제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = 2^{3-4} = 2^{-1}$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2+6x+1$

$f'(1) = 3+6+1 = 10$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 6, \quad a_4 + a_6 = 36$$

일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$(a_2+2d)+(a_2+4d) = 36$

$12+6d = 36$

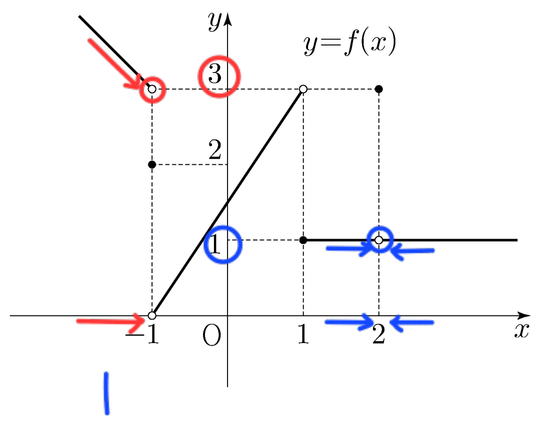
$d = 4$

$a_{10} = a_2+8d$

$= 6+32$

$= 38$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



3 1

$\lim_{x\to -1-} f(x) + \lim_{x\to 2} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

① ② ③ ④
1 2 4 8

⑤ ⑥ ⑦ ⑧
1 2 4 8

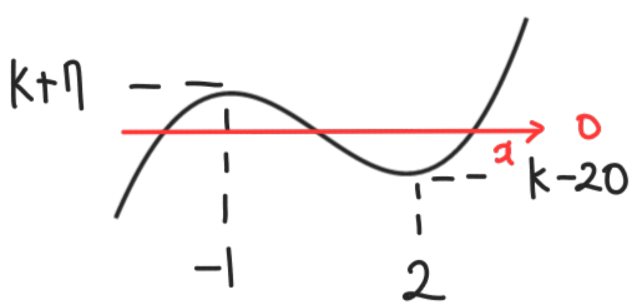
6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$



$k-20<0<k+7$

$-7<k<20$

$20-(-7)-1=26$

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

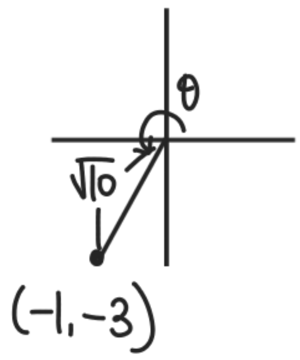
① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

sin	All
tan	cos

$\tan\theta>0,\ \sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=(\tan\theta-3)(\tan\theta+2)=0$

$\tan\theta=3$ 또는 $\cancel{\tan\theta=-2}$.



$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{10}},\ \sin\theta=\frac{-3}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta+\sin\theta=\frac{-4}{\sqrt{10}}=\frac{-4\sqrt{10}}{10}$

$=\frac{-2\sqrt{10}}{5}$

차함수로 해석하기

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

$f(x)$ $g(x)$

① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4

$\int_0^k g(x)-f(x)\,dx$

$=\int_k^6 g(x)-f(x)\,dx$

$y=g(x)-f(x)$
$=-x(x-6)$

$x^2-5x=x$

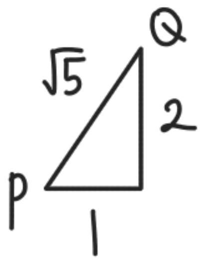
$x(x-6)=0.$

직선 기울기 이용한 삼각비

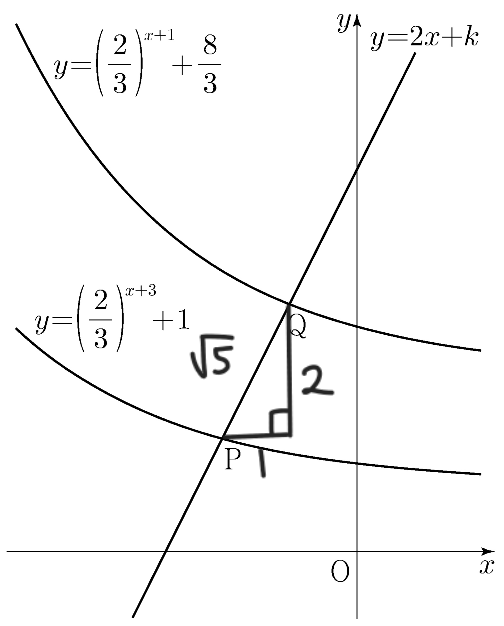
9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{31}{6}$　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{11}{2}$　④ $\frac{17}{3}$　⑤ $\frac{35}{6}$



(Q의 x좌표) = (P의 x좌표) + 1

$P\left(a, \left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1\right),\ Q\left(a+1, \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}\right)$

(Q의 y좌표) = (P의 y좌표) + 2

$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}=\underline{\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}}+1+2$

$=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}$

$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}=\frac{1}{3},\quad a=-2,\quad P\left(-2, \frac{5}{3}\right)$

$\hookrightarrow k=\frac{17}{3}$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

$\hookrightarrow y'=f(x)+xf'(x)$

① -18　② -17　③ -16　④ -15　⑤ -14

$f(0)=0,\quad f(1)=2$

$l_1:\ y=f'(0)(x-0)+0\quad=\quad f'(0)x+0$

$l_2:\ y=(\underbrace{f(1)}_{=2}+f'(1))(x-1)+2=(\underbrace{2+f'(1)}_{=2})x\underbrace{-f'(1)}_{=0}$

$f(0)=0,\ f(1)=2,\ f'(0)=2,\ f'(1)=0$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(0)=d=0.\qquad f'(0)=c=2$

$f(1)=a+b+c=2,\quad f'(1)=3a+2b+c=0$

$a+b=0,\quad \&\quad 3a+2b=-2$

$\rightarrow a=-2,\ b=2.$

$f(x)=-2x^3+2x^2+2x$

$f'(x)=-6x^2+4x+2$

$f'(2)=-24+8+2=-14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$ 주기 a

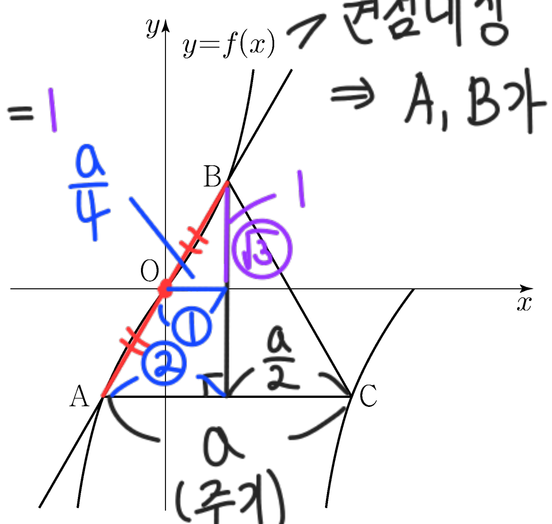
가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

