지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00037927032

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/8588

입니다. 감사합니다!

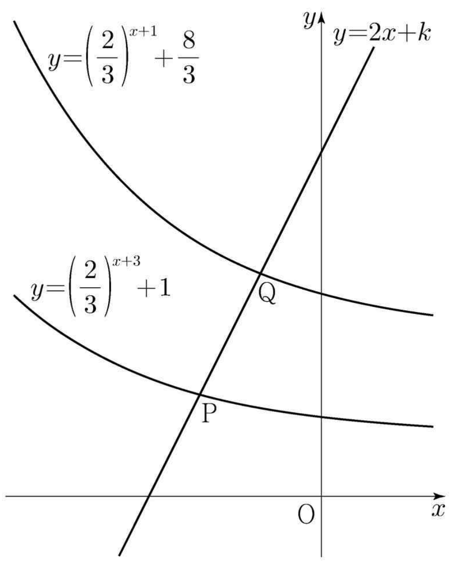
아드레날린 ex
공통

1. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? 〔2022학년도 수능 09〕

① $\frac{31}{6}$　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{11}{2}$　④ $\frac{17}{3}$　⑤ $\frac{35}{6}$

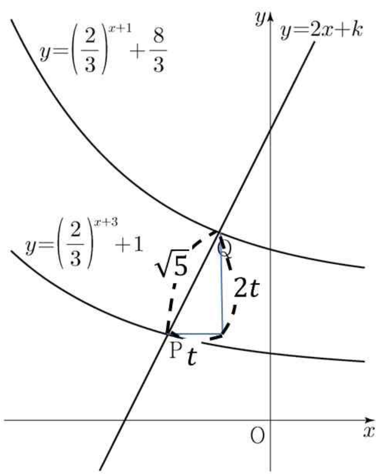


1. 정답 ④ 〔2022학년도 수능 09〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰

$y=2x+k$가 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$와 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자고 합니다. 그림에도 표시가 되어 있죠? 그리고 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$을 x축 방향으로 2만큼, y축 방향으로 $\frac{5}{3}$만큼 움직이면 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$이 됩니다. 평행이동 관계네요. 이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때 k의 값을 구하랍니다.

일단 잘 생각해봅시다. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$입니다. 그런데 P, Q는 $y=2x+k$ 위의 점이죠. $y=2x+k$의 기울기는 2잖아요? 그러니까 x값이 1증가하면 y값이 2증가하는 형태란 말이에요. 이때 선분 PQ를 한 변으로 하는 직각삼각형을 그리면 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$가 되겠죠? 그러니까



이렇게 된다는 거예요. 기울기가 2니까 x값이 t만큼 증가한다면 y값은 $2t$만큼 증가하겠죠. 피타고라스를 쓰면 $t^2+(2t)^2=5$이고 $t=1$입니다.

이때 P의 x좌표를 p라고 해볼까요? 그러면 $\mathrm{P}\left(p,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1\right)$입니다. Q의 좌표는 P의 좌표보다 x값은 1만큼 크고 y값은 2만큼 크죠? 그러면 $\mathrm{Q}\left(p+1,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3\right)$이 되어야 합니다. 그런데 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$에 $x=p+1$을 넣으면 $\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}$이네요. 결국 $\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$이어야 하고 정리하면

$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=\frac{1}{3}$입니다. $\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1=\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$이네요. 이게 되려면 $p+2=0$이고 $p=-2$이어야 하겠죠?

$\mathrm{P}\left(-2,\ \frac{5}{3}\right)$이고 $\mathrm{Q}\left(-1,\ \frac{11}{3}\right)$입니다. 아무거나 $y=2x+k$에 넣으면 $-4+k=\frac{5}{3}$이고 $k=\frac{17}{3}$이 나오네요.

답은 ④번입니다.

2. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? 〔2022학년도 수능 10〕

① -18　　② -17　　③ -16　　④ -15　　⑤ -14

2. 정답 ⑤ 〔2022학년도 수능 10〕

1) 문제해석

$y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때 $f'(2)$를 구하라네요.

일단 $(0,\ 0)$은 $y=f(x)$ 위의 점이에요. 그러면 $f(0)=0$이 되겠죠? 그리고 $(0,\ 0)$에서의 접선은 $y=f'(0)(x-0)+f(0)=f'(0)x$입니다.

또한 $(1,\ 2)$는 $y=xf(x)$ 위의 점이니까 $f(1)=2$입니다. 그 점에서의 접선은 $(f(1)+f'(1))(x-1)+f(1)=(f'(1)+2)x-f'(1)$이네요.

이 둘이 같아야 하죠? 그러면 $f'(0)x=(f'(1)+2)x-f'(1)$은 항등식입니다. 완전히 같은 두 식이니까요. 좌변에 상수항이 없죠? 우변에도 없어야겠네요. $f'(1)=0$입니다. 그러면 $f'(0)x=2x$입니다. $f'(0)=2$입니다.

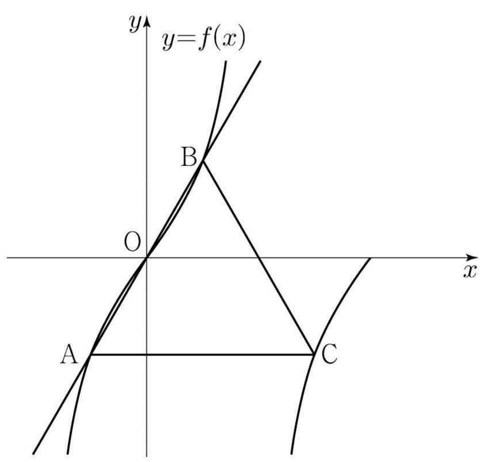
2) 함수 구하기 - 차함수

일단 $y=f(x)$와 $y=2x$는 $(0,\ 0)$에서 접합니다. 그리고 $f(1)=2$이니까 $y=f(x)$와 $y=2x$는 $(1,\ 2)$에서는 그냥 만나겠네요. $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 차함수에 의하여 $f(x)-2x=ax^2(x-1)$입니다. $f(x)=ax^2(x-1)+2x$이네요. $f'(1)=0$이니까 미분하고 값을 넣어봅시다. 미분하면 $f'(x)=3ax^2-2ax+2$인데 $f'(1)=a+2=0$이니까 $a=-2$입니다. $f'(x)=-6x^2+4x+2$이고 $f'(2)=-14$이네요. 답은 ⑤번입니다.

3. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \mid -\frac{a}{2} < x \leq a,\ x \neq \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)
〔2022학년도 수능 11〕



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

3. 정답 ③ 〔2022학년도 수능 11〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰

$a>0$인데 $\left\{x \mid -\frac{a}{2}<x\le a,\ x\ne\frac{a}{2}\right\}$에서 $f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$이랍니다. 그림도 있네요.

