하여 각각 $4a^2=4a$에서 $a=0$ 또는 $a=1$이며 $a=0$일 때 $f(x)=0$이고 $a=1$일 때

$b^2=4c$, 즉 $f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$이다. 이렇게 큰 틀을 잡고 본격적으로 조건 (가)를 분석해보자.

$f(x)\neq 0$일 때, 양변에 $2\sqrt{f(x)}$를 나눌 수 있으므로 $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=1$에서

$\sqrt{f(x)}=x+C$, $f(x)=(x+C)^2$이다. 한편, $f(x)=0$일 때 또한 $f'(x)=0$에서 조건 (가)가 성립함을

확인할 수 있다. $\sqrt{f(x)}$의 미분이 선택과목에서 미적분을 고르지 않은 학생이 풀 수 없지 않느냐

할 수 있지만, $\sqrt{f(x)}=g(x)$라 할 때, $f(x)=\{g(x)\}^2$의 도함수가 $f'(x)=2g(x)g'(x)$이므로

식 $f'(x)=\sqrt{f(x)}$에서 $2g(x)g'(x)=g(x)$이다. 따라서 $g(x)=0$ 이거나 $g'(x)=1$에서 $f(x)=0$ 또는

$f(x)=(x+C)^2$이 성립함을 확인할 수 있다.

"모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$" 이거나 "모든 실수 x에 대하여 $f(x)=(x+C)^2$"은 아닐 수 있다!

즉, 한 번 더 $f(x)$가 다항함수라 가정하고 조건 (나)를 분석하자. $f(x)=0$일 때 식 $\int_0^x f(t)dt=f(x)$

이 항등식이 되므로 주어진 조건을 만족하지 않는다. $f(x)=(x+C)^2$일 때, $\int_0^0 f(t)dt=0$에서

방정식 $\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 오직 두 실근만을 가지므로 두 곡선 $y=\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3$과 $y=(x+C)^2$이 접할 때, 즉 $(x+C)^2=2(x+C)$에서 $x+C=0$ 또는 $x+C=2$이다.

$x+C=0$일 때 식 $\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 성립해야하므로 $C=0$이고, 방정식 $\frac{1}{3}x^3=x^2$이 두 실근 $x=0$과 $x=3$을 가지지만 두 실근의 합이 3이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다.

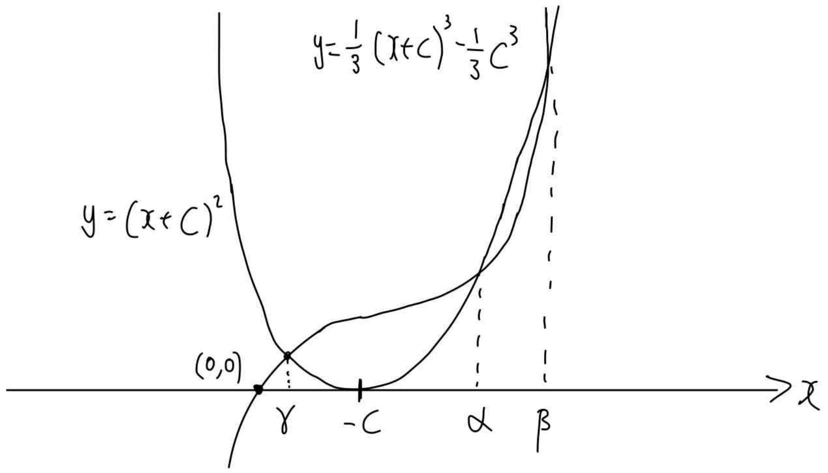
$x+C=2$일 때 식 $\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 성립해야하므로 $\frac{8}{3}-\frac{1}{3}C^3=4$에서 $C=-\sqrt[3]{4}$이고, 방정식 $\frac{1}{3}(x-\sqrt[3]{4})^3+\frac{4}{3}=(x-\sqrt[3]{4})^2$은 $x-\sqrt[3]{4}=X$라 할 때 $\frac{1}{3}X^3-X^3+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(X-2)^2(X+1)=0$에서 두 실근 $x=2+\sqrt[3]{4}$와 $x=-1+\sqrt[3]{4}$을 가지지만 두 실근의 합이 $1+2\sqrt[3]{4}$이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다. ($x+C=2$에서 $\frac{1}{3}X^3-X^3+\frac{4}{3}$이 $(X-2)^2$을 인수로 가짐을 유추한 이후, 상수항을 각각 비교하여 다른 인수가 $X+1$임을 찾음으로써 계산을 줄일 수 있다. 물론 $x-\sqrt[3]{4}=X$와 같이 치환을 하여 식을 단순화한 것 역시 중요하다. 수능은 '시간 안에' 푸는 게 중요함을 잊지 말자.)

따라서 $f(x)$는 '구간에 따라' $f(x)=0$이거나 $f(x)=(x+C)^2$이고, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)$는 두 상수 p, q에 대하여 다음과 같이 세 경우로 나눌 수 있다.

$$i)\ f(x)=\begin{cases}0 & (x\le p)\\(x-p)^2 & (x>p)\end{cases},\quad ii)\ f(x)=\begin{cases}(x-p)^2 & (x\le p)\\0 & (x>p)\end{cases},\quad iii)\ f(x)=\begin{cases}(x-p)^2 & (x\le p)\\0 & (p<x<q)\\(x-q)^2 & (x\ge q)\end{cases}$$

방정식 $\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 $x>C$에서 서로 다른 두 실근을 갖고 $x<C$에서 한 근을 가질 것이라 가정할 때, $x<C$에서 갖는 근을 $x=\gamma$라 하자. 이때 $i)$의 경우에서 서로 다른 두 실근을 가질 수 있다. (다음 쪽의 그래프를 통해 이를 확인하자.) $(x+C)^2\ge 0$에서 사이값 정리에 의하여 $0<\gamma<-C$이다. (함수 $y=\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3-(x+C)^2$이 $x=\gamma$에서 부호변화가 생김을

관찰하자.) 이 때 두 곡선 $y=\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3$와 $y=(x+C)^2$의 그래프는 다음과 같다.



앞서 계산한 결과를 바탕으로 $-\frac{1}{3}C^3>\frac{4}{3}$일 때, 즉 $C<-\sqrt[3]{4}$일 때 방정식

$\frac{1}{3}(x+C)^3-\frac{1}{3}C^3=(x+C)^2$이 $x>C$에서 서로 다른 두 실근을 갖고 $x<C$에서 한 근을 가진다.

$x+C=X$에서 삼차방정식 $\frac{1}{3}X^3-X^2-\frac{1}{3}C^3=0$의 세 실근의 합은 근과 계수의 관계에 따라

$(\alpha+C)+(\beta+C)+(\gamma+C)=3$이다. 조건 (나)에서 $\alpha+\beta=5$이므로 $5+\gamma+3C<5+2C\neq 3$이므로

$(\because 5+2C<5-2\sqrt[3]{4}<3)$ 조건 (나)를 만족하지 않는다.

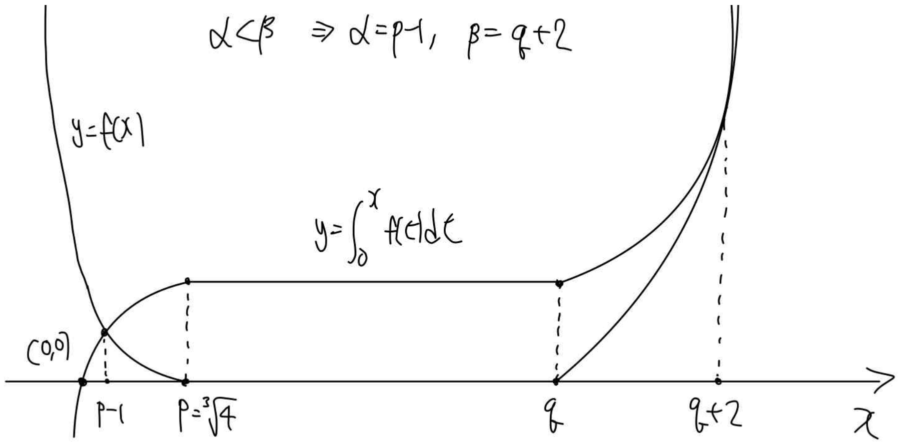
$ii)$의 경우 $x\leq p$일 때 $f(x)$는 감소함수이며 $\int_0^x f(t)dt$는 증가함수이므로 방정식 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$

의 $x\leq p$에서 실근의 개수는 1 또는 0이다. 또한 $x>p$에서 $f(x)$와 $\int_0^x f(t)dt$는 상수함수이므로

조건 (나)를 만족하지 않는다. 그러므로 $iii)$에서 $f(x)=\begin{cases}(x-p)^2 & (x\leq p)\\ 0 & (p<x<q)\\ (x-q)^2 & (x\geq q)\end{cases}$이다.