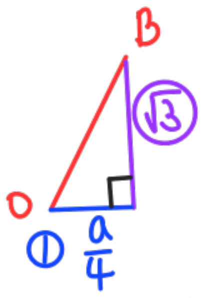
$f\left(\frac{a}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$B\left(\frac{a}{4}, 1\right)$

원점대칭

$\Rightarrow$ A, B가 원점대칭





① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

$\frac{a}{4} \times \sqrt{3} = 1, \quad a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{16}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

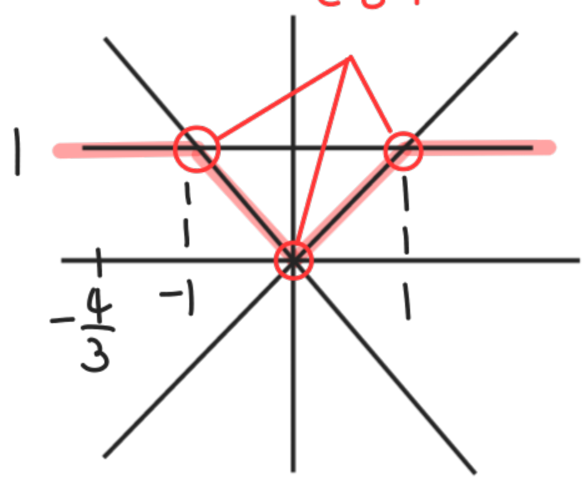
$\{f(x)\}^2(f(x)-1) - x^2(f(x)-1) = 0$

$(\{f(x)\}^2 - x^2)(f(x)-1) = 0$

$(f(x)-x)(f(x)+x)(f(x)-1) = 0$

$f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=1$

환승 point



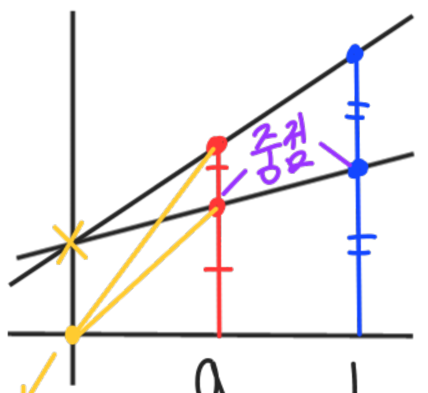
$f\left(-\frac{4}{3}\right) = 1$

$f(0) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

13. 두 상수 a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760　② 800　③ 840　④ 880　⑤ 920



$$m_1 = \frac{\log_2 b - \log_2 a}{b-a}$$

$$m_2 = \frac{\log_4 b - \log_4 a}{b-a} = \frac{1}{2} m_1$$

원점 지나야　$x=0 \sim x=a$ 평균변화율 1:2

$(x=0 \sim x=a$ 기울기$) = (x=0 \sim x=b$ 기울기$)$

$$\frac{\log_2 a}{a} = \frac{\log_2 b}{b}, \quad a^b = b^a$$

$$f(1) = a^b + b^a = 2a^b = 40, \quad a^b = 20$$

$$f(2) = (a^b)^2 + (b^a)^2 = 20^2 + 20^2 = 800$$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t) = t(t-1)(at+b) \quad (a \neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt = 0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

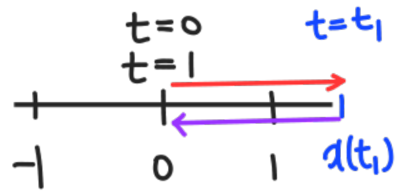
ㄷ. $0 \le t \le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$, $t=0 \sim 1$ 이동거리 2

㉠ $\int_0^1 v(t)\,dt = x(1) - x(0) = 0 - 0 = 0$

X



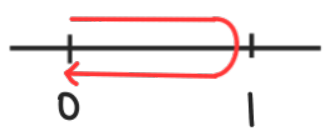
$|x(t_1)|>1$ 이라면
$t=0 \sim t_1$　1보다 많이 이동.
돌아갈때　1보다 많이 이동.
$(t=t_1 \sim 1)$

(전체 이동거리) >2가 되어 모순

㉢ 거짓이라 해보자.

$0 \le t \le 1$ 일때　$|x(t)|<1$ 이며
$0<t<1$ 일때　$x(t) \neq 0$.

→ $t=0, 1$ 일때 원점. 그 외 $-1<x(t)<0$ OR $0<x(t)<1$

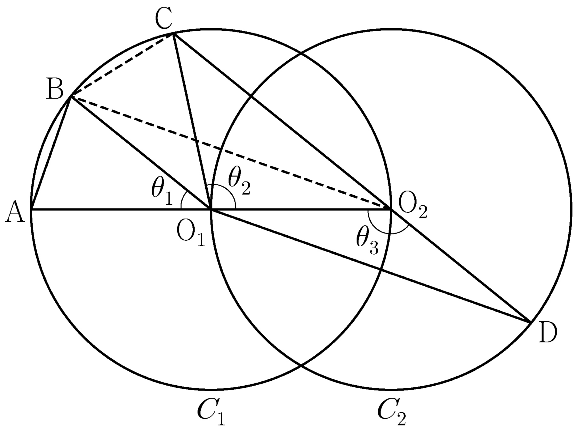


(이동거리) <2이다. 방향전환 더 필요.

출발점으로 돌아가야 하므로 방향 전환 최소 3번
그런데 속도 $v(t)$는 이차식이라
부호 변화가 많아도 2번으로 모순.

따라서　$x(t_2)=0$ 인　$t_2\,(0<t_2<1)$ 존재.

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.

이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

$\overline{AB}=k$라 할 때

$\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$이고, $3k$

$\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다. $\dfrac{\overline{BO_2}}{\overline{AO_2}}$ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이다. $\dfrac{7}{3}k$

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

$f(k)=3k$, $g(k)=\dfrac{7}{3}k$

$p=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

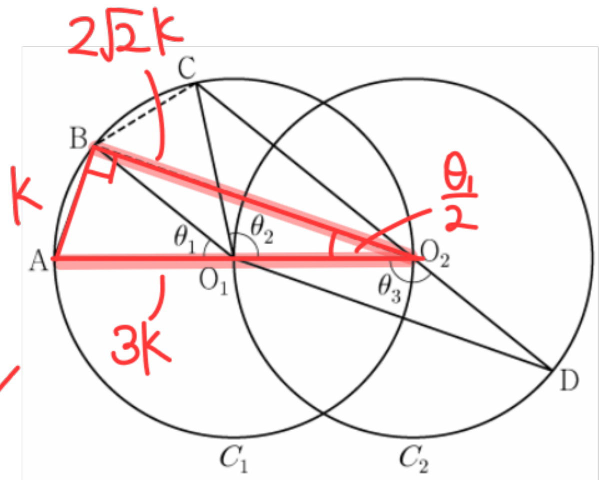
$2\sqrt{2}\times\dfrac{14\sqrt{2}}{9}=\dfrac{56}{9}$

단답형

16. $\log_2 120-\dfrac{1}{\log_{15}2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{3}$