이때 $y=f(x)$ 위를 지나는 세 점 O, A, B이 있는데 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라고 한답니다. ABC가 정삼각형일 때 ABC의 넓이를 구하랍니다.

일단 잘 생각을 해보죠. $-\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2}$에서 $f(x)$는 원점대칭함수에요. 이 상황에서 원점을 지나는 직선이 $y=f(x)$와 점 A, B에서 만난다는 건 A, B의 중점은 원점이 된다는 말이겠죠. 원점을 지나는 직선 역시 원점대칭함수잖아요. 다시 표현하면 A, B의 x좌표는 부호가 반대입니다.

또한 C는 A에서 x축에 평행한 직선을 그어서 $y=f(x)$와 만나는 점이에요. $f(x)$는 주기가 있죠? a가 주기입니다. 그러면 A와 C의 x좌표의 차이는 a겠네요. 일단 정삼각형의 한 변의 길이는 나왔어요.

마지막으로 B와 C를 살펴봐야겠네요. A와 B가 점 (0, 0)에 대하여 대칭이었잖아요? 일단 A의 x좌표를 $-t$라 하면 B의 x좌표는 t입니다. 이때 삼각형 ABC는 정삼각형이니까 A와 B의 x값의 차이는 C와 B의 x값의 차이와 같아야겠죠? A와 C의 x값의 중점이 B의 x값이 될 테니까요. 정삼각형이잖아요. 따라서 C의 x좌표는 B의 x좌표인 t에 B의 x좌표와 A의 x좌표의 차이인 $2t$를 더한 $3t$가 되어야 합니다. 그런데 아까 A와 C의 x좌표의 차이는 a라고 했었죠? 따라서 $3t-(-t)=a$이고 $t=\frac{a}{4}$입니다.

$\mathrm{A}\left(-\frac{a}{4},\ \tan-\frac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{a}{4},\ \tan\frac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{3a}{4},\ \tan\frac{3\pi}{4}\right)$이네요.

아까 정삼각형 한 변의 길이는 a라고 했어요. 그러면 $\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{a}$여야겠죠? 선분 AB도 정삼각형의 한 변이니까요. 그럼 이거는 점과 점 사이의 관계를 이용해야겠어요.

그런데 사실 이거는 굳이 그러지 않아도 돼요. 왜냐면 A, B는 원점 대칭이잖아요. $\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{a}$는 사실상 $2\overline{\mathrm{OB}}=\mathrm{a}$와 같죠. $\tan\frac{\pi}{4}=1$이니까 피타고라스의 정리에 의하여 $\left(\frac{a}{4}\right)^2+1^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$입니다. $a^2=\frac{16}{3}$이네요.

이제 ABC의 넓이를 구해봅시다. 공식은 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이잖아요? 따라서 넓이는 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$입니다. 답은 ③번이네요.

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? 〔2022학년도 수능 12〕

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

4. 정답 ③ 〔2022학년도 수능 12〕

1) 문제해석

$f(x)$가 연속인데 $\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$랍니다. …? 이건 뭘까요?

언제나 침착해야 해요. 일단 공통된 부분을 찾아봅시다. 공통적인 부분이 보이면 묶는 것이 습관화되어있어야 해요. 일단 x^2이 공통되어 있고 $f(x)$가 공통되어 있어요. 그러면 x^2끼리 묶고 $f(x)$끼리 묶어볼까요?

$f(x)^2(f(x)-1)-x^2(f(x)-1)=0$입니다. 또 공통된 것이 보이죠? 묶으면

$\left(f(x)^2-x^2\right)(f(x)-1)=(f(x)-x)(f(x)+x)(f(x)-1)=0$입니다. 이걸 다시 표현하면 $f(x)=x$ 이거나 $f(x)=-x$이거나 $f(x)=1$이어야 한다는 거네요. 이렇게 표현하니까 좀 쉬워졌어요.

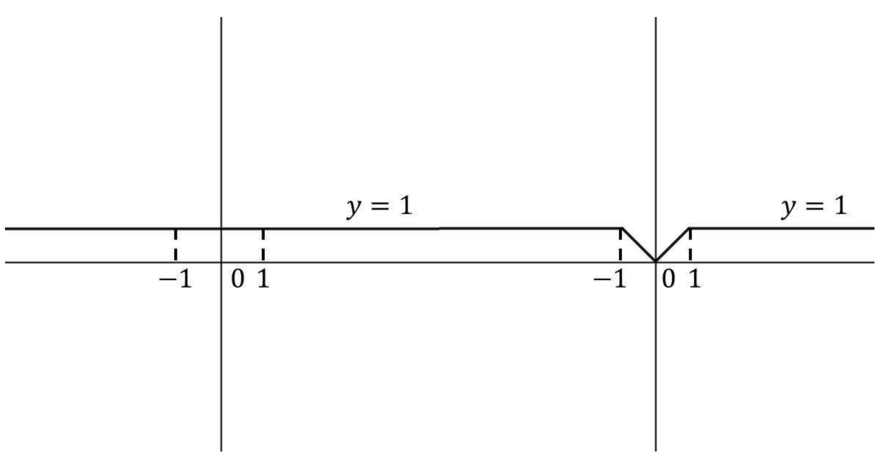
이때 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 0이랍니다. 일단 생각을 좀 해보죠. $x>1$에서 $f(x)=x$이면 최댓값이 1을 넘어버려요. 그리고 $f(x)=-x$이면 최솟값이 0보다 작아져버리죠. 따라서 $x>1$에서 $f(x)=1$입니다.

$f(x)$는 연속이니까 $x=1$보다 작은 부분에서는 $f(x)=1$과 연결되게 만들어야겠죠? 경우는 두 가지네요. 계속 $f(x)=1$이거나 $f(x)=x$로 연결되거나.

한편, 아까랑 마찬가지의 논리로 $x<-1$에서 $f(x)=-x$이면 최댓값이 1을 넘습니다. 그리고 $x<-1$에서 $f(x)=x$이면 최솟값이 0보다 작아지죠. 따라서 $x<-1$에서 $f(x)=1$입니다.

또한 $x<0$에서 $f(x)=x$이면 최솟값이 0보다 작아져요. 그러면 $-1\le x<0$에서 가능한 건 $f(x)=1$이거나 $f(x)=-x$입니다. 둘 다 $x<-1$에서 $f(x)=1$과 연결되니까 연속은 만족하구요.

이러면 결국 가능한 그래프는 두 가지에요.



하지만 최솟값이 0이 되는 건 오른쪽 그래프죠. $f(x)$를 찾았어요!