$\int_0^{\sqrt[3]{4}} t^2 dt=\frac{4}{3}$이고 $\int_0^x f(t)dt$는 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $\int_0^{\sqrt[3]{4}} t^2 dt=\int_0^{\sqrt[3]{4}}(t-\sqrt[3]{4})^2 dt$에서 $p=\sqrt[3]{4}$

이다. 따라서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=\int_0^x f(t)dt$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건 (나)와 $\dfrac{1}{3}X^3-X^3+\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3}(X-2)^2(X+1)=0$에서 $\alpha+\beta=(p-1)+(q+2)=\sqrt[3]{4}-1+q+2=5$

이므로 $q=4-\sqrt[3]{4}$이다. $\therefore \alpha=\sqrt[3]{4}-1,\ \beta=6-\sqrt[3]{4},\ (6\alpha+\beta)^3=\left(5\sqrt[3]{4}\right)^3=500$

상당히 어려운 문제이지만 많은 개념을 압축하여 집어넣은 '킬러'이므로 큰 흐름을 다시 읽어보자.

식 $f'(x)=2\sqrt{f(x)}$에서 $f(x)\neq 0$일 때, $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=1$에서 $\sqrt{f(x)}=x+C,\ f(x)=(x+C)^2$

이다. 한편, $f(x)=0$일 때 또한 조건 (가)가 성립했다.

$f(x)$가 미분가능하므로 $f(x)$는 다항함수이거나 (상수함수 또는 이차함수)

$i)\ f(x)=\begin{cases}0 & (x\le p)\\(x-p)^2 & (x>p)\end{cases},\ ii)\ f(x)=\begin{cases}(x-p)^2 & (x\le p)\\0 & (x>p)\end{cases},\ iii)\ f(x)=\begin{cases}(x-p)^2 & (x\le p)\\0 & (p<x<q)\\(x-q)^2 & (x\ge q)\end{cases}$

의 경우일 것이다. $f(x)$가 상수함수인 경우 조건 (나)의 식이 항등식이 되어 만족하지 않았다.

$f(x)$가 이차함수인 경우 조건 (나)의 방정식의 실근의 개수가 2일 때 가능한 그래프의 개형이 두

개 나왔으나 두 실근의 합이 각각 3과 $1+2\sqrt[3]{4}$가 되어 조건 (나)를 만족하지 않았다.

$i)$의 경우 사이값 정리와 근과 계수의 관계를 통하여 조건 (나)를 만족할 수 없음을 보였다.

$ii)$의 경우 증가와 감소함수의 특징을 이용하여 조건 (나)의 방정식의 실근의 개수가 2가 될 수

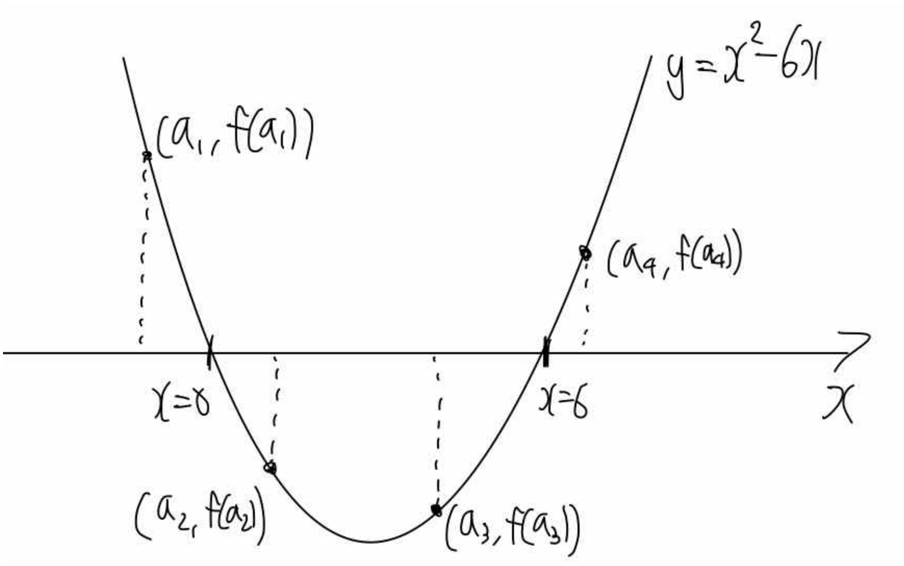
없음을 보였다. 그러므로 $iii)$에서 이전의 계산 결과들을 통해 정답을 도출할 수 있었다.

공차 d가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$은 $f(x)=x^2-6x$에 대하여 다음 조건을 만족한다.

$$f(a_1)>0>f(a_2),\ \ f(a_3)<0<f(a_4)$$

$\lim_{d \to 2+}\frac{a_1}{d-2}-\lim_{d \to 6-}\frac{a_1+6}{d-6}=2$의 최댓값을 구하시오.

주어진 조건에 따라 함수 $y=x^2-6x$의 그래프 개형은 다음과 같다.



$x<3$에서 $f(x)$는 감소하며 $x>3$에서 $f(x)$가 증가하므로 $a_1<0<a_2$, $a_3<6<a_4$이다.

즉, $a_1<0<a_1+d$, $a_1+2d<6<a_1+3d$에서 $-d<a_1<0$이고 $6-3d<a_1<6-2d$이다. 이때

$6-3d\geq 0$이거나 $-d\geq 6-2d$이면 주어진 조건을 만족하는 등차수열 $\{a_n\}$이 존재하지 않는다.

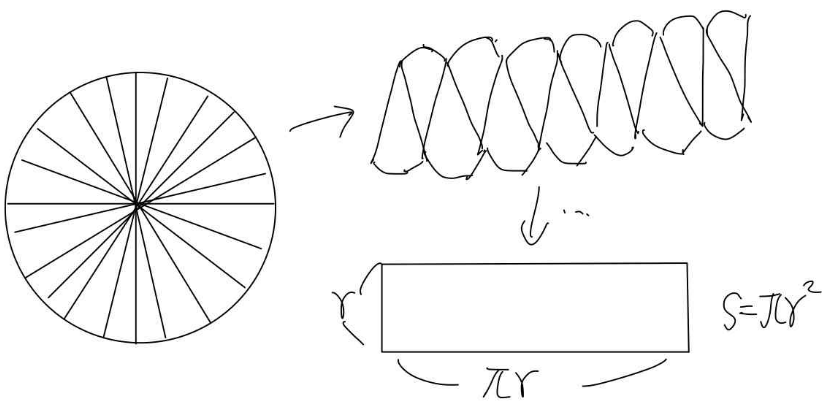
따라서 $6-3d<0$이고 $-d<6-2d$이므로 $2<d<6$이다. 즉, $d-2>0>d-6$이다.

$6-3d<a_1<6-2d$에서 $12-3d<a_1+6<12-2d$이고 $\dfrac{12-3d}{d-6}>\dfrac{a_1+6}{d-6}>\dfrac{12-2d}{d-6}$이다.

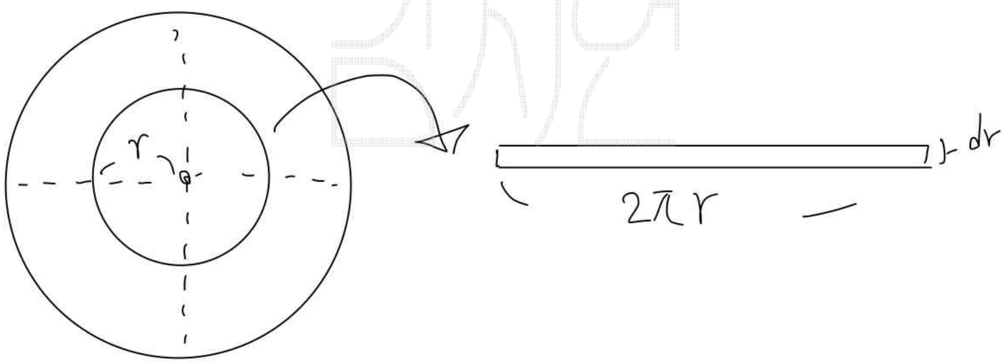
$\lim\limits_{d\to 6-}\dfrac{12-3d}{d-6}\geq\lim\limits_{d\to 6-}\dfrac{a_1+6}{d-6}\geq\lim\limits_{d\to 6-}\dfrac{12-2d}{d-6}=-2$에서 $\lim\limits_{d\to 6-}\dfrac{a_1+6}{d-6}$의 최솟값은 -2이다.

이와 동일하게, $-d<a_1<0$에서 $\dfrac{-d}{d-2}<\dfrac{a_1}{d-2}<0$이다. $\lim\limits_{d\to 2+}\dfrac{-d}{d-2}\leq\lim\limits_{d\to 2+}\dfrac{a_1}{d-2}\leq 0$에서

$\lim\limits_{d\to 2+}\dfrac{a_1}{d-2}$의 최댓값은 0이다. 따라서 $\lim\limits_{d\to 2+}\dfrac{a_1}{d-2}-\lim\limits_{d\to 6-}\dfrac{a_1+6}{d-6}=2$의 최댓값은 2이다.