$\log_2 120-\log_2 15=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

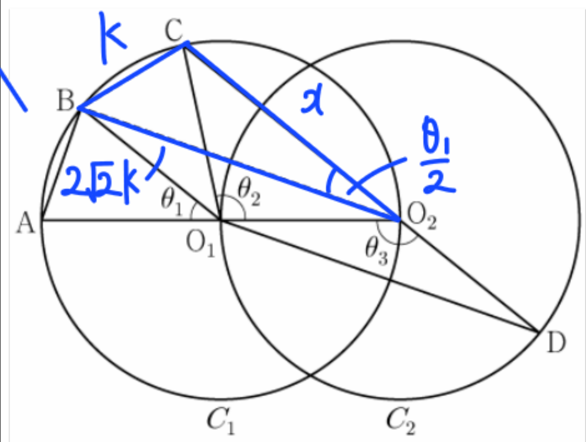


17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=x^3+x^2+2$

$f(1)=1+1+2=4$

$\boxed{4}$



$\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{x^2+8k^2-k^2}{2\cdot 2\sqrt{2}k\cdot x}$

$16kx=3x^2+21k^2$

$(3x-7k)(x-3k)=0$, $x=\dfrac{7}{3}k$, $\cancel{3k}$

지름 길이

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

㉠ $\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56$, ㉡ $\sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

$2\times$㉠ $\cancel{\sum_{k=1}^{10} 2a_k} - \sum_{k=1}^{7} a_k = 112$

㉡ $\cancel{\sum_{k=1}^{10} 2a_k} - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$

$-)$

$-(\cancel{a_1+a_2+\cdots+a_7})+(\cancel{a_1+\cdots+a_7}+a_8) = 12$

$a_8 = 12$

$\boxed{12}$

19. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

$f'(x) = 3x^2+2ax-a^2+8a$

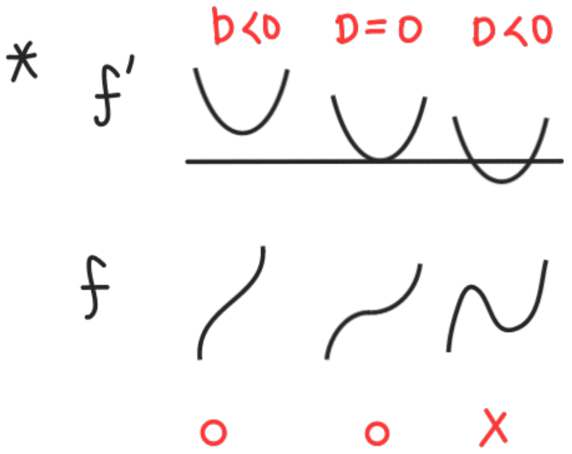
$D/4 = a^2-3(-a^2+8a)$

$= 4a^2-24a$

$= 4a(a-6) \le 0$

$0 \le a \le 6$

$\boxed{6}$



20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서
> $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

경계인 $x=1$ 에서 연속 & 미분가능 이용하자.

(가) $x=1$ 대입 : $f(1)=1$

(나) $x=0$ 대입 : $f(1)=b$ $\therefore b=1$

(가) $\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1-}\frac{x-1}{x-1} = 1$ $\therefore a=1$

(나) $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to0+}\frac{xf(x)+ax}{x} = a$

$x\ (0\le x\le1)$

$\int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x+1)dx = \int_0^1 xf(x)+x+1\,dx$

$= \int_0^1 x^2+x+1\,dx = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1$

$60\int_1^2 f(x)dx = 20+30+60 = 110$

$\boxed{110}$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1| = 2$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$이다.
>
> (다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점]

① ② ③ ··· ⑩

± 2 ± 4 ± 8 ± 1024

핵심 : S_n의 부호는 마지막 a_n이 정한다.

예시 : $\underline{1+2+4+\cdots+512} - \boxed{1024} < 0$

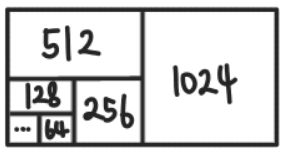
모두 ⊕ 여도 ⊖ 이면 ⊖

마지막 항이 앞에 것 다 더한 것보다 강하다

→ 뒤에서 부터 정하자.

증명 ① (수식) $1+2+\cdots+2^{n-1} = \dfrac{2^n-1}{2-1} < 2^n$

② (그림)



2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
⊖	⊖	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊖

$S_{10} = -14 < 0$ 이므로 $a_{10} < 0$, $a_{10} = -1024$

$S_9 = S_{10} - a_{10} = 1010 > 0$, $a_9 > 0$, $a_9 = 512$

$S_8 = S_9 - a_9 = 498 > 0$, $a_8 > 0$, $a_8 = 256$

$S_7 = S_8 - a_8 = 242 > 0$, $a_7 > 0$, $a_7 = 128$

$S_6 = S_7 - a_7 = 114 > 0$, $a_6 > 0$, $a_6 = 64$

$S_5 = S_6 - a_6 = 50 > 0$, $a_5 > 0$, $a_5 = 32$

$S_4 = S_5 - a_5 = 18 > 0$, $a_4 > 0$, $a_4 = 16$.

$S_3 = S_4 - a_4 = 2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_3 = 8$.

$S_2 = S_3 - a_3 = -6 < 0$, $a_2 < 0$, $a_2 = -4$

$S_1 = S_2 - a_2 = -2 < 0$, $a_1 < 0$, $a_1 = -2$

$-2 + 8 + 32 + 128 + 512 = 678$ $\boxed{678}$

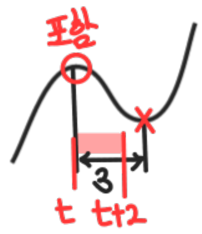
22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x) = 0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

구간 길이 2

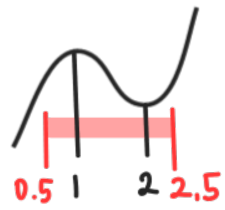
> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$d > 2$ 이면 모든 t에 대해 $g(t) < 2$ (나) $g(f(1)) = 2$ 모순

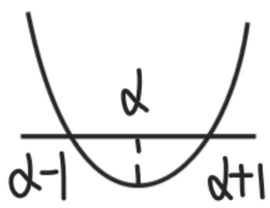


$d < 2$ 이면 (가) 만족 X



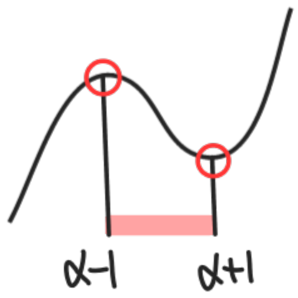
$\left.\begin{aligned} \lim_{t \to 0.5-} g(t) = 2 \\ \lim_{t \to 0.5+} g(t) = 2 \end{aligned}\right)$ 합 4

$\therefore d = 2$



$f'(x) = \frac{3}{2}(x-(\alpha-1))(x-(\alpha+1)) = \frac{3}{2}(x-\alpha)^2 - \frac{3}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)^3 - \frac{3}{2}x + C$



$= f(1) = f(4)$

$f(1) = f(4)$

$\Rightarrow (4-\alpha)^3 - (1-\alpha)^3 = 3 \times (4-1)$

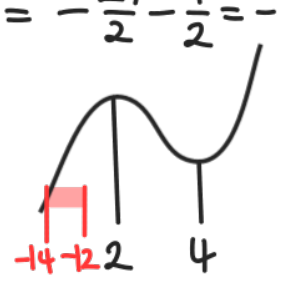
$\cancel{3}((4-\alpha)^2 + (4-\alpha)(1-\alpha) + (1-\alpha)^2) = \cancel{3} \times 3$

$3\alpha^2 - 15\alpha + 21 = 3$.