이제 $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$를 구해봅시다. $f\left(-\frac{4}{3}\right)=1$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$이니까 다 더하면 $\frac{3}{2}$이네요. 답은 ③번입니다.

5. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|dt=2$를 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
〔2022학년도 수능 14〕

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 정답 ③ 〔2022학년도 수능 14〕

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 $x(t)=t(t-1)(at+b)$ $(a \neq 0)$랍니다. 일단 함수가 주어졌으니 관찰을 좀 해볼까요?

$t=0$, $t=1$에서 t축과 만납니다. 나머지 하나는 미지수가 두 개라서 아직은 잘 모르겠네요.

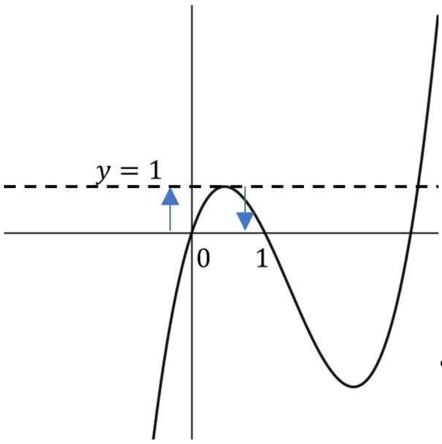
이때 속도 $v(t)$에 대하여 $\int_0^1 |v(t)|dt=2$랍니다. 0부터 1까지 움직인 거리가 2라는 거네요. $v(t)$는 이차함수니까 이차함수에 절댓값을 씌운 후에 0부터 1까지 적분하면 정적분값이 2가 나온다는 건데.. 아직인 이거 가지고 뭘 하지는 못하겠어요. 그래프라도 그려야 뭘 알 수 있을 텐데요.

ㄱ에서 $\int_0^1 v(t)dt=0$이냐고 물어봅니다. 속도를 적분하면 위치죠? 따라서

$\int_0^1 v(t)dt=x(1)-x(0)=0-0=0$입니다. 맞네요! ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하냐고 물어봅니다. 다시 해석해보면, $0<t_1<1$인 어떤 t_1에 대하여 $x(t_1)$의 함숫값의 절댓값이 1보다 커지는 부분이 있냐고 물어보는 거네요.

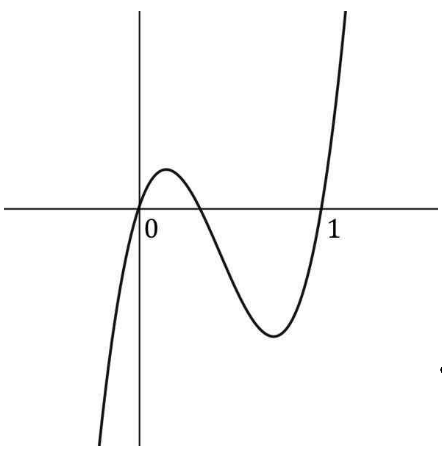
잘 생각해보세요. 0부터 1까지 P가 움직인 거리는 2에요. 이 "움직인 거리"라는 것의 정확한 의미는 (위로 올라간 높이)-(아래로 내려간 높이)를 의미하는 거예요. 제가 말했듯이 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직이죠. 그러니까 우리가 아는 x, y축 그래프를 오른쪽으로 눕히면(y축이 ㅡ자가 되도록 회전시키는 거죠.) y축이 수직선 역할을 하게 되는 거예요. 이때 P가 오른쪽으로 움직이면 변화량은 (+), 왼쪽으로 움직이면 변화량이 (−)가 됩니다.



이 그림을 잘 보세요. 위로 1만큼 움직였고, 아래로 1만큼 움직였죠?

이때 “변화량”의 합은 0이 됩니다. 위로 움직이는 건 (+)이지만 아래로 움직이는 건 (−)거든요. 그런데 움직인 “거리”는 2가 됩니다. 다 절댓값으로 바꿔서 더하니까요.

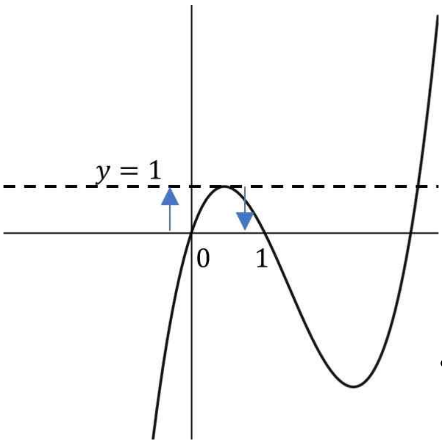
$x(0)=x(1)=0$이므로 $x(t)$의 그래프는 0에서 시작해 위로 움직이더라도(아래로 움직이더라도) 다시 0으로 돌아와야 해요. 그런데 잘 생각해보세요. 만약 $|x(t_1)|>1$인 부분이 있다면, 올라갔다, 내려갔다(혹은 반대로)하면서 변화량은 0이 되겠지만 거리는 2보다 커지겠죠? 1이 넘는 거리를 왔다갔다했잖아요.



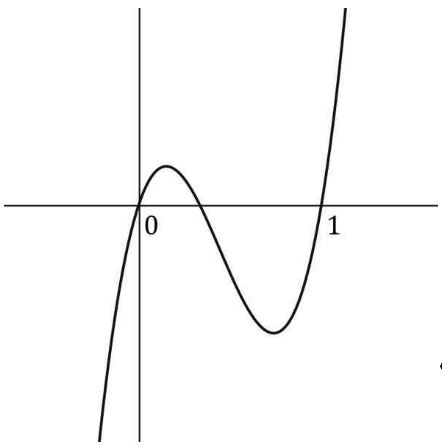
이 그래프 역시 마찬가지에요. 이때는 왔다갔다를 두 번해야 합니다.

그런데 왔다갔다를 두 번해서 모두 더한 게 2라면 더더욱 $|x(t_1)|>1$인 부분이 있으면 안 되죠. 이러면 0부터 1까지 거리는 2보다 훨씬 커질 테니까요. 왔다갔다해서 거리가 2보다 큰데 왔다갔다를 한 번 더 해야 하잖아요. 그럼 당연히 거리는 2보다 커지게 되겠죠. 따라서 ㄴ은 아닙니다.