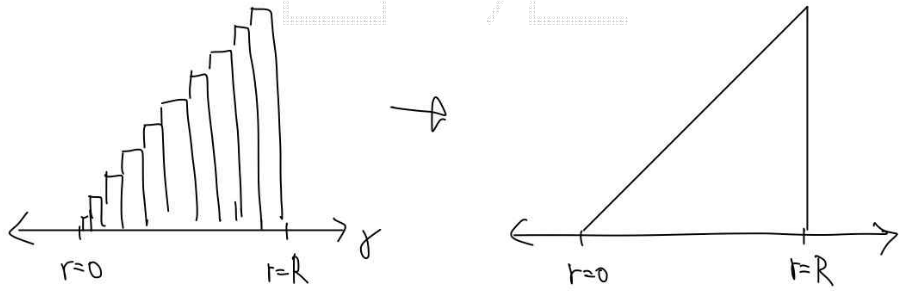
반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 왜 πr^2일까? (이 질문을 보고 반지름의 길이가 r인 원의 둘레는 왜 $2\pi r$인지 의문을 갖지 말자. 원주율 π는 원주(원의 둘레)로부터 정의됐다! 정의의 중요성을 떠올릴 수 있는 대목이다. 원의 넓이가 πr^2임의 증명이 아래의 그림과 같이 교과서에서 다뤄졌음을 기억하자. 본 대목은 원의 넓이를 증명하는 것이 아닌 미적분에 대한 감각을 잡는 것을 위함이다.)



상수 R과 변수 r $(0 < r \leq R)$에 대하여 반지름이 R인 원 A의 넓이를 구하기 위해 원 A의 내부에 존재하는 반지름의 길이가 r인 동심원 B을 떠올려보자. 이때, 원 A의 넓이는 r의 범위에 대하여 반지름의 길이가 r인 모든 원의 둘레의 합과 동일할 것이라 추측할 수 있다. 본디 원의 정의가 한 점으로부터 일정한 거리만큼 떨어진 점들의 집합임을 떠올렸을 때, 원 B는 두께가 존재하지 않아야하지만 '두께가 존재하며, 그 두께가 점점 작아진다고' 가정함을 바탕으로 진행하자.

원 B을 잘라 수직선과 평행하게 놓았을 때 사다리꼴의 모양이 될 것이다. 간단하게 계산하기 위해 이를 직사각형의 형태라 가정하자. 원주의 길이가 $2\pi r$이므로 직사각형의 밑변의 길이는 $2\pi r$일 것

이며, 높이는 아주 작은 값일 것이므로 이 높이를 하나의 원에서 다음 원까지의 아주 작은 반지름 차이, 즉 직사각형의 두께를 나타내는 dr이라 하자. (이때 dr을 증분이라 하며, d는 derivative (미분)의 첫 글자임을 기억하자.) 따라서 잘라진 원은 넓이가 $2\pi r \times dr$인 직선에 가까운 직사각형과 근사하다고 할 수 있다. 비록 이것이 정확하지 않지만, (사다리꼴의 모양이라고 하는 것도 논리적 비약이 존재하지만, 그렇다고 직사각형으로 간주하는 것은 더욱 엄밀하지 못하다!) dr이 점점 더 작아진다고 생각하면 이것은 실제로 그 넓이에 대해 점점 더 가까워질 것이다. 따라서 이 근사치가 약간의 오차가 존재함을 무시하고 진행하도록 하자. dr이 점점 작아지면 오차가 점점 줄어들어 특정한 수치에 수렴한다. 지금까지를 요약하자면 r의 값이 변함에 따라 원 B이 존재하고, 원들을 하나하나 '잘려진 원'의 형태로 변환했을 때 원 B의 원주가 곧 잘려진 원의 넓이($2\pi r \times dr$)가 된다. ($0 < r < R$이며 원들 사이의 간격은 dr로 부르기로 했음을 기억하자.) 모든 잘려진 원 B을 r축 위에 밑변이 dr, 높이가 $2\pi r$이 되도록 크기순으로 배열한다면 다음과 같은 그림으로 표현할 수 있다.



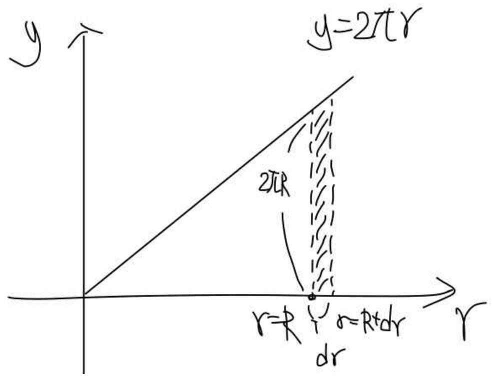
r의 값에 따라 $2\pi r$이 하나로 정해지므로 r축에 수직이고 $r=0$을 지나는 y축을 생각해볼 때, 함수 $y=2\pi r$의 그래프를 왼쪽의 그림에서 표현할 수 있다. 왼쪽의 모든 직사각형은 직선 $y=2\pi r$과 접하면서 항상 그 아래에 있음을 관찰하자. 즉, dr이 점점 작아지면서 모든 직사각형의 넓이의 합은 직선 $y=2\pi r$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $r=R$로 둘러싸인 부분의 넓이에 한없이 가까워진다. 다시 말해 왼쪽의 그림에서 오른쪽의 그림과 같이 근사할 수 있다. 오른쪽 그림에서 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times R \times 2\pi R = \pi R^2$이며, 이것이 바로 반지름의 길이가 R인 원의 넓이가 된다. 이때 r의 값

이 변하더라도 dr의 값은 일정했음과 dr의 값이 점점 작아지면서 관찰할 수 있는 두 개의 변화를 주목하자. 이는 초항과 등차가 모두 dr인 등차수열의 항들은 구간 $(0,\ R]$에 속하는 모든 r을 표현할 수 있었음, 그리고 원의 넓이를 구하기 위해 점점 더 좋은 근사치를 얻을 수 있었음이다. (결국 직각삼각형의 넓이를 통해 원의 넓이에 대한 근사치를 구했다!)

별개의 이야기지만, 원의 넓이를 구하는 공식을 찾는 과정에서 우리가 이미 알고 있던 직사각형의 넓이를 구하는 공식이나 직각삼각형의 넓이를 구하는 공식을 사용했듯, 수많은 학생들을 변별하는 킬러문제 역시 기본적인 개념들을 토대로 출제했음을 잊지 말자. 겁을 먹지 말라는 이야기다.

본론으로 돌아와, 원 A의 넓이가 πR^2임을 알 수 있었다. R의 값에 따라 πR^2이 하나로 결정되는 형태이므로 R의 값에 따른 원 A의 넓이는 함수이며 이를 $S(R)$이라 하자. $S(R)$은 r축과 y축으로 이루어진 ry좌표평면에서 $y=2\pi r$의 그래프에 대하여 0부터 R까지의 $y=2\pi r$의 그래프 아래의 넓이를 의미한다. 따라서 $S(R)$을 $y=2\pi r$의 0부터 R까지의 적분 혹은 기호 $\int$를 이용하여

$S(R)=\int_0^r 2\pi r dr$와 같이 나타낸다. 또한, r의 값을 $r=R$에서 dr만큼 증가시켰을 때 넓이가 사다리꼴만큼 변화하는 것을 부분적으로 관찰할 수 있다. 이러한 넓이의 차이를 dR이라 하자.



dr의 크기가 작아질수록 이 부분은 점점 더 직사각형에 가까워진다. 따라서 $dR \approx dr \times 2\pi R$이 성립하므로 이를 $\frac{dR}{dr} \approx 2\pi R$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 dR의 값은 $S(R+dr)$에서 $S(R)$을 뺀 값과

같으므로 $\dfrac{S(R+dr)-S(R)}{dr} \approx 2\pi R$이다. r의 값이 변하더라도 dr의 값은 일정했으므로 r의 값에

따른 $\displaystyle\lim_{dr\to 0}\frac{dR}{dr}=\lim_{dr\to 0}\frac{S(R+dr)-S(R)}{dr}=2\pi r$은 함수이며, 이를 $S(R)$의 도함수라고 한다.

식 $\dfrac{S(R+dr)-S(R)}{dr}$이 가지는 의미를 생각해보자. 이는 두 점 $(R,\ S(R))$, $(R+dr,\ S(R+dr))$을

지나는 직선의 기울기와 동일함을 알 수 있다. 이를 r의 값이 R에서 $R+dr$까지 변할 때의, 혹은

$r=R$에서의 r의 증분이 dr일 때의 함수 $y=S(R)$의 평균변화율이라고 한다. 이때 dr의 크기가

작아질수록 두 점이 서로 가까워지면서 그 선의 기울기가 점 $(R,\ S(R))$에서의 접선의 기울기에

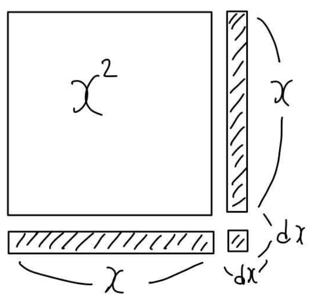
근사한다. 즉, $r=R$에서의 도함수 $\dfrac{dR}{dr}$의 값은 $y=S(R)$에 대한 점 $(R,\ S(R))$에서의 접선의

기울기와 동일하다. 따라서 평균변화율의 극한값인 도함수 $\dfrac{dR}{dr}$의 값을 순간변화율이라고 한다.