$(\alpha-2)(\alpha-3) = 0$, $\alpha = 2$ 또는 $\alpha = 3$

$\cancel{\alpha = 3}$ $\Rightarrow$ $\alpha - 1 = 2 = f(1) = \frac{1}{2} \times 2^3 - \frac{3}{2} + C$, $C = -\frac{1}{2}$

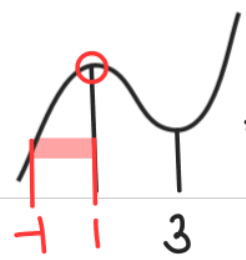
$f(0) = -\frac{27}{2} - \frac{1}{2} = -14$



$\Rightarrow g(f(0)) = 0$

$\alpha = 2$ $\Rightarrow$ $\alpha - 1 = 1 = f(1) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + C$, $C = 3$

$f(0) = -4 + 3 = -1$



$\Rightarrow g(f(0)) = 1$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^3 - \frac{3}{2}x + 3$

$f(5) = \frac{27}{2} - \frac{15}{2} + 3 = 9$ $\boxed{9}$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

$_7C_2 \times 2^2 \times x^5$

$= 21 \times 4\, x^5$

$= 84\, x^5$

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X)=40$일 때, n의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$V(2X) = 4V(X) = 40.$

$V(X) = 10 = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

$n = 45$

25. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d+e=12$

(나) $|a^2-b^2|=5$ $= |a-b| \times (a+b) = 1 \times 5$

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

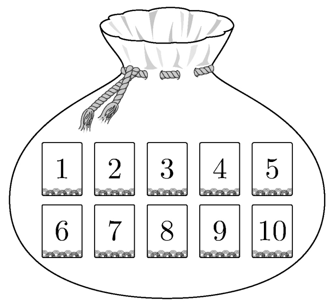
$a-b=\pm 1$, $a+b=5$

$(a, b) = (2, 3)$ 또는 $(3, 2) \rightarrow 2$가지

$c+d+e=7 \rightarrow {}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$가지

26. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



여사건이 이득!

가장 작은 수 후보 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

가장 작은 수 5 → 6~10 중 택 2 : ${}_5C_2$

〃 6 → 7~10 중 택 2 : ${}_4C_2$

$$1 - \frac{{}_5C_2 + {}_4C_2}{{}_{10}C_3} = 1 - \frac{16}{10 \times 3 \times 4} = 1 - \frac{2}{15}$$

$$= \frac{13}{15}$$

27. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b - a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80
④ 11.76 ⑤ 13.72

$b, a = \overline{x_1} \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{10}$

$d, c = \overline{x_2} \pm 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$

$a - c = \overline{x_1} - \overline{x_2} + \left(2.58 \times \frac{1}{20} - 1.96 \times \frac{1}{10}\right)\sigma$

$(1.96 - 1.29) \times \frac{\sigma}{10} = 1.34$

$0.67 \times \frac{\sigma}{10} = 1.34$, $\frac{\sigma}{10} = 2$

$b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{10}$

$= 4 \times 1.96$

$= 4 \times (2 - 0.04)$

$= 8 - 0.16$

$= 7.84$

28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

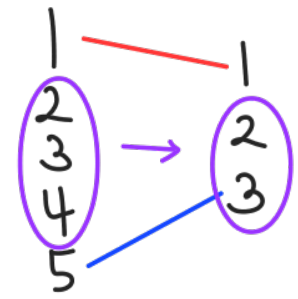
> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \ge \sqrt{x}$이다.
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

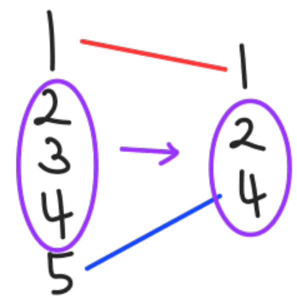
$f(1)$ 1, 2, 3, 4
$f(2)$ 2, 3, 4
$f(3)$ 2, 3, 4
$f(4)$ 2, 3, 4
$f(5)$ 3, 4

치역

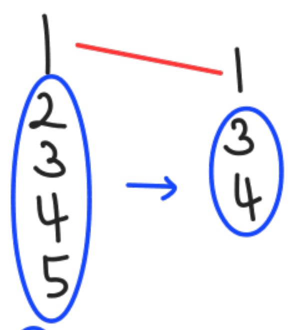
① $\{1, 2, 3\}$ 전부 3
$1 \times 1 \times (2^3 - 1) = 7$가지
2,3중택1



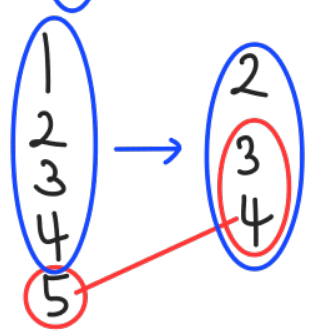
② $\{1, 2, 4\}$ 전부 4
$1 \times 1 \times (2^3 - 1) = 7$가지
2,3중택1



③ $\{1, 3, 4\}$
$1 \times (2^4 - 2) = 14$가지
3,4중택1 전부 3 또는 4

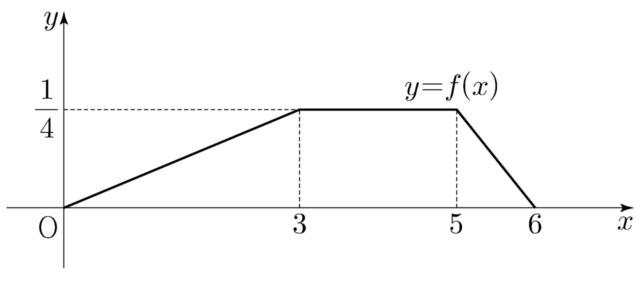


④ $\{2, 3, 4\}$ 3제외택2 전부 4
$2 \times (3^4 - 2^4 - 2^4 + 1) = 100$가지
3,4중택1 2제외택2
2,3,4중택1