ㄷ에서 $0 \le t \le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하냐고 물어봅니다. 일단 모든 t에 대하여 값이 1을 넘으면 안 돼요. 그런데 아까



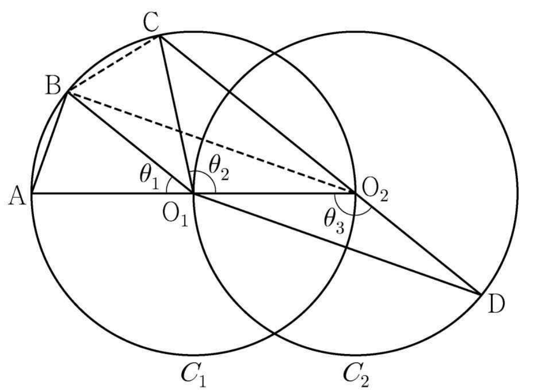
이 그래프는 극값이 1이 되어야 하죠. 그래야 위로 갈 때 거리 $1+$ 아래로 갈 때 거리 1해서 움직인 거리가 2가 되어야 하잖아요. 이러면 $|x(t)|<1$이 안 되죠. 이 그래프를 배제시키라는 거예요. 그러면 남은 그래프는 하나죠.



이거요.(최고차항은 음수가 될 수도 있습니다. 일단 그냥 그린 거예요.)

이러면 극값이 무조건 1보다 작아야 합니다. 이유는 앞에서 설명했죠? 왔다갔다+왔다갔다 인데 왔다갔다에서 이미 거리가 2 이상이 되어버리니까 안 되죠. 그러니까 $0 \le t \le 1$에서 $|x(t)|<1$가 되는 거예요.
그러면 $x(t_2)=0$가 존재하네요. 지금 보면 0과 1 사이에 t축과 만나는 부분이 하나 있잖아요. ㄷ은 맞습니다. 함수를 $x(t)=t(t-1)(at+b)$ $(a \ne 0)$로 굳이 $x(0)=x(1)=0$으로 준 이유가 있었네요. 그리고 $\int_0^1 |v(t)|dt=2$를 준 것도, ㄱ, ㄴ에서 범위를 $0<x<1$로 한정해서 준 것도 이유가 있었구요. 아무튼 답은 ③번입니다.

6. 두 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{O_1O_2}}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$와 세 점 C, $\mathrm{O_2}$, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle \mathrm{BO_1A} = \theta_1$, $\angle \mathrm{O_2O_1C} = \theta_2$, $\angle \mathrm{O_1O_2D} = \theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{O_1D}} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

$\angle \mathrm{CO_2O_1} + \angle \mathrm{O_1O_2D} = \pi$이므로 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$이고
$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle \mathrm{CO_1B} = \theta_1$이다.
이때 $\angle \mathrm{O_2O_1B} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 삼각형 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = k$라 할 때
$\overline{\mathrm{BO_2}} = \overline{\mathrm{O_1D}} = 2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{\mathrm{AO_2}} = \boxed{(가)}$이고,
$\angle \mathrm{BO_2A} = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)}$이다.
삼각형 $\mathrm{O_2BC}$에서
$\overline{\mathrm{BC}} = k$, $\overline{\mathrm{BO_2}} = 2\sqrt{2}k$, $\angle \mathrm{CO_2B} = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로
코사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{O_2C}} = \boxed{(다)}$이다.
$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{O_2D}} + \overline{\mathrm{O_2C}} = \overline{\mathrm{O_1O_2}} + \overline{\mathrm{O_2C}}$이므로
$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = \mathrm{k} : \left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2} + \boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? 〔2022학년도 수능 15〕

① $\frac{169}{27}$　② $\frac{56}{9}$　③ $\frac{167}{27}$　④ $\frac{166}{27}$　⑤ $\frac{55}{9}$

6. 정답 ② 〔2022학년도 수능 15〕

1) 그림 있으면 그림 보면서

원 C_1, C_2가 있는데 중심이 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{O_1O_2}}$이랍니다. 같은 원 두 개네요. 이때 원 $\mathrm{C_1}$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 있어요. 그림에 보이죠? 그리고 A, $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$가 한 직선 위에 있고, C, $\mathrm{O_2}$, D가 한 직선 위에 있답니다. 이것도 그림에서 확인할 수 있어요.

이때 $\angle \mathrm{BO_1A} = \theta_1$, $\angle \mathrm{O_2O_1C} = \theta_2$, $\angle \mathrm{O_1O_2D} = \theta_3$라고 하자고 합니다. 이것도 보이네요.
$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{O_1D}} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하려고 한답니다. 이제 과정을 볼게요.

$\angle \mathrm{CO_2O_1} + \angle \mathrm{O_1O_2D} = \pi$라네요. 이건 따라올 수 있죠? 그림에서 180°를 두 개의 각으로 찢은 거잖아요. 그리고 $\angle \mathrm{O_1O_2D} = \theta_3$이구요. $\angle \mathrm{CO_2O_1} = \pi - \theta_3$이네요. 이때 삼각형 $\mathrm{CO_2O_1}$는 이등변삼각형이죠? 두 변의 길이가 반지름의 길이니까요. 그러면 $\angle \mathrm{CO_2O_1} = \pi - \theta_3 = \angle \mathrm{O_2CO_1}$겠네요. 삼각형의 세 각의 합은 π이니까 $\angle \mathrm{O_1O_2C} = \pi - \theta_3 = \angle \mathrm{O_2CO_1} = \theta_3 - \theta_2$입니다. 따라서 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$이네요. 음... 굳이 알 필요는 없었을까요? 일단 좀 더 가봅시다.

$\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$와 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$를 정리하면 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$가 되죠? $\angle \mathrm{BO_1C} = \theta_1$입니다. 이거는 180°를 세 각으로 찢은 거네요. θ_1, θ_2으로 찢으면 나머지 $\angle \mathrm{BO_1C}$가 남죠. 그런데 $2\theta_1 + \theta_2 = \theta_1 + \theta_1 + \theta_2 = \pi$이니까 $\angle \mathrm{BO_1C} = \theta_1$가 되겠네요. 거기에 삼각형 $\mathrm{BAO_1}$과 $\mathrm{CBO_1}$도 합동입니다. 각이 θ_1로 같고 두 변의 길이가 반지름이잖아요. 요정도 확인해주자구요.

그리고 $\angle \mathrm{O_2O_1B} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$라고 합니다. 이거도 그림 보면 알 수 있죠? 그래서 삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이랍니다. 일단 한 각이 θ_3로 같고, $\overline{\mathrm{O_1O_2}}$라는 변을 공유하고, $\overline{\mathrm{BO_1}} = \overline{\mathrm{O_2D}}$이죠.

$\overline{\mathrm{AB}} = k$라 할 때 $\overline{\mathrm{BO_2}} = \overline{\mathrm{O_1D}} = 2\sqrt{2}k$라네요. 일단 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{O_1D}} = 1 : 2\sqrt{2}$이죠? 거기에 삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이니까 $\overline{\mathrm{BO_2}} = \overline{\mathrm{O_1D}} = 2\sqrt{2}k$가 되네요. 이때 $\overline{\mathrm{AO_2}} = \boxed{\text{(가)}}$랍니다.