여러분이 공부하는 수학은 '수능 수학'이라는 점에서 앞으로 도함수의 함숫값을 원함수의 기울기로

해석할 일이 많겠지만, 본디 미분은 '변화량' (증분)으로 해석했음을 잊지 말자. 이를 통해 다양한

함수의 도함수를 직관적으로 받아들일 수 있다. 가령 $y=x^2$의 도함수는 다음과 같이 보일 수 있다.



한 변의 길이가 x인 정사각형의 넓이는 x^2이므로, 변의 길이가 dx만큼 증가했을 때 dx^2은 색칠한

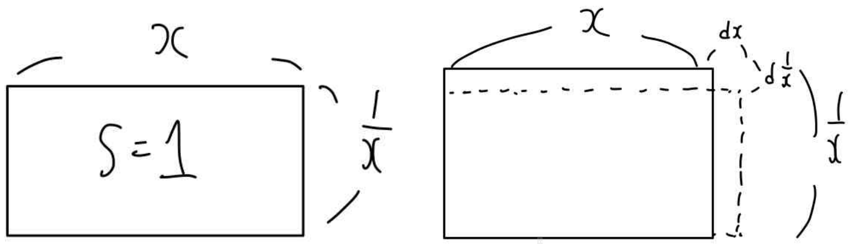
부분의 넓이, 즉 이웃한 두 변의 길이가 각각 x와 dx인 두 직사각형과 한 변의 길이가 dx인

정사각형의 넓이의 합이 된다. 즉, $dx^2=2xdx+(dx)^2$에서 $\dfrac{dx^2}{dx}=2x+dx$이다.

이때 dx는 0은 아니지만 한없이 작아지는 수라고 간주했음을 통해, $\dfrac{dx^2}{dx}=2x$가 된다.

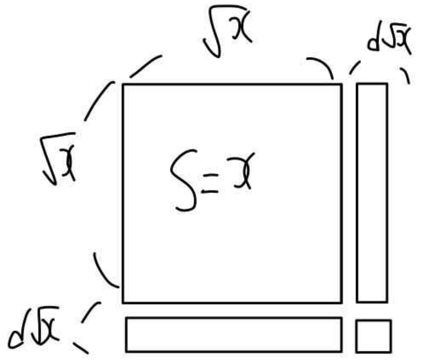
이렇듯 다항함수 $y=x^n$에서 x가 dx만큼 증가할 때 $(x+dx)^n=x^n+nx^{n-1}dx+$(차수가 2 이상인 dx항)에서 $\displaystyle\lim_{dx\to0}\frac{(x+dx)^n-x^n}{(x+dx)-x}=\lim_{dx\to0}nx^{n-1}+dx$(어떠한 다항식)$=nx^{n-1}$이 됨을 기억하자.

또 다른 예시로 $y=\dfrac{1}{x}$의 도함수를 구하기 위해 이웃한 두 변의 길이가 각각 x, $\dfrac{1}{x}$이고 넓이가 1인 직사각형을 떠올릴 수 있다. 이때 x가 dx만큼 늘어날 때, $\dfrac{1}{x}$는 $d\dfrac{1}{x}$만큼 줄어들게 된다.



이때 넓이의 증분 $d(1)=0$이므로 $d(1)=x\times d\left(\dfrac{1}{x}\right)=dx\times\dfrac{1}{x}$에서 $\dfrac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}$이 성립한다.

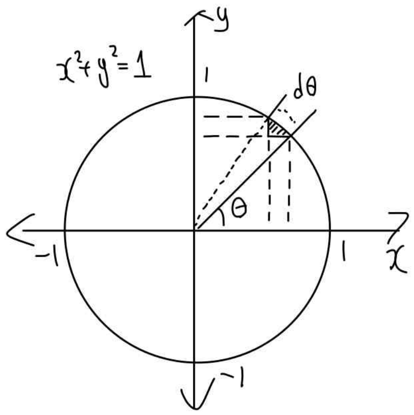
이번엔 $y=\sqrt{x}$의 도함수를 구하기 위해 한 변의 길이가 $\sqrt{x}$인 정사각형을 가져오자.



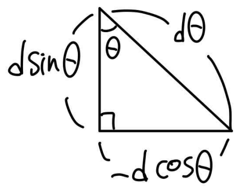
정사각형의 넓이의 증분은 $dx=2\times d\sqrt{x}\times\sqrt{x}+(d\sqrt{x})^2$에서 $1=2\times\dfrac{d\sqrt{x}}{dx}\times\sqrt{x}+\dfrac{(d\sqrt{x})^2}{dx}$이므로

$\dfrac{d\sqrt{x}}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{d\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$이고 $\displaystyle\lim_{dx\to0}\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{d\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$이다. 즉, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이다.

이번에는 $y = \sin\theta$의 도함수를 구해보자. 이때 중심이 원점인 단위원 $x^2 + y^2 = 1$을 떠올릴 수 있다.



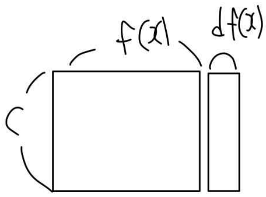
이때 색칠한 부분(부채꼴에서 오목사각형을 뺀 도형)을 다음과 같은 직각삼각형으로 근사하자.



우선, $\cos\theta$가 원 위의 점에 대하여 x좌표를 의미함에 따라 $d\theta > 0$일 때 $d\cos\theta < 0$이므로 변의 길이는 $-d\cos\theta$임을 확인하자. 각의 크기가 $d\theta$이므로 부채꼴의 호의 길이, 즉 그림에서 빗변의 길이는 $d\theta$이다. 이 직각삼각형은 원점과 두 점 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $(\cos\theta,\ 0)$을 꼭짓점으로 갖는 삼각형과 닮음이다. (반지름과 원주에 접하는 직선은 수직임을 통해 $d\theta$와 $d\sin\theta$의 끼인각이 θ임을 찾자.)

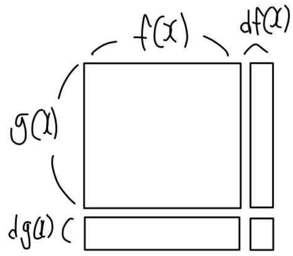
따라서 $\dfrac{d\sin\theta}{d\theta} = \cos\theta$이고 $\dfrac{-d\cos\theta}{d\theta} = \sin\theta$에서 $\dfrac{d\cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta$이다.

일반화하여, 함수에 상수가 곱해진 형태의 경우 그 도함수를 다음과 같이 확인할 수 있다.



위 그림을 식으로 나타냈을 때 $\dfrac{d\{cf(x)\}}{dx} = c \times \dfrac{df(x)}{dx}$임을 알 수 있다.

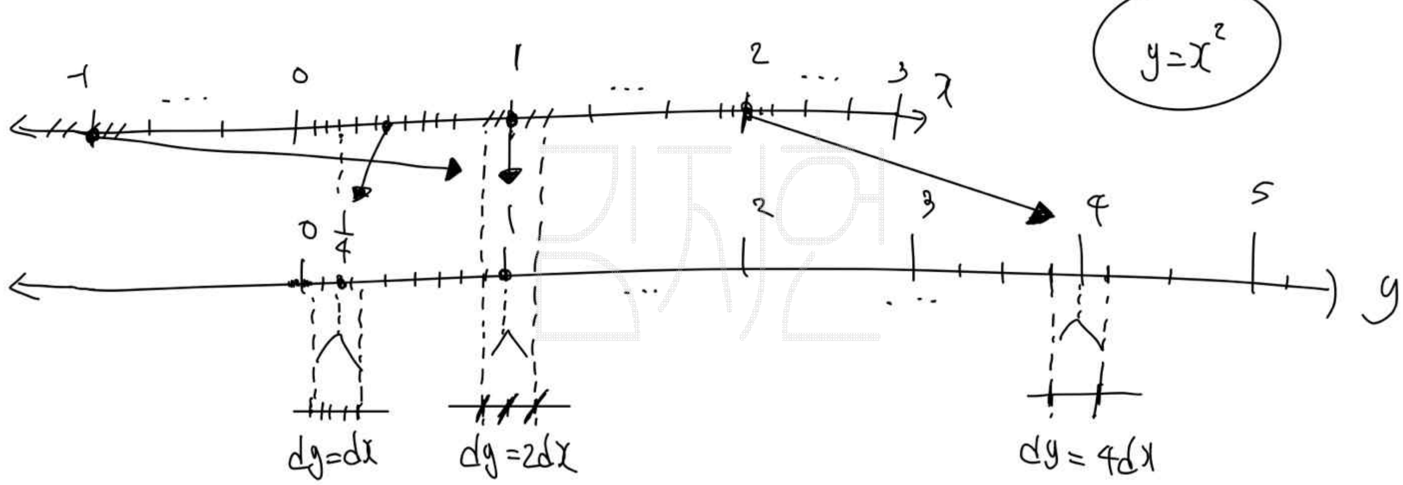
또한 두 함수가 곱해진 형태의 도함수와 같은 경우 다음과 같이 확인할 수 있다.