단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

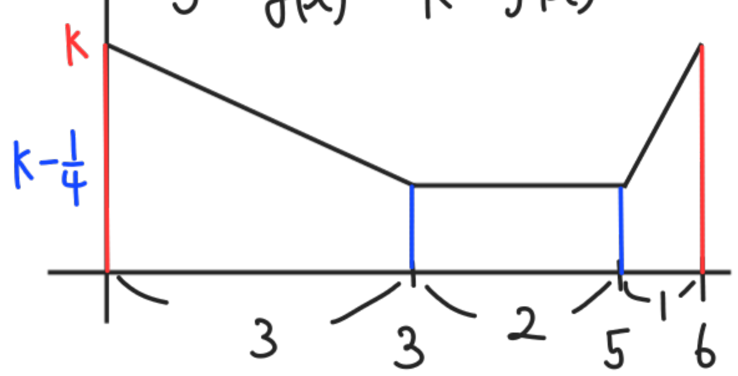


$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

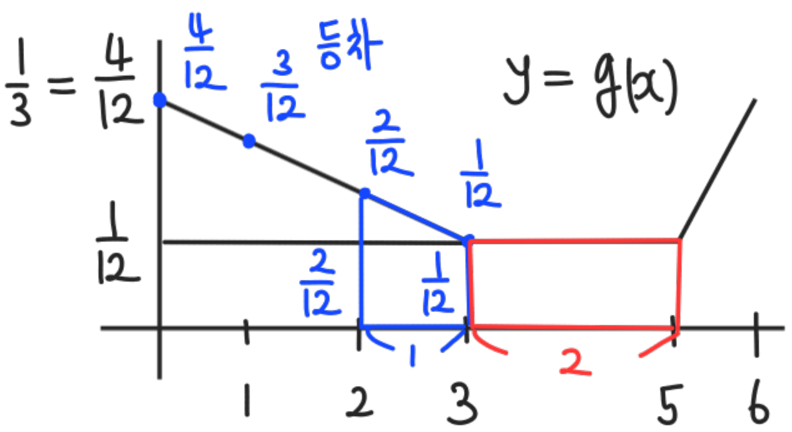
$y=g(x)=k-f(x)$



$\frac{1}{2}\times 3\times(k+k-\frac{1}{4})+2\times(k-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}\times 1\times(k+k-\frac{1}{4})=1$

$2(2k-\frac{1}{4})+2k-\frac{1}{2}=6k-1=1,\ k=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\mathrm{P}(2 \le Y \le 5)$



$\mathrm{P}(2 \le Y \le 5)=$  $+$ 

$=\frac{1}{2}\times 1\times(\frac{2}{12}+\frac{1}{12})+\frac{1}{12}\times 2$

$=\frac{7}{24}$ $\boxed{31}$

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> W 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, $\frac{1}{3}$
> B 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다. $\frac{2}{3}$

191

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5 \ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

W가 x번 B가 $(5-x)$번, 옮겨진 공 개수는

$2x+1\cdot(5-x) \ge 7,\quad x \ge 2.$

(분모) $1-$(W가 0번, 1번) 여사건

$1-\left(\frac{2}{3}\right)^5-{}_5C_1\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{131}{243}$

(분자)

흰 공 2개씩 옮기므로 $a_k=b_k$는 짝수.

$a_k=b_k=4$이려면 W 2번, B 4번 필요. 6번은 불가.

흰 2개 → W 1번
검 2개 → B 2번) 3회 중 W.B.B. $a_3=b_3=2$

①	②	③	④	⑤
W	B	B	W	W
W	B	B	W	B

${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_2C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{12}{243}$

${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{48}{243}$

(W는 2번 이상)

$\therefore \frac{60}{243}$

(조건부 확률) $=\frac{60}{131}$ $\boxed{191}$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{1\cdot n-2} = 5$$

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$ ④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

$$f'(x^3+x)\times(3x^2+1) = e^x$$

$x=1$ $\quad f'(2)\times 4 = e$

$$f'(2) = \frac{e}{4}$$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{2}=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

첫항 a_1, 공비 r^2

첫항 $a_2=a_1r$ 공비 r^2

첫항 a_1^2 공비 r^2

	첫항	공비
$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$	a_1	r
$a_{2n-1}=a_1(r^2)^{n-1}$	a_1	r^2
$a_{2n}=a_1r\cdot(r^2)^{n-1}$	a_1r	r^2
$a_n^2=a_1^2(r^2)^{n-1}$	a_1^2	r^2

$$\frac{a_1}{1-r^2}-\frac{a_1r}{1-r^2}=3,\quad \frac{a_1^2}{1-r^2}=6$$

$$\frac{a_1(1-r)}{1-r^2}=\frac{a_1}{1+r}=3,\quad \underbrace{\frac{a_1}{1-r}}_{ㄴ}\times\underbrace{\frac{a_1}{1+r}}_{ㄱ}=6$$

2 3

ㄱ ÷ ㄴ $\Rightarrow r=-\frac{1}{5},\ a_1=\frac{12}{5}.$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{12}{5}\times\frac{5}{6}=2$$

* 미리 알고 있으면 좋은 지식

공비 r인 등비 수열 $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$에 대하여

① $(a_n)^p=a_1^p\cdot(r^p)^{n-1}$는 공비 r^p인 등비

② p칸 간격으로 고르면 공비 r^p인 등비

예시) 1, 2, 4, 8, 16, ⋯ ($\times 4$, $\times 4$)

제곱 ↓

1, 4, 16, 64, 256, ⋯

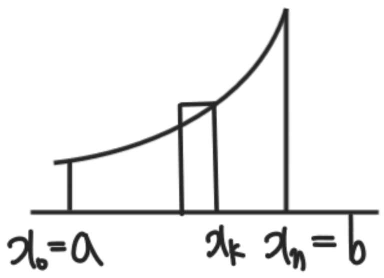
26. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$ 의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\,\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln|x^3+3x^2+1|\right]_0^1=\frac{\ln 5}{3}$$

* 급수 → 정적분



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\underbrace{x_k}_{a+\frac{b-a}{n}k})\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$$

① $a+\frac{pk}{n}\to x,\ \frac{p}{n}\to dx,\ \int_a^{a+p}$

② $\frac{pk}{n}\to x,\ \frac{p}{n}\to dx,\ \int_0^{p}$

③ $\frac{k}{n}\to x,\ \frac{1}{n}\to dx,\ \int_0^{1}$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

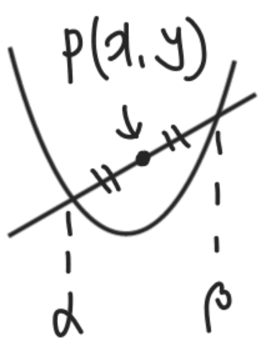
① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$

④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$ 두 근 α, β

$\alpha+\beta=t^2$

$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{t^2}{2}$



$y=\frac{1}{2}\left(\left(t^2\alpha-\frac{\ln t}{8}\right)+\left(t^2\beta-\frac{\ln t}{8}\right)\right)$

$=\frac{t^2}{2}(\alpha+\beta)-\frac{\ln t}{8}=\frac{t^4}{2}-\frac{\ln t}{8}$

$\int_1^e \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$

$=\int_1^e \sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt$

$=\int_1^e 2t^3+\frac{1}{8t}\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln t\right]_1^e$