그림을 잘 보세요. 지름을 한 변으로 하는 원에 내접하는 삼각형의 한 각은 90°잖아요? 그러면 삼각형

ABO_2에서 $\angle O_2BA = \frac{\pi}{2}$이네요. 이러면 피타고라스의 정리로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$를 구할 수 있죠?

$k^2+(2\sqrt{2}k)^2 = 9k^2$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}=f(k)=3k$입니다.

$\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$라네요. 일단 삼각형 BAO_1은 이등변삼각형이니까

$\angle O_1BA = \frac{\pi-\theta_1}{2}$입니다. 그런데 $\angle O_2BA = \frac{\pi}{2}$이니까 $\angle O_2BO_1 = \frac{\theta_1}{2}$입니다. 이때 삼각형 BO_1O_2도

이등변삼각형이죠? 두 변의 길이가 반지름으로 같네요. 따라서 $\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$가 됩니다. 아무튼

$\cos\frac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}=\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=p$입니다.

2) 삼각형은 정해져 있다 : 내부 - 두 변의 길이와 한 각

삼각형 O_2BC에서 $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$이라네요. $\overline{BC}=k$는 삼각형 BAO_1과 CBO_1가

합동인 거에서 나온 거겠네요. $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$는 $\angle CO_2O_1 = \theta_1$를 $\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$로 쪼개고 남은 나머지네요.

그러므로 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이랍니다. “이므로”가 나왔으니까 알려준 거 써먹으란 얘기겠죠?

삼각형 CO_2B에서 두 변의 길이 $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$와 한 각 $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$을 아니까 코사인법칙을

사용하면 $\cos\frac{\theta_1}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{(2\sqrt{2}\mathrm{k})^2+\overline{O_2C}^2-k^2}{2\times2\sqrt{2}k\times\overline{O_2C}}$ 입니다. 이거 정리하면 $(3\overline{O_2C}-7k)(\overline{O_2C}-3k)=0$입니다.

이때 삼각형 CO_2B의 빗변의 길이는 $2\sqrt{2}k$인데 이걸 초과할 수는 없으니까 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}=g(k)=\frac{7}{3}k$입니다.

이제 마지막 $f(p)\times g(p)$를 구해봅시다. $f(k)=3k$, $g(k)=\frac{7}{3}k$, $p=\frac{2\sqrt{2}}{3}$입니다. 따라서 $\frac{56}{9}$이네요. 답은

②번입니다.

7. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다. (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. 〔2022학년도 수능 20〕

7. 정답 110 〔2022학년도 수능 20〕

1) 조건해석

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하답니다. 이때 (가)조건에서 $0 \le x \le 1$에서 $f(x)=x$라고 하네요. 그리고 (나)조건에서 어떤 상수 a, b에 대하여 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$라고 합니다. 음...?

일단 우리가 아는 건 $0 \le x \le 1$에서 $f(x)=x$밖에 없어요. 그러면 저 식도 범위를 한정해봅시다. 범위를 $0 \le x \le 1$로 한정하면 $f(x+1)-x^2=ax+b$이고 $f(x+1)=x^2+ax+b$입니다. 그러면 x 대신 $x-1$을 넣어볼까요? 그러면 $0 \le x-1 \le 1$ 즉, $1 \le x \le 2$에서 $f(x)=(x-1)^2+a(x-1)+b$입니다.

2) 미분가능은 연속 확인 + 미분계수 확인

$f(x)$는 미분가능해야 하죠? 어차피 $x=1$을 제외하고는 다항함수라 $x=1$에서만 확인하면 되겠네요. 일단 먼저 연속이어야 합니다. 따라서 좌극한값 1과 우극한값 b가 같아야 해요. $b=1$입니다. 또한 미분계수도 같아야 해요. 좌미분계수는 1인데 우측에서 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=2(x-1)+a$이니까 a이네요. 같아야 하니까 $a=1$입니다. 정리하면 $f(x)=(x-1)^2+(x-1)+1=x^2-x+1$이네요.

이제 마지막으로 $60\times\int_1^2 f(x)dx$를 구해봅시다.

$$60\times\int_1^2 f(x)dx=60\int_1^2(x^2-x+1)dx=60\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=60\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}+1\right)=110$$입니다.

참고! $\int_1^2((x-1)^2+(x-1)+1)dx=\int_0^1(x^2+x+1)dx$로 바꿔서 계산할 수도 있습니다. 평행이동을 해서 정적분을 하는 거죠. 이러면 조금 계산이 편해지겠죠?

8. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 \rvert = 2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_{n+1} \rvert = 2\lvert a_n \rvert$이다.
(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. 〔2022학년도 수능 21〕

8. 정답 678 〔2022학년도 수능 21〕

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

수열 $\{a_n\}$이 있는데 (가)조건에서 $|a_1| = 2$랍니다. 그리고 (나)조건에서 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$이라네요. 이거 아까 $|a_1| = 2$랑 연결해서 n에다 숫자 넣어보면 $|a_2| = 4$, $|a_3| = 8$, $|a_4| = 16$, $\cdots$가 되는 것 아닌가요? 그러면 $|a_n| = 2^n$이네요?

(다)조건에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$랍니다. 어라...? 우리가 아는 건 절댓값밖에 없어요. 그런데 절댓값 풀고 다 더한 게 -14랍니다. 이때 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$를 구하랍니다. 음.... 굳이 홀수항만 더하라고 한 이유가 있을까요?

아무튼 일단 다 나열해볼게요.

2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
-2	-4	-8	-16	-32	-64	-128	-256	-512	-1024

이렇게 됩니다. 위나 아래 둘 중 하나를 고르면 되는 거예요.

생각을 좀 해봅시다. 만약 $a_{10} = 1024$라면? 나머지가 다 $(-)$라고 하더라도 다 더하면 2가 됩니다. 이러면 안 되죠? 우리는 -14를 만들어야 해요. 따라서 $a_{10} = -1024$입니다.

또 생각을 해보죠. 만약 $a_9 = -512$라면? 그러면 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -1026이 됩니다. 그러면 -14를 만들 수 없어요. 따라서 $a_9 = 512$입니다.

계속 가볼까요? 만약 $a_8 = -256$이라면? 그러면 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -514가 됩니다. 이러면 또 -14를 만들 수 없죠? 따라서 $a_8 = 256$입니다.

$a_7 = -128$이라면? 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -258이 됩니다. 안 되네요. 따라서 $a_7 = 128$입니다.