위 그림을 식으로 나타냈을 때 두 함수가 곱해진 형태의 도함수를 구하는 방법을 알 수 있다.

즉, $\dfrac{d\{f(x)\times g(x)\}}{dx} = f(x)\times\dfrac{dg(x)}{dx} + g(x)\times\dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{df(x)\times dg(x)}{dx} = f(x)\times\dfrac{dg(x)}{dx} + g(x)\times\dfrac{df(x)}{dx}$이다.

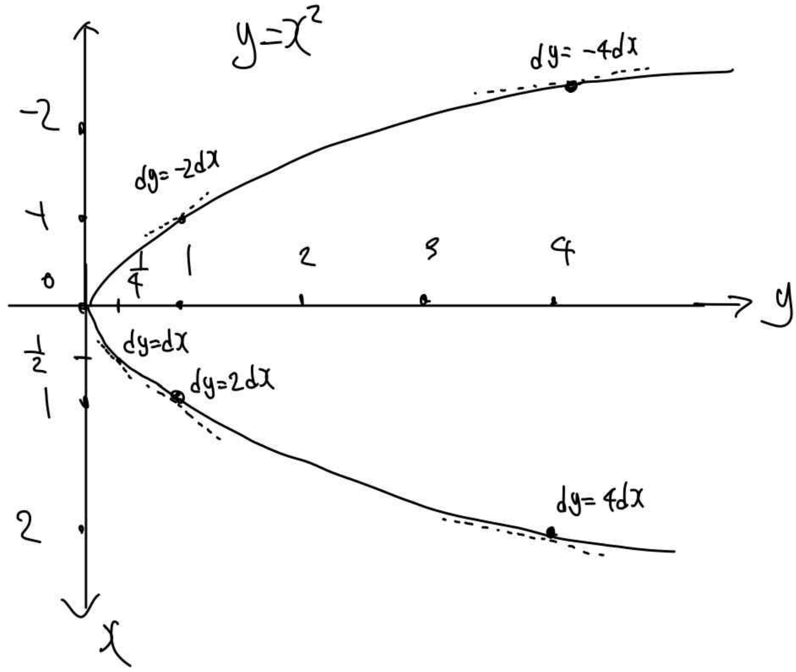
다시 한 번 강조하자면, 도함수라는 것을 기울기로 해석하는 것이 수능 수학에서 문제를 풀 때 중요하지만, 다음과 같이 dx에 대한 dy의 대응관계를 해석할 수 도 있다.



$y=x^2$이라 할 때 $x=\dfrac{1}{2}$에서 $y=\dfrac{1}{4}$이고 이때 $dy=dx$임을, $x=1$에서 $y=1$이고 $dy=2dx$임을, $x=2$에서 $y=4$이고 $dy=4dx$임을, 마지막으로 $x=-1$에서 $y=1$이고 $dy=-2dx$임을 확인하자.

특히 $y=1$에서 dy의 방향성을 확인할 때, $x=1$에서는 /는 그대로 내려와 /가 됨을, $x=-1$에서 /는 180도 회전하여 /가 됨 역시 확인하자. 특히, x에 따른 y의 값을 xy 좌표평면에서 주로 다루지만 다음과 같이 평행한 두 직선위에 올려두고 관찰하는 방법 역시 잊지 말자.

x의 값이 달라지더라도 dx가 일정하였음은 앞에서 강조했지만, dx에 따라 dy가 달라지는 것을 보다 보면 y의 값이 달라질 때 dy가 일정한 것은 맞는지 의문이 들 수 있다. 다음 그림을 보자.



x에 대한 함수 $y=x^2$를 두 범위에 따라 $x \geq 0$와 $x<0$로 나누어 볼 때 $x=\begin{cases} \sqrt{y} & (x \geq 0) \\ -\sqrt{y} & (x<0) \end{cases}$이다.

앞서 $\dfrac{d\sqrt{x}}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$임을 밝혀낸 것을 토대로 $x>0$에서 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d\sqrt{y}}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$이고 $x<0$에서

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d\left(-\sqrt{y}\right)}{dy}=\dfrac{1}{2\left(-\sqrt{y}\right)}$임을 알 수 있다. 이 경우 y에 따라 dy의 값은 일정하지만 dy에 따라 dx가 달라지는 것을 관찰 할 수 있다. dx와 dy, 즉 증분은 상수 취급을 하며 계산하지만, $\dfrac{dy}{dx}$는 $\dfrac{d}{dx}$라는 미분 연산을(사칙연산할 때 그 연산이 맞다!) y라는 함수에 적용한 것이라는 의미이므로 dx와 dy는 '일정한 관계를 가진 두 상수'로 간주하자. 다시 말해 문제를 풀 때 계산과정에서 증분을 사용할 때는 상수취급을 하면서 풀더라도 큰 문제가 없다. 여담으로, $x>0$에서 $\dfrac{dx}{dy}=$ $\dfrac{d\sqrt{y}}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2x}$이고 $x<0$에서 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d\left(-\sqrt{y}\right)}{dy}=\dfrac{1}{2\left(-\sqrt{y}\right)}=\dfrac{1}{2x}$이므로 $x \neq 0$에서 $\dfrac{dy}{dx}=2x$임을 다시 한 번 보일 수 있다. $x=\begin{cases} \sqrt{y} & (x \geq 0) \\ -\sqrt{y} & (x<0) \end{cases}$의 경우 함수는 아니지만, (함수의 정의를 떠올리자!) 서로 다른 두 식으로 쓰인 각각의 대응관계는 동일함 역시 생각해볼 수 있다.

이러한 증분에 대한 기하적 이해가 문제에서 어떻게 사용될 수 있을까?

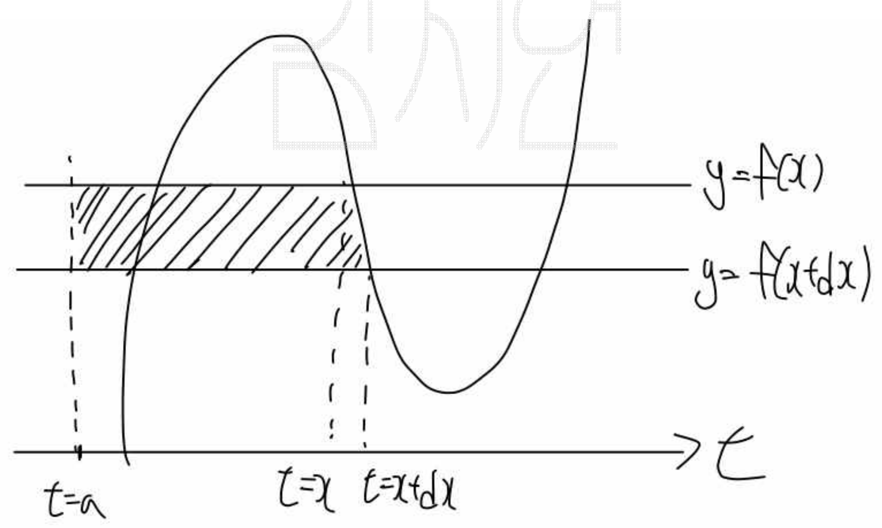
가령 적당한 삼차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 $g(x)=\int_a^x f(x)-f(t)dt$와 같은 예시를 들어보자.

우선 함수 $g(x)$가 t에 대한 정적분의 형태이며 x에 대하여 $g(x)$의 값이 결정되는 형태이다.

따라서 우리는 x에서 dx만큼 더해질 때 $g(x+dx)$가 어떻게 변화하는지 관찰하면 된다!

우선 t에 대한 좌표평면이므로 ty좌표평면에서 그래프 $y=f(t)$를 그린 이후 $t=x$와 만나는 점의 좌표는 $(x,\ f(x))$일 것이므로 (x가 t와 관련이 없으므로 잠시 x를 상수라 간주하자!) 이에 따라 직선 $y=f(x)$를 그을 수 있다. 동일하게 $t=x+dx$와 곡선 $y=f(t)$가 만나는 점의 좌표는 $(x+dx,\ f(x+dx))$일 것이므로 이에 따라 직선 $y=f(x+dx)$를 그을 수 있다.

이때 정적분 $\int_a^x f(x)-f(t)dt$는 x가 $x+dx$로 변화할 때 다음과 같은 변화가 일어난다.



색칠한 부분의 넓이는 $g(x)-g(x+dx)$이다. ($g(x)$는 저 상황에서 감소하고 있음을 인지하자.) 이를 앞에서 근사했듯이 직사각형이라 간주할 때, 밑변의 길이는 $x-a$이며 그 높이는 $f(x)-f(x+dx)$이다. 즉, $g(x)-g(x+dx)=(x-a)\{f(x)-f(x+dx)\}$이므로 양변에 $-dx$를 나눌 때

$\dfrac{g(x+dx)-g(x)}{dx}=(x-a)\dfrac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$에서 $g'(x)=(x-a)f'(x)$이다.