$=\left(\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^4-\frac{3}{8}$

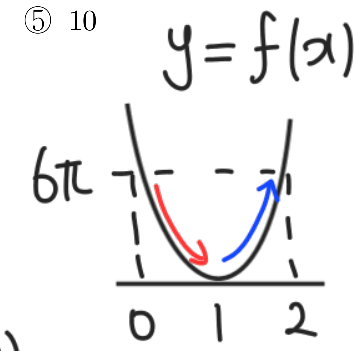
28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=12\pi(x-1)$



$g'(x)=f'(x)(3-4\sin f(x))$

$=12\pi(x-1)(3-4\sin f(x))$

① $x=0\to1$, $f(x)=6\pi\to0$

$(x-1)$ ⊖ $(3-4\sin f(x))$가 ⊕→⊖ 되는 곳 3개

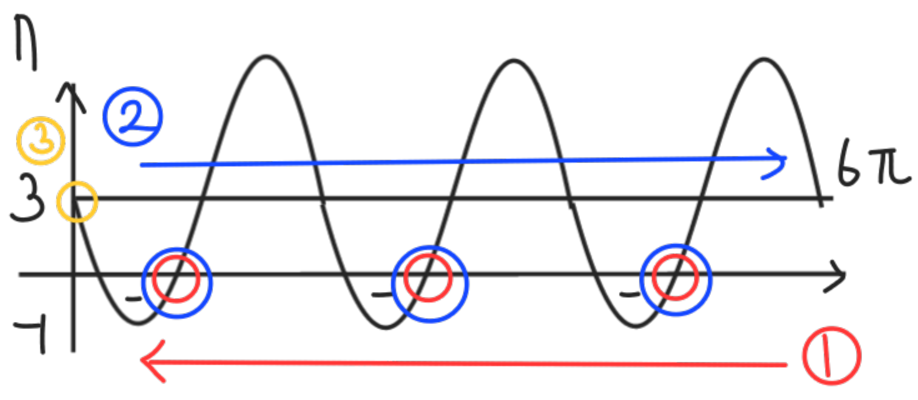
② $x=1\to2$, $f(x)=0\to6\pi$

$(x-1)$⊕ $(3-4\sin f(x))$가 ⊖→⊕ 되는 곳 3개

③ $x=1$ 극소인가? ok 1개

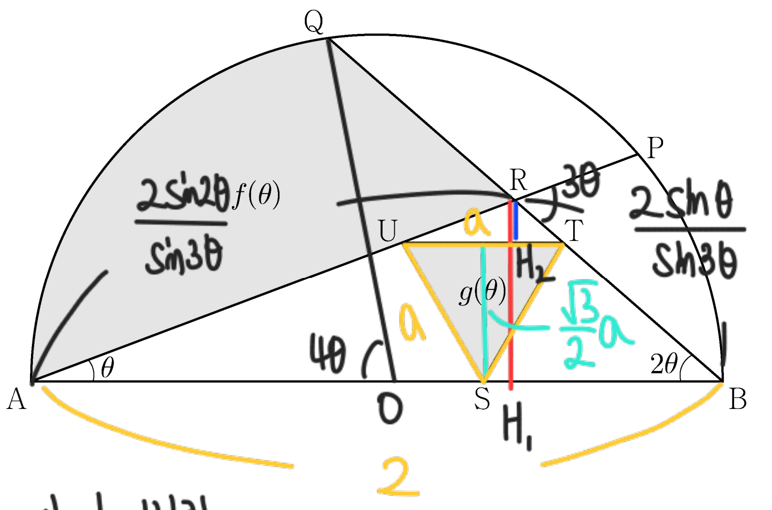
x	$1-$	1	$1+$
$x-1$	⊖	0	⊕
$f(x)$	$0+$	0	$0+$
$3-4\sin f(x)$	⊕	3	⊕
$g'(x)$	⊖	0	⊕

⊖→⊕ 극소 ok

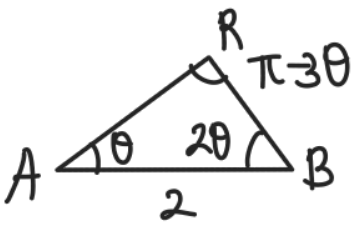


단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QBA=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

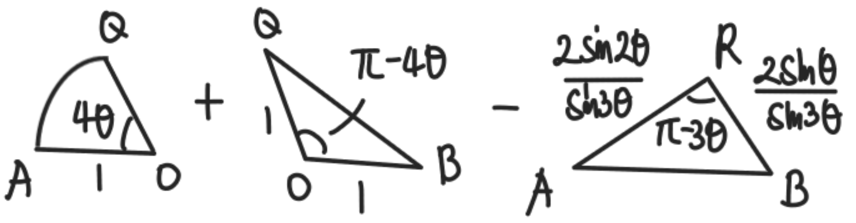


△ABQ 사인 법칙



$\overline{AR}=\frac{2}{\sin3\theta}\times\sin2\theta \to \frac{4}{3}$

$\overline{BR}=\frac{2}{\sin3\theta}\times\sin\theta \to \frac{2}{3}$

$f(\theta)=$ 

$=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot4\theta+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin4\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sin\theta\cdot\sin2\theta}{\sin3\theta\cdot\sin3\theta}\times\sin3\theta$

$f(\theta)\to\ 2\theta+2\theta-\frac{4}{3}\theta=\frac{8}{3}\theta$

$\overline{H_1R}=\overline{BR}\ \sin2\theta=\frac{2\sin\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}$

$\overline{H_2R}:\overline{H_1R}=a:2$이므로 $\overline{H_1H_2}=\frac{2\sin\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}\times\left(1-\frac{a}{2}\right)=\frac{\sqrt3}{2}a$

$\theta\to0$ 일때 $\frac{4\theta}{3}\left(1-\frac{a}{2}\right)\fallingdotseq\frac{\sqrt3}{2}a$. $a\fallingdotseq\frac{8\theta}{4\theta+3\sqrt3}$

$g(\theta)=\frac{\sqrt3}{4}a^2$,

$\frac{g(\theta)}{\theta f(\theta)}\fallingdotseq\frac{\sqrt3}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{64\theta^2}^{\,2}}{\underbrace{16\theta^2+24\sqrt3\theta}_{\to 0}+27}\times\frac{3}{\cancel{8\theta^2}}\to\frac{\sqrt3\times2\times3}{27}=\frac{2\sqrt3}{9}$. $\boxed{11}$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
$=g(1)$
(나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$x\geq1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

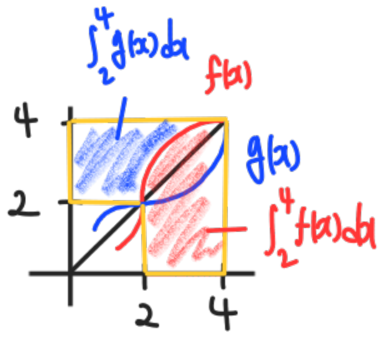
$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

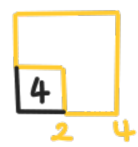
★ $x=1$ 대입 : $g(2)=2f(1)=2$, $g(2)=2=f(2)$. (∵역함수)
$x=2,4$ 대입 : $f(4)=g(4)=4$, $f(8)=g(8)=8$.