$a_6 = -64$라면? 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -130이 됩니다. 따라서 $a_6 = 64$입니다.
$a_5 = -32$라면? 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -66이 됩니다. 따라서 $a_5 = 32$입니다.
$a_4 = -16$라면? 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -34이 됩니다. 따라서 $a_4 = 16$입니다.
이제 여기서부터는 조심해야 해요. 왜냐면 지금까지 다 더하면 -16이거든요. 우리가 만들어야 하는 건

-14죠? $a_3=-8$라면? 나머지가 다 (+)라고 하더라도 다 더하면 -18이 됩니다. 안 되네요. 따라서 $a_3=8$입니다.

여기까지 다 더하면 -8입니다. 이제 남은 건 2와 4에요. 이거는 그냥 (−)로 다 더하면 되지 않나요? 그럼 $-8-2-4=-14$가 나오죠. 따라서 $a_1=-2$, $a_2=-4$입니다.

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-2+8+32+128+512=678$입니다.

9. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \leq 2$이다.

(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2,\ g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. 〔2022학년도 수능 22〕

9. 정답 9 〔2022학년도 수능 22〕

1) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 $g(t)$가 $t \le x \le t+2$에서 $f'(x)=0$의 실근의 개수라고 합니다. 그러니까 범위가 계속 움직이는데 그 범위 안에서 $f'(x)=0$이 되는 실근의 개수가 $g(t)$가 되는 거죠?

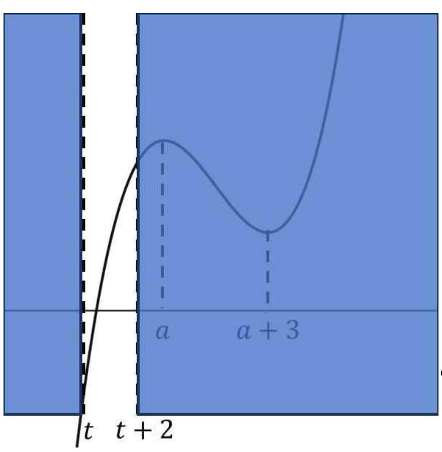
왜 하필 범위가 2만큼 벌어져 있을까요? 일단 이걸 생각을 하고 가보자구요.

(가)조건에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$라고 합니다. 그리고 (나)조건에서 $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$라고 하구요.

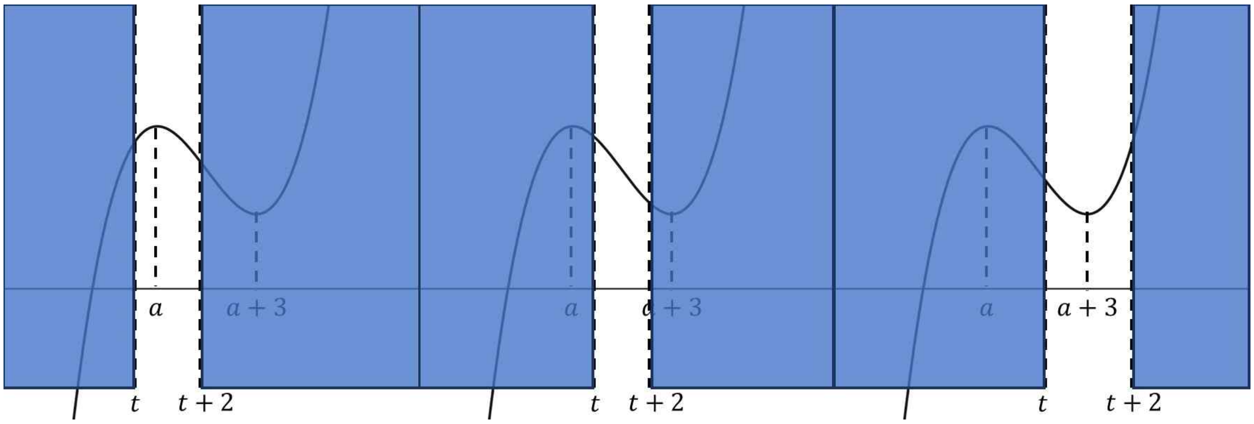
일단 $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$인 걸 보니 삼차함수 $f(x)$의 개형은 우리가 일반적으로 아는 극대와 극소가 있는 개형이에요. 그럼 이제 생각을 해볼게요. 왜 하필 범위가 2만큼 벌어져 있을까요?

우리가 생각해봐야 할 건 $t \le x \le t+2$라는 범위에서 $f(x)$의 극값이 몇 개냐 하는 거예요. 그러니까 t부터 2만큼 떨어진 $t+2$까지 극대 또는 극소가 되는 x좌표가 몇 개가 포함되어 있냐 하는 거죠. 극대 또는 극소가 되는 x좌표가 두 개가 있을 텐데 그 두 x좌표의 차이가 2보다 크다면? 혹은 작다면? 혹은 차이가 2라면? 이에 따라 달라지는 거죠. 여기부터 생각을 이어가야 할 것 같아요.

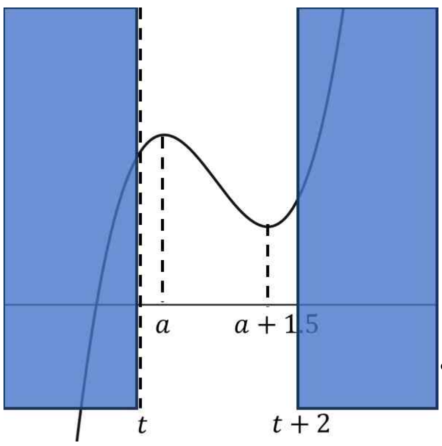
예를 들어



이런 그래프를 생각해보세요. x값의 차이가 2보다 커요. 이 상황에서 그림같이 $t \le x \le t+2$를 설정하면? 극값이 없죠. 그러면 $g(t)=0$이 됩니다. 그런데 문제는



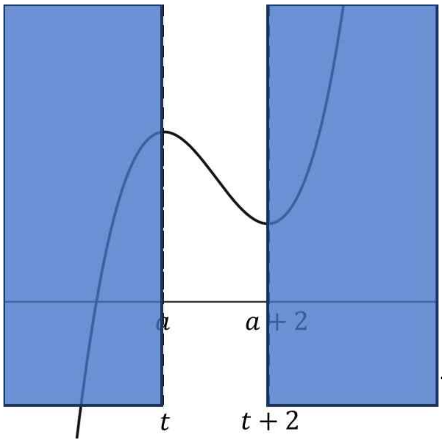
$g(t)=2$가 나올 수가 없다는 거예요. 최대가 1이죠. 그러면 극대 또는 극소가 되는 x좌표의 차이가 2 이하여야겠네요. 그래야



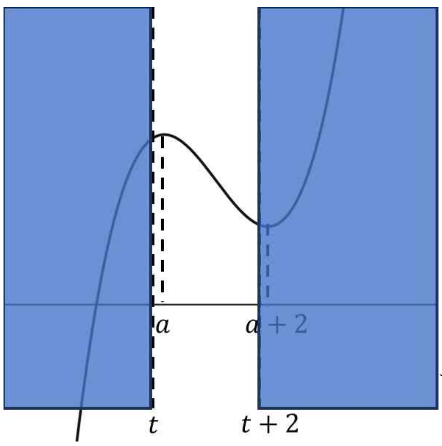
이렇게 될 테니까요. 범위 안에 극값이 2개가 있죠? $g(t)=2$입니다.