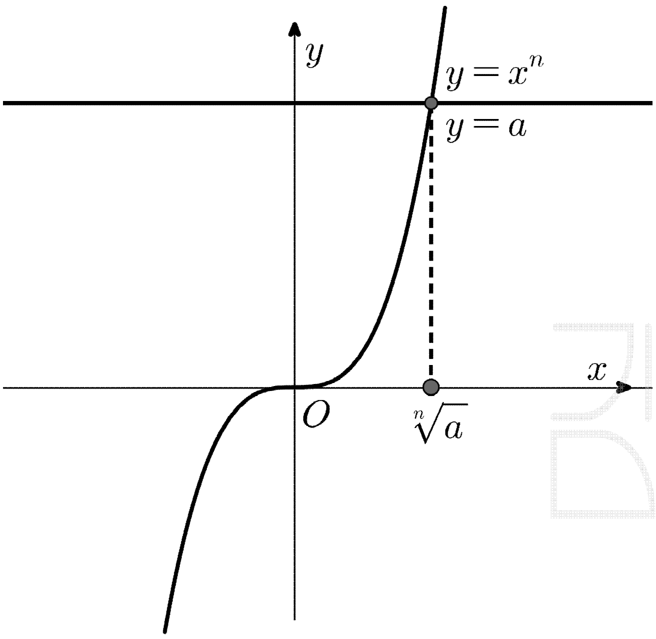
1. 실수 a의 n제곱근

2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 수 x를 a의 **n제곱근**이라고 하며, 이때 a의 제곱근, 세제곱근, $\cdots$을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

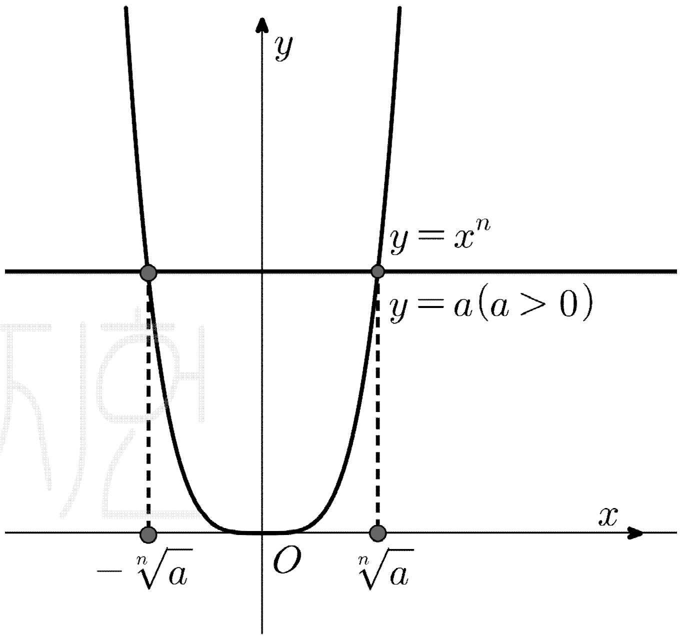
복소수의 범위에서 실수 a의 n제곱근은 n개가 있음이 알려져 있다.

$n=2$일 때 2제곱근이 아닌 제곱근으로 표현한다. 또한, **제곱근 a와 a의 제곱근은 다르다.**

실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.



i) n이 홀수일 때 $y=x^n$의 그래프



ii) n이 짝수일 때 $y=x^n$의 그래프

n이 홀수일 때 모든 실수 x에 대하여 $(-x)^n=-x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 **원점에 대하여** 대칭이므로, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 $x=\sqrt[n]{a}$로 오직 하나 존재한다.

n이 짝수일 때 모든 실수 x에 대하여 $(-x)^n=x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 **y축에 대하여** 대칭이므로, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 $a>0$일 때 $x=\sqrt[n]{a}$, $x=-\sqrt[n]{a}$로 두 개 존재한다.

$a=0$일 때 0으로 오직 하나 존재하고, $a<0$일 때 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

평가원은 이러한 소재를 이용하여 다음과 같은 문제를 출제하였다.

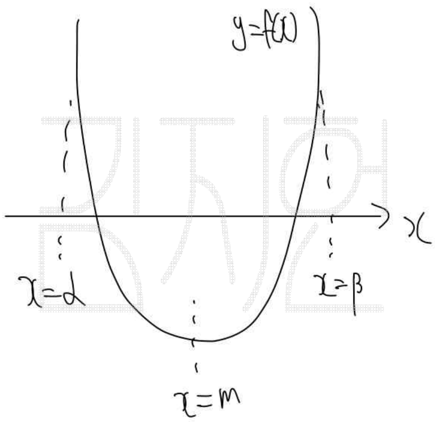
2022년도 6월 평가원 21번

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다. (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

조건 (가)를 차분히 관찰하자. 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 해집합 (방정식의 해만을 원소로 갖는 집합)은 방정식 $x^n-64=0$의 해집합과 방정식 $f(x)=0$의 해집합의 합집합과 동일하다.

우선 조건 (나)까지 읽으면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 개형을 추론할 수 있다. 이차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (이차함수의 그래프 개형들을 그려보면 쉽게 파악할 수 있으며, 혹은 사이값 정리를 이용할 수 있다. 함수 $f(x)$가 $x=m$에서 최솟값을 갖는다고 가정할 때, $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$이고 $\alpha<m<\beta$인 순서쌍 (α, β)를 떠올릴 수 있다. 이때 함수 $y=f(x)$는 두 구간 $\alpha<x<m$, $m<x<\beta$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가진다.) 호흡이 길었지만, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다!



이후 방정식 $x^n-64=0$의 해집합에 대해서 고찰해볼 필요가 있는데, 앞서 다뤘던 개념인 실수 a의 n제곱근이 방정식 $x^n=a$의 실근을 지칭했음을, 다시 말해 방정식 $x^n-a=0$의 실근을 지칭했음을 기억하자. 이때 자연수 n이 홀수일 때와 짝수일 때를 구분한 뒤, 짝수일 때는 a의 부호에 따라 케이스를 나누었다. 이 문제에서 $a=64>0$이므로 n의 홀짝성만 고려하자.

$i)$ n이 홀수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근의 개수는 1이다. 따라서 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 중근을 가질 수 없다.

$ii)$ n이 짝수일 때, 방정식 $x^n=64$의 실근은 $x=\sqrt[n]{64}=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}=-2^{\frac{6}{n}}$이다.

조건 (가)에서 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근 또한 $x=2^{\frac{6}{n}}$과 $x=-2^{\frac{6}{n}}$임을 추론할 수 있다.

그러므로 $f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $f(0)=-2^{\frac{6}{n}}\times 2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$이

음의 정수이므로 가능한 n의 값은 $n=2,\ 4,\ 6,\ 12$이다. 따라서 n의 모든 값의 합은 24이다.

방정식 $x^n-a=0$의 실근을 관찰할 때 행동강령을 정리하면 다음과 같다.

방정식 $x^n-a=0$은 방정식 $x^n=a$과 동일하며, 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 수 x를 실수 a의

n제곱근이라 정의하였음을 떠올리자. 이후, n은 홀수일 때 a의 값에 관계없이 실근의 개수는 1,

n은 짝수일 때 a의 부호에 따라 $a>0$, $a=0$, $a<0$일 때 실근의 개수는 각각 2, 1, 0임을

그래프를 그리면서 확인했음을 기억하자.

이러한 행동강령을 토대로 다음 문제를 풀어보자.

실수 a의 n제곱근 고난이도 킬러 ★

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) 함수 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^n-64}$에 대하여 $\lim\limits_{x \to \sqrt[n]{64}} g(x)=\lim\limits_{x \to -\sqrt[n]{64}} g(x)$이다.
(나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 정수이다.

n의 값에 관계없이 $\left(\sqrt[n]{64}\right)^n=64$이므로 $\lim\limits_{x\to\sqrt[n]{64}} x^n-64=0$이다. 이때, 극한값 $\lim\limits_{x\to\sqrt[n]{64}} g(x)$이 존재하므로

$f\left(\sqrt[n]{64}\right)=0$이다. 따라서 $\lim\limits_{x\to\sqrt[n]{64}} g(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt[n]{64}}\dfrac{f(x)}{x^n-64}=\lim\limits_{x\to\sqrt[n]{64}}\dfrac{f(x)-f\left(\sqrt[n]{64}\right)}{x^n-64}=\lim\limits_{x\to\sqrt[n]{64}}\dfrac{\dfrac{f(x)-f\left(\sqrt[n]{64}\right)}{x-\sqrt[n]{64}}}{\dfrac{x^n-64}{x-\sqrt[n]{64}}}=$

$\dfrac{\lim\limits_{x\to\sqrt[n]{64}}\dfrac{f(x)-f\left(\sqrt[n]{64}\right)}{x-\sqrt[n]{64}}}{\lim\limits_{x\to\sqrt[n]{64}}\dfrac{x^n-64}{x-\sqrt[n]{64}}}=\dfrac{f'\left(\sqrt[n]{64}\right)}{n\times 64^{\frac{n-1}{n}}}=\dfrac{\sqrt[n]{64}\,f'\left(\sqrt[n]{64}\right)}{64n}$에서 식의 좌변은 $\dfrac{\sqrt[n]{64}}{64n}f'\left(\sqrt[n]{64}\right)$이다.