$\int_1^8 xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_1^8-\int_1^8 f(x)\,dx$
$=63-\left(\int_1^2 f(x)+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx\right)$

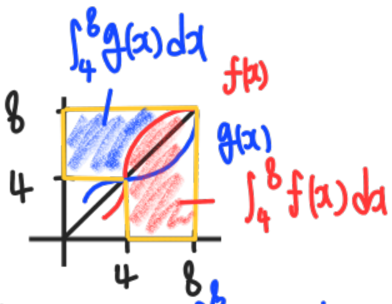
① $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$는 주어짐

② $\int_2^4 f(x)dx=7$ 이다.



$\int_1^2 2f(x)dx=\int_1^2 g(2x)dx$,
$2\times\frac{5}{4}=\int_1^2 g(2x)dx=\int_2^4\frac{1}{2}g(t)dt$, $\int_2^4 g(x)dx=5$
$\int_2^4 g+\int_2^4 f=$  $=4^2-2^2=12$ 이므로 $\int_2^4 f(x)dx=7$

③ $\int_4^8 f(x)dx=20$ 이다.



$\int_2^4 2f(x)dx=\int_2^4 g(2x)dx$
$2\times7=\int_2^4 g(2x)dx=\int_4^8\frac{1}{2}g(t)dt$, $\int_4^8 g(x)dx=28$
$\int_4^8 g+\int_4^8 f=$  $=8^2-4^2=48$ 이므로 $\int_4^8 f(x)dx=20$

$\therefore\int_1^8 xf'(x)dx=63-\left(\frac{5}{4}+7+20\right)=\frac{139}{4}$ $\boxed{143}$

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(2, 1, 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [2점]

① $5\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

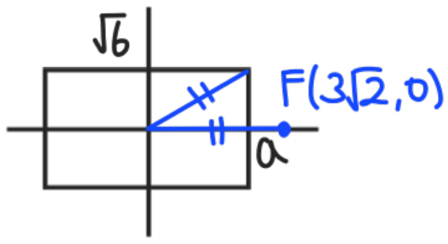
A(2,1,3)
P(2,1,−3)
Q(−2,1,3)

$\overline{PQ} = \sqrt{16+0+36}$
$= 2\sqrt{13}$

24. 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2}, 0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{6} = 1$의 주축의 길이는? (단, a는 양수이다.) [3점]

$= 2a$

① $3\sqrt{3}$ ② $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$



$a^2+6=18$
$a^2=12$
$a=2\sqrt{3}$
$2a=4\sqrt{3}$

25. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x+1}{2}=y-3,\quad x-2=\frac{y-5}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

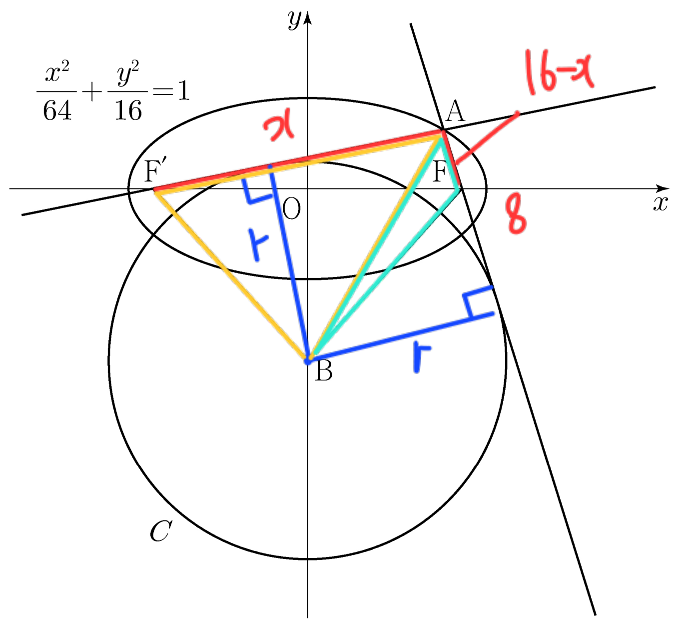
$\vec{u_1}=(2,1)\quad \vec{u_2}=(1,3)$

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=|\vec{u_1}||\vec{u_2}|\cos\theta$

$2+3=\sqrt{5}\times\sqrt{10}\cos\theta,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

26. 두 초점이 F, F$'$인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF$'$에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때 사각형 AFBF$'$의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$



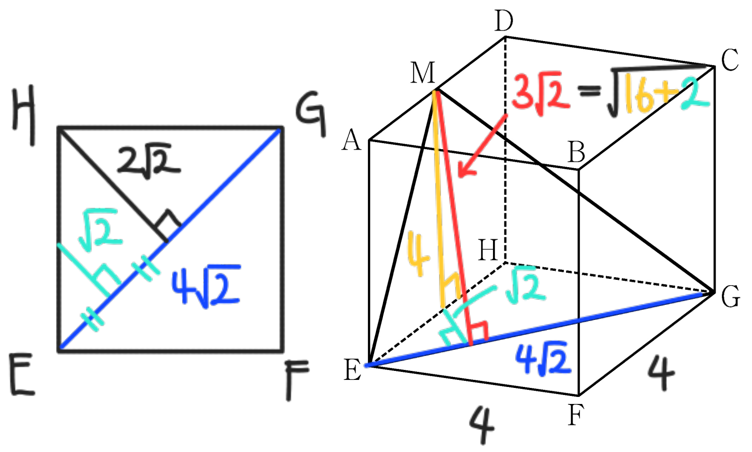
$72=\triangle ABF'+\triangle ABF$

$=\frac{1}{2}\times x\times r+\frac{1}{2}\times(16-x)\times r$

$=\frac{1}{2}\times(\cancel{x}+16-\cancel{x})\times r$

$72=8r,\quad r=9$

27. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD-EFGH가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는? [3점]

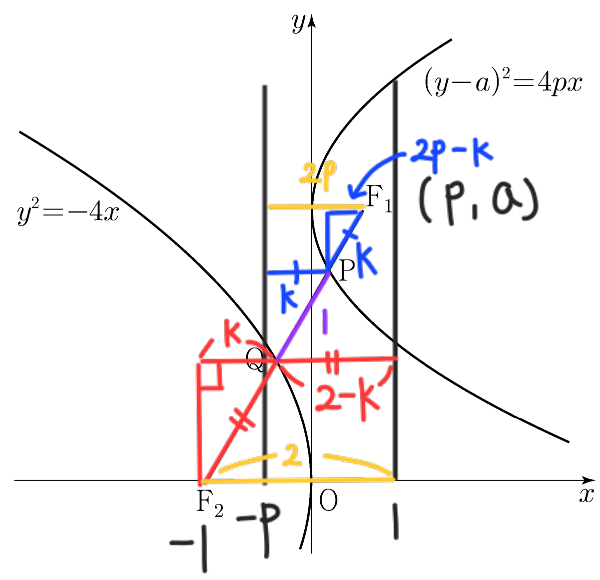


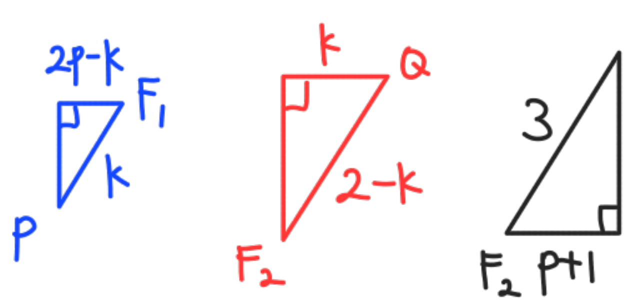
① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