그런데 (가)조건에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$여야 한다고 했어요. 이건 뭘까요? 일단 천천히 생각해보자구요. 일단 $\lim_{t \to a+} g(t)$는 뭐죠? $g(t)$의 우극한값이에요. 즉 $t=a$보다 약간 클 때 $g(t)$의 함숫값이죠. $\lim_{t \to a-} g(t)$는 $t=a$보다 약간 작을 때 $g(t)$의 함숫값이구요. 이 두 개를 더해서 2보다 작거나 같아야 합니다.

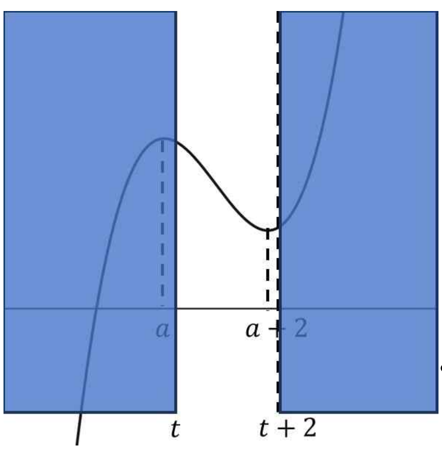
그런데 바로 위의 그림 보세요. 저거보다 약간 커도 $g(t)=2$이고, 약간 작아도 $g(t)=2$이죠? 더하면 4인데요? 극대 또는 극소가 되는 x좌표의 차이가 2보다 작으면 모두 저 문제가 발생해요. 그러면 가능성은 하나죠.
차이가 2이네요.



$g(t)=2$이죠?



그런데 약간 작아지면 $g(t)=1$이 됩니다.

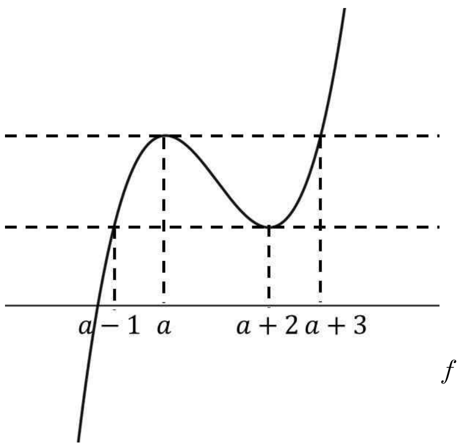


약간 커져도 $g(t)=1$이구요. 둘을 더하면 2이네요. 그리고 나머지 범위들도 다 마찬가지로 더해서 2를 넘지 않습니다. 찾았어요!

이제 (나)조건을 봅시다. $g(f(1))=g(f(4))=2$, $g(f(0))=1$라고 합니다. 일단 $g(t)=2$가 되기 위해서는 값이 단 하나죠? $t=a$가 되어야 합니다. 근데 이게 $f(1)=f(4)=a$여야 해요.

그리고 $g(f(0))=1$이에요. $g(t)=1$이 되려면 범위가 어떻게 되죠? 일단 $t+2=a$가 될 때가 최초이구요, $t=a+2$가 될 때가 마지막 범위입니다. 그러니까 $f(0)$이 $a-2\sim a+2$(a 제외)에서 $g(t)=1$이 돼요.

근데 이때 삼차함수의 비율관계에 의하여



$f(x)$ 그래프는 이렇게 되잖아요? 일단 a를 기준으로 $f(a)=k$라고 해볼게요.

2) 함수 구하기 - 차함수

차함수에 의하여 $f(x)-k$는 $x-a$라는 인수 두 개, $(x-a-3)$이라는 인수 하나를 가집니다. $f(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{2}$이므로 $f(x)-k=\frac{1}{2}(x-a)^2(x-a-3)$이고 $f(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2(x-a-3)+k$입니다.

$f(1)=f(4)$이니까 $\frac{1}{2}(1-a)^2(-a-2)+k=\frac{1}{2}(4-a)^2(-a+1)+k$이고 정리하면 $-9(a-1)(a-2)=0$입니다.

$a=1$ 또는 $a=2$이네요. 케이스가 나뉘네요?

3) 케이스 분류

3-1) $a=1$일 때

$a=1$이면 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+k$입니다. $f(1)=f(4)=a$이니까 $k=1$이죠?

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$입니다. $f(0)=-1$이죠? $a-2\sim a+2$(a 제외)라는 범위에 들어오네요. 그럼 조건 만족합니다. 되네요!

3-2) $a=2$일 때

$a=2$이면 $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-5)+k$입니다. $f(1)=f(4)=a$이니까 $k=4$입니다.

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-5)+4$인데 $f(0)=-6$이니까 $a-2\sim a+2$(a 제외)라는 범위에 안 들어와요. 조건 만족하지 않습니다. 따라서 $a=1$이고 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$입니다. $f(5)=9$이네요.

확통

10. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는?
〔2022학년도 수능 확통 28〕

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \geq \sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

10. 정답 ① 〔2022학년도 수능 확통 28〕

1) 조건해석 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$가 있는데 X에서 Y로의 함수 f의 개수를 구하랍니다.

(가)조건에서 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\geq\sqrt{x}$라고 하네요. 숫자를 넣어보면

$f(1)\geq 1$, $f(2)\geq\sqrt{2}$, $f(3)\geq\sqrt{3}$, $f(4)\geq 2$, $f(5)\geq\sqrt{5}$입니다. 그런데 $f(x)$가 가질 수 있는 함숫값은 자연수잖아요? 그러니까 이걸 다시 정리하면 $f(1)\geq 1$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)\geq 2$, $f(5)\geq 3$이겠네요.

(나)조건에서 f의 치역은 3개랍니다. 그럼 일단 치역부터 골라야겠네요. 가능한 경우는

123, 124, 134, 234입니다.

123인 경우 $f(1)=1$이어야 합니다. 나머지들은 1을 가질 수 없으니까요. 또한 $f(5)\geq 3$이어야 하니까 $f(5)=3$이어야 합니다. 그럼 남은 건 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$이네요.