$i)$ n이 짝수일 때,

$\left(-\sqrt[n]{64}\right)^n=64$이므로 $\lim\limits_{x\to-\sqrt[n]{64}} x^n-64=0$이다. 이때, 극한값 $\lim\limits_{x\to-\sqrt[n]{64}} g(x)$이 존재하므로 $f\left(-\sqrt[n]{64}\right)=0$

이다. 따라서 식의 우변은 $\lim\limits_{x\to-\sqrt[n]{64}} g(x)=\lim\limits_{x\to-\sqrt[n]{64}}\dfrac{f(x)}{x^n-64}=\lim\limits_{x\to-\sqrt[n]{64}}\dfrac{f(x)-f\left(-\sqrt[n]{64}\right)}{x^n-64}$

$=\lim\limits_{x\to-\sqrt[n]{64}}\dfrac{\dfrac{f(x)-f\left(-\sqrt[n]{64}\right)}{x+\sqrt[n]{64}}}{\dfrac{x^n-64}{x+\sqrt[n]{64}}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\sqrt[n]{64}}\dfrac{f(x)-f\left(\sqrt[n]{64}\right)}{x+\sqrt[n]{64}}}{\lim\limits_{x\to-\sqrt[n]{64}}\dfrac{x^n-64}{x+\sqrt[n]{64}}}=\dfrac{f'\left(-\sqrt[n]{64}\right)}{n\times\left(-\sqrt[n]{64}\right)^{n-1}}=\dfrac{-\sqrt[n]{64}\,f'\left(-\sqrt[n]{64}\right)}{64n}$이다.

$\dfrac{\sqrt[n]{64}}{64n}f'\left(\sqrt[n]{64}\right)=\dfrac{-\sqrt[n]{64}}{64n}f'\left(-\sqrt[n]{64}\right)$에서 $\sqrt[n]{64}=\alpha$라 할 때, 함수 $f(x)$는 $f\left(\sqrt[n]{64}\right)=0$, $f\left(-\sqrt[n]{64}\right)=0$

, $f'\left(\sqrt[n]{64}\right)=-f'\left(-\sqrt[n]{64}\right)$을 만족한다. 따라서 $f(x)=0$일 때 $x=\sqrt[n]{64}$, $x=-\sqrt[n]{64}$이므로

조건 (나)에서 가능한 짝수 n은 $\sqrt[n]{64}=2^{\frac{6}{n}}$에서 $n=2$, $n=6$이다.

$ii)$ n이 홀수일 때,

$\left(-\sqrt[n]{64}\right)^n=-64$이므로 식의 우변은 $\lim\limits_{x\to-\sqrt[n]{64}} g(x)=\dfrac{f\left(-\sqrt[n]{64}\right)}{-128}$이다. $\therefore\dfrac{\sqrt[n]{64}}{64n}f'\left(\sqrt[n]{64}\right)=-\dfrac{f\left(-\sqrt[n]{64}\right)}{128}$

방정식 $f(x)=0$의 $x=\sqrt[n]{64}$가 아닌 다른 실근을 $x=\alpha$라 하자. $f(x)=\left(x-\sqrt[n]{64}\right)(x-\alpha)$에서

$f'(x)=2x-\sqrt[n]{64}-\alpha$이므로 식 $f'\left(\sqrt[n]{64}\right)=-\dfrac{n}{2\sqrt[n]{64}}f\left(-\sqrt[n]{64}\right)$에서 좌변은 $\sqrt[n]{64}-\alpha$이고 우변은

$-n\left(\sqrt[n]{64}+\alpha\right)$이므로 $(n-1)\alpha=-(n+1)\sqrt[n]{64}$에서 $\alpha=-\dfrac{n-1}{n+1}\sqrt[n]{64}$이다.

$n=1$일 때 $\alpha=0$으로 정수이고, $n=3$일 때 $\alpha=-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{64}=-2$로 정수이며 $n\geq 5$에서 $\sqrt[n]{64}=2^{\frac{6}{n}}$는

무리수이므로 α는 무리수이다. 따라서 가능한 홀수 n은 $n=1$, $n=3$이다.

$\therefore n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=6$에서 가능한 모든 n의 합은 12이다.

여담으로, 6이 아닌 4 이상의 자연수 n에 대하여 $2^{\frac{6}{n}}$이 무리수임을 증명하는 과정은 다음과 같다.

귀류법을 통해 $2^{\frac{6}{n}}$이 유리수라 가정하자. 이때 $2^{\frac{6}{n}}=\dfrac{q}{p}$를 만족하는 서로소인 두 자연수 p, q가

존재한다. 양변을 n제곱하고 정리를 하면 $64=\dfrac{q^n}{p^n}$에서 양변에 p^n을 곱하여 $64p^n=q^n$이다.

$64p^n$이 짝수이므로 q^n 또한 짝수이며 이때 q 역시 짝수이다. $q=2a$라 하자.

$n\geq 7$이라 할 때 $64p^n=2^na^n$에서 $p^n=2^{n-6}a^n$이다. $2^{n-6}a^n$이 짝수이므로 p^n 또한 짝수이며 이때 p

역시 짝수로 p와 q가 서로소인 두 자연수라는 조건에 모순이다.

$n=5$인 경우, $64p^5=32a^5$에서 $2p^5=a^5$이다. $2p^5$이 짝수이므로 a^5 또한 짝수이며 이때 $a=2b$라

하자. $2p^5=32b^5$에서 $p^5=16b^5$이고 $16b^5$이 짝수이므로 p^5 또한 짝수이며 이때 p 역시 짝수로 p와 q

가 서로소인 두 자연수라는 조건에 모순이다.

$n=4$인 경우, $64p^4=16a^4$에서 $4p^4=a^4$이다. $4p^4$이 짝수이므로 a^4 또한 짝수이며 이때 $a=2b$라

하자 $4p^4=16b^4$에서 $p^4=4b^4$이고 $4b^4$이 짝수이므로 p^4 또한 짝수이며 이때 p 역시 짝수로 p와 q가

서로소인 두 자연수라는 조건에 모순이다. 따라서 $n=4$, 5, 7, 8, 9, $\cdots$에서 $2^{\frac{6}{n}}$은 무리수이다.

2. 거듭제곱근의 성질

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\,,\ \ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,,\ \ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}\,,\ \ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때 성립한다.

각각의 성질의 증명에 앞서, 양수 a의 양의 n제곱근은 반드시 하나임을 생각해보고 시작하자.

n은 홀수일 때 양수 a의 n제곱근은 하나이며 양수이다. n은 짝수일 때 양수 a의 n제곱근은 음수와 양수가 각각 하나씩 존재한다. 따라서 양수 a의 양의 n제곱근은 반드시 하나이다.

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$의 증명은 다음과 같다. 지수법칙과 거듭제곱근의 정의에 의하여 $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$이며 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$이다. 따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$은 ab의 양의 n제곱근이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$가 성립한다.

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$의 증명은 다음과 같다. 지수법칙과 거듭제곱근의 정의에 의하여 $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}$이며 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이므로 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}>0$이다. 따라서 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$은 $\frac{a}{b}$의 n제곱근이므로 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$가 성립한다.

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$의 증명은 다음과 같다. 지수법칙에 의하여 $\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right\}^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nm}=\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right\}^m=a^m$이다. 이때 $\sqrt[n]{a}>0$이므로 $\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right\}^m>0$이다. 따라서 $\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right\}^m$은 a^m의 양의 n제곱근이므로 $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$이 성립한다.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$의 증명은 다음과 같다. 지수법칙과 거듭제곱근의 정의에 의하여 $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)=a$이다. 이때 $a>0$이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}>0$이다. 따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$는 a의 양의 n제곱근이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$이 성립한다.

여담으로, 방금 사용했던 증명 방식 (혹은 논리 전개)에 주목하자. 우변이 어떠한 성질을 만족하는 유일한 항임을 확인하고, 좌변이 그러한 성질을 만족하는지 확인하는 방식으로 논리가 전개됐다. 양수 a의 양의 n제곱근은 반드시 한 개임을 확인한 뒤 이에 따라 증명을 한 것이다.

거듭제곱근의 성질은 주로 변별력이 낮은 문제에서 계산 과정에 사용되지만, 유의할 점이 있다.

일반적으로 $a<0$, $b<0$일 때 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이고, $a>0$, $b<0$일 때 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$가 성립한다.

비록 허수의 개념이 평가원에서 출제된 횟수가 적긴 하지만, (없지는 않다!) 언제 나와도 이상하지 않다. 따라서 이 개념은 공부하고 이 개념은 공부하지 말자는 둥 입맛에 맞춰 공부하지 말자.

앞서 언급했듯 명제 $p \rightarrow q$와 $q \rightarrow p$를 구분하자. $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$인가?

또한, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$인가? 이를 확인하기 위해 $i=\sqrt{-1}$을 가져오자.