$\triangle MEG = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 12$

28. 두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자. 선분 F_1F_2가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{F_1F_2}=3$, $\overline{PQ}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7





모두 닮음

↪ $a^2+(p+1)^2=9$

$$\frac{2p-k}{k} \overset{①}{=} \frac{k}{2-k} \overset{②}{=} \frac{p+1}{3}$$

$(p+1)k=2p$
$pk=2p-k$

① $k^2-(2p+2)k+4p=k^2$, $pk=2p-k$

② $3k=2p-pk+2-k$, $pk=2p-4k+2$

$-)$ ――――――――

$k=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{2}$

$a^2+(p+1)^2=9$ 이므로 $a^2=\frac{27}{4}$. $p^2=\frac{1}{4}$.

$a^2+p^2=7$

단답형

29. 좌표평면에서 $\overline{OA}=\sqrt{2}$, $\overline{OB}=2\sqrt{2}$이고 $\cos(\angle AOB)=\frac{1}{4}$인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$로 보면 $\overrightarrow{BP}$만 시점 다르다. $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}$로 살펴볼까?

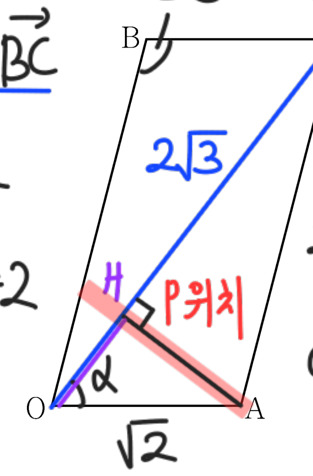
(가) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$

(나) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

↳ OACD 내부&경계

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

$\text{Cos} = -\frac{1}{4} = \frac{2+8-\overline{BC}^2}{2\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}$, $\Rightarrow \overline{BC}=2\sqrt{3}$



$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=2$

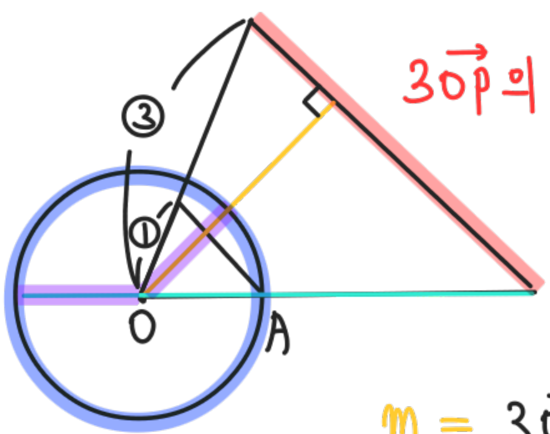
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

$\text{Cos}\alpha=\frac{2+12-8}{2\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

$\overrightarrow{OP}$를 $\overrightarrow{OC}$에 정사영한 $\overline{OH}$ 길이 ∴ $\overline{OH}=\overline{OA}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|\overrightarrow{OP}|\cos\theta\times|\overrightarrow{OC}|=3$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $=2\sqrt{3}$



$m=3\overline{OH}-r=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$

$M=3\overline{OA}+r=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$M\times m=6\sqrt{6}-8$

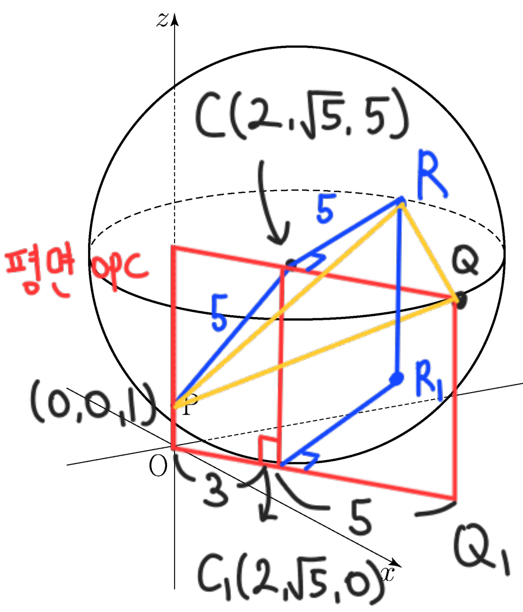
$36+64=100$

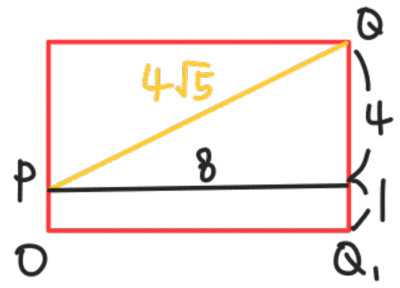
$\boxed{100}$

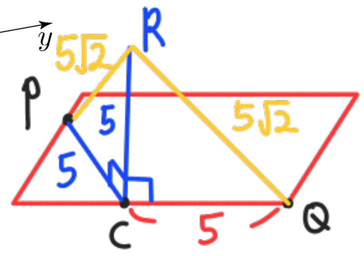
30. 좌표공간에 중심이 $C(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 $P(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S:(x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자.
삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



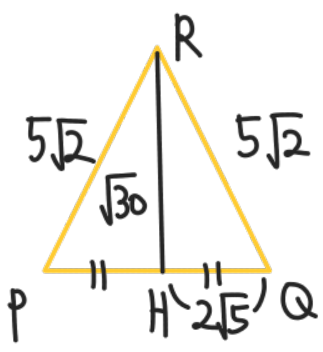




O, C_1, Q_1 한 직선 위에 있을 때 밑변 $\overline{OQ_1}$ 최댓값 8

OPC 평면 & CR 직선 수직일 때 높이 $\overline{C_1R_1}$ 최댓값 5

$\triangle OQ_1R_1=\frac{1}{2}\times 8\times 5=20.$



$\overline{RH}=\sqrt{50-20}=\sqrt{30}$

$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times\sqrt{30}=10\sqrt{6}$

이면각 θ, $\text{Cos}\theta=\frac{\triangle OQ_1R_1}{\triangle PQR}=\frac{2}{\sqrt{6}}$

(정사영 넓이) $=\triangle OQ_1R_1\times\text{Cos}\theta=20\times\frac{2}{\sqrt{6}}$

$=\frac{20}{3}\sqrt{6}$

$\boxed{23}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.