얘네들은 2와 3 중에 고르면 됩니다. 다만 모두가 3을 고르는 경우만 제외하면 되겠네요. 그렇게 되면 치역에서 2가 빠질 테니까요. 따라서 전체 경우의 수인 $2\times2\times2=8$에서 1을 뺀 7입니다.

124인 경우 마찬가지로 $f(1)=1$이어야 하고, $f(5)=4$이어야 합니다. 남은 건 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$인데 이것도 똑같네요. 2와 4 중에 고르는데 모두가 4를 고르는 경우만 제외하면 되니까 경우의 수는 7입니다.

134의 경우도 마찬가지로 $f(1)=1$이어야 합니다. 이때는 $f(5)=3$도 가능하고, $f(5)=4$도 가능합니다. 하지만 어느 쪽이던 간에 경우의 수가 7이겠네요. 아까랑 상황이 같으니까요. 총 $7+7=14$입니다.

234의 경우 반드시 $f(1)=2$일 필요는 없습니다. 다만 $f(5)=3$과 $f(5)=4$로 두 가지 경우가 있네요. 만약 $f(5)=3$이라면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 234 중 골라야 합니다. 이때 234를 모두 고르는 경우와 24만 고르는 경우 두 가지로 나눠지겠네요.

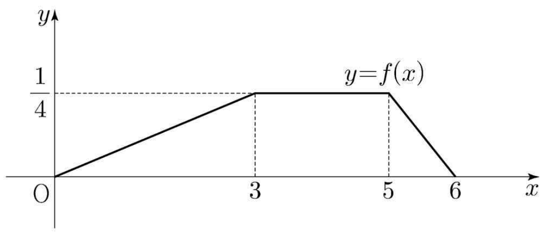
234를 모두 고르는 경우 234 중 어느 것을 두 번 줄지 결정해야 합니다. 2234, 2334, 2344가 가능하니까요. 경우의 수는 3입니다. 2234로 골랐다고 해볼게요. 이러면 배열만 해주면 됩니다. 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이네요. 총 $3\times12=36$입니다.

24만 고르는 경우 한쪽으로 몰려서 가는 경우만 제외하면 됩니다. 총 $2\times2\times2\times2=16$에서 2 또는 4로

몰려가는 경우인 $1+1$만 빼주면 되겠네요. 14입니다. 총 $36+14=50$입니다.

$f(5)=4$인 경우를 볼게요. 근데 이건 $f(5)=3$인 경우랑 다를 게 없네요. $f(5)\geq 3$는 만족하구요, 나머지 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 고를 수 있는 수도 2보다 크니까요. 50입니다. 구하는 경우의 수는 $7+7+7+7+50+50=128$입니다. 답은 ①번입니다.

11. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \quad (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔2022학년도 수능 확통 29〕

11. 정답 31 〔2022학년도 수능 확통 29〕

1) 확률의 총합은 1이다.

$0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$인데 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$랍니다. 그리고 $f(x)$의 그래프가 있어요. 이때 $0 \le x \le 6$에서 $f(x)+g(x)=k$랍니다. 음..?

일단 당황하지 마세요. 항상 확률변수의 그래프가 나오면 처음 해야 하는 게 있죠. 바로 확률의 총합은 1이라는 거예요. $f(x)$와 $g(x)$ 모두 확률밀도함수니까 0부터 6까지 적분하면 값이 1이 나와야 하죠? 따라서

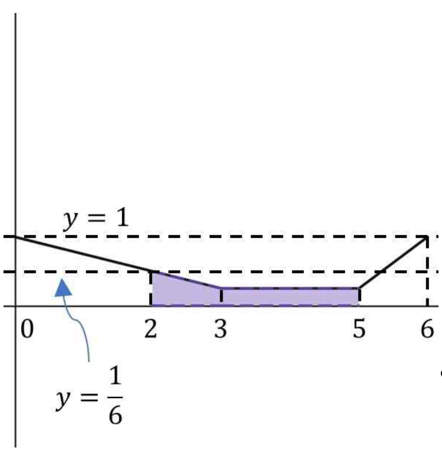
$\int_0^6 f(x)+g(x)dx=\int_0^6 f(x)dx+\int_0^6 g(x)dx=2=\int_0^6 kdx=6k$입니다. $k=\frac{1}{3}$이네요.

이때 $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\frac{q}{p}$를 구하랍니다. $k=\frac{1}{3}$이니까 $\mathrm{P}(2 \le Y \le 5)$이네요. 이거는 $g(x)$의 그래프를 알아야겠어요.

일단 $f(x)+g(x)=\frac{1}{3}$이니까 $g(x)=\frac{1}{3}-f(x)$이죠? 이걸 이용해서 $g(x)$의 그래프를 그려봅시다. 일단 $f(x)$는

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{12}x & (0 \le x \le 3) \\ \frac{1}{4} & (3 \le x \le 5) \\ -\frac{1}{4}(x-6) & (5 \le x \le 6) \end{cases}$입니다. 그러면 $g(x)$는 $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}-\frac{1}{12}x & (0 \le x \le 3) \\ \frac{1}{12} & (3 \le x \le 5) \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}(x-6) & (5 \le x \le 6) \end{cases}$입니다. 그래프로

그려보면



이렇게 되겠네요. 일단 3부터 5까지는 $\frac{1}{12}\times 2=\frac{1}{6}$이에요. 그리고

2부터 3까지는 사다리꼴의 넓이 공식을 쓰면 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\times(3-2)=\frac{1}{8}$입니다. 더하면 $\frac{7}{24}$입니다.

$p=24$, $q=7$이고 $p+q=31$이네요.

12. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, 나온 눈의 수가 4 이하이면 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5 + b_5 \ge 7$일 때, $a_k = b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2022학년도 수능 확통 30〕

12. 정답 191 〔2022학년도 수능 확통 30〕

1) 조건부확률 A일 때 B일 확률 $= \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{A\text{이고 }B\text{일 경우의 수}}{A\text{일 경우의 수}}$

흰 공과 검은 공이 10개 이상 들어 있는 바구니가 있고, 비어 있는 주머니가 있답니다. 여기에서 주사위를 한 번 던지는데 나온 눈의 수가 5 이상이면 흰 공 2개를 주머니에, 눈의 수가 4 이하이면 검은 공 1개를 주머니에 넣는 시행을 5번 반복한다고 하네요.

이 중에서 n번째 시행 후에 주머니에 있는 흰 공의 개수를 a_n, 검은 공의 개수를 b_n이라고 한답니다. 이때 5번째 시행 후에 주머니에 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 더하면 7 이상일 때, k번째 시행에서 주머니에 있는 흰 공과 검은 공이 같아지는 자연수 k가 존재할 확률을 구하랍니다. 구하는 확률은

$\dfrac{k\text{번째 시행 흰 공} = \text