$i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-\sqrt{-1}=\dfrac{1}{i}$, $i^4=1$임을 이용할 수 있을 것이다.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$의 경우에서 우선 $a>0$, $b>0$일 때 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$는 성립하지 않는다.

($\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}>0$이기 때문이다!)

$a>0$, $b<0$일 때 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{|b|}\,i=\sqrt{a|b|}\,i=\sqrt{-ab}\,i$이고 $-\sqrt{ab}=-\sqrt{-ab}\,i$이므로 성립하지 않는다. $a<0$, $b>0$인 경우 $a>0$, $b<0$의 경우에서 a와 b가 바뀐 형태이므로 생략하겠다.

$a<0$, $b<0$일 때 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{|a|}\,i\sqrt{|b|}\,i=\sqrt{|a||b|}\,i^2=-\sqrt{ab}$에서 성립한다.

즉, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$이다.

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$의 경우에서 우선 $a>0$, $b>0$일 때 위와 같이 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}>0$에서 성립하지 않는다.

$a>0$, $b<0$일 때 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{|b|}\,i}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{|b|}}\times\dfrac{1}{i}=\sqrt{\dfrac{a}{|b|}}\times\dfrac{1}{i}=\sqrt{-\dfrac{a}{b}}\times\dfrac{1}{i}=\sqrt{-\dfrac{a}{b}}\times(-i)=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

에서 성립한다. $a<0,\ b>0$일 때 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{|a|}\,i}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{b}}\times i=\sqrt{\dfrac{|a|}{b}}\times i=\sqrt{-\dfrac{a}{b}}\times i=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 에서

성립하지 않는다. $a<0,\ b<0$일 때 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{|a|}\,i}{\sqrt{|b|}\,i}=\dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}=\sqrt{\dfrac{|a|}{|b|}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 에서 성립하지 않는다.

즉, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $a>0,\ b<0$이다.

따라서 **거듭제곱근의 성질을 사용할 때 행동강령**을 정리하면 다음과 같다.

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ 의 형태의 익숙한 식들은 $a>0,\ b>0$

이고 $m,\ n$이 2 이상의 자연수일 때 성립한다. 또한 두 명제 '$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이면 $a<0,\ b<0$

이다.'와 '$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $a>0,\ b<0$이다.'는 모두 참이며, 각각의 명제의 역 또한 성립한다.

이러한 행동강령을 토대로 다음 문제를 풀어보자.

거듭제곱근의 성질 고난이도 킬러 ★

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha\beta}=\dfrac{\sqrt{2-\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\beta}}$ 인 모든 실수 α, β에 대하여 $f(\alpha)\neq\beta$이다.

$f(3)$의 최댓값을 구하시오.

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha\beta}=\dfrac{\sqrt{2-\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\beta}}$ 일 때 $\beta\neq 0$이다.

식의 좌변은 $\alpha<0$ 이고 $\beta<0$일 때 0, $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$일 때 0이다. 그 외의 경우 $2\sqrt{\alpha\beta}$이다.

식의 우변은 $\beta<0$에서 0이며 $\beta>0$에서 $2\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\beta}}$이다.

i) $\alpha>2$

조건의 식은 $\beta<0$에서 $2\sqrt{\alpha\beta}=0$이고 $\beta>0$에서 $2\sqrt{\alpha\beta}=2\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\beta}}$이다.

$\beta<0$일 때 $2\sqrt{\alpha\beta}\neq 0$이고 $\beta>0$일 때 $\alpha\beta>0>\dfrac{2-\alpha}{\beta}$이므로 $\alpha>2$에서 성립하지 않는다.

ii) $\alpha=2$

조건의 식은 $2\sqrt{2\beta}=0$이다. $\beta\neq 0$에서 $2\sqrt{2\beta}\neq 0$이므로 $\alpha=2$에서 성립하지 않는다.

iii) $0<\alpha<2$

조건의 식은 $\beta<0$에서 $2\sqrt{\alpha\beta}=0$이고 $\beta>0$에서 $2\sqrt{\alpha\beta}=2\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\beta}}$이다.

$\beta<0$일 때 $2\sqrt{\alpha\beta}\neq 0$이고 $\beta>0$일 때 $\alpha\beta=\dfrac{2-\alpha}{\beta}$에서 $\beta^2=\dfrac{2-\alpha}{\alpha}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\alpha}}$이다.

iv) $\alpha=0$

조건의 식은 $\beta<0$에서 $0=0$이고 $\beta>0$에서 $0=2\sqrt{\dfrac{2}{\beta}}$이다. $\beta>0$에서 $2\sqrt{\dfrac{2}{\beta}}\neq 0$이므로

$\alpha=0$일 때 $\beta<0$이다.

v) $\alpha<0$

조건의 식은 $\beta<0$에서 $0=0$이고 $\beta>0$에서 $0=2\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\beta}}$이다. $\alpha<0$에서 $2\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\beta}}\neq 0$이므로

$\alpha<0$일 때 $\beta<0$이다.

즉, $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha\beta}=\dfrac{\sqrt{2-\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\beta}}$ 인 실수 α, β는 $\alpha<0$일 때 $\beta<0$, $\alpha=0$일 때 $\beta<0$,

$0<\alpha<2$일 때 $\beta=\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\alpha}}$ 이다.

$0<\alpha<2$에서 $\beta=\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\alpha}}$ 이므로 $\lim\limits_{\alpha\to0+}\beta=\infty$, $\lim\limits_{\alpha\to2-}\beta=0$이다.

$f(\alpha)\neq\beta$에서 $x\le0$에서 $f(x)\ge0$이고 $f(2)\le0$이다. 사이값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은

구간 $[0,\ 2]$에서 적어도 하나의 실근을 가진다. ($f(0)\neq0$, $f(2)\neq0$이라 가정할 때, $f(0)>0>f(2)$

에서 방정식 $f(x)=0$은 사이값의 정리에 의하여 구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

$f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$이라 가정할 때, 방정식 $f(x)=0$은 $x=0$ 또는 $x=2$에서 실근을 가진다.)

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이고 그 실근을 $x=t$라 가정하자.

$t<2$라 가정할 때 $f(t)=0$, $f(2)>0$에서 사이값 정리에 의하여 $f(\alpha)=\beta$인 $(\alpha,\ \beta)$가 적어도 하나

존재한다. $t=2$라 가정할 때, $(\alpha-2)^2=\beta=\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\alpha}}$ 인 α가 $0<\alpha<2$에서 존재하는지 검증하자.

$(\alpha-2)^2=\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\alpha}}$ 의 양변을 제곱하면 $(\alpha-2)^2=\dfrac{2-\alpha}{\alpha}$에서 $(2-\alpha)\alpha=1$, 즉 $\alpha^2-2\alpha+1=0$이다.

즉, $\alpha=1$에서 $\beta=1$이고 $f(1)=1$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근 $x=p$, $x=q$을 가지며, $p<q$라 하자.

$\alpha<0$일 때 $\beta<0$이므로 $p\ge0$이다. $q<2$라 가정할 때, $f(q)=0$, $f(2)>0$에서 사이값 정리에

의하여 $f(\alpha)=\beta$인 $(\alpha,\ \beta)$가 적어도 하나 존재한다. 동시에, $p\ge2$라 가정할 때, $f(0)>0$에서

사이값 정리에 의하여 $f(\alpha)=\beta$인 $(\alpha,\ \beta)$가 적어도 하나 존재한다. $\therefore 0\le p<2\le q$

$f(3)=(3-p)(3-q)$에서 $3-p\le3$, $3-q\le1$이므로 $p=0$, $q=2$에서 $f(3)$은 최댓값 3을 가진다.

따라서 $f(3)$의 최댓값은 3이다.

3. 지수법칙의 확장

$$a^r a^s = a^{r+s},\ a^r \div a^s = a^{r-s},\ (a^r)^s = a^{rs},\ (ab)^r = a^r b^r$$

지수가 자연수인 경우에 지수법칙이 성립함을 앞서 확인하였다. $a \neq 0$이고 r, s가 정수일 때,

지수법칙이 성립함을 가정하면, $a^0 = 1$이고 자연수 n에 대하여 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$이 자연스럽게 성립해야

한다. 즉, $a^0 = 1$과 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$은 수학적 정의이다. (조심할 점은 $0^0 \neq 1$이다. 0^0은 정의하지 않는다.)

이러한 정의에 따라 지수가 정수인 경우에 역시 지수법칙이 성립함을 확인할 수 있다.

정수인 지수일 때 성립하는 지수법칙이 지수가 유리수일 때도 성립한다고 가정하자.

유리수의 정의에 따라 서로소인 두 정수 r, s에 대하여 $\dfrac{r}{s}$를 지수로 하며 밑이 a인 수 $a^{\frac{r}{s}}$은 a^r의

양의 s제곱근이므로 $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$와 같이 정의하자. 즉, $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$은 수학적 정의이다. (단, $a > 0$)

이러한 정의에 따라 지수가 유리수인 경우에 역시 지수법칙이 성립함을 확인할 수 있다.

지수가 실수일 때 성립함이 알려져 있으며, 지수가 실수일 때 밑의 조건은 $a > 0$이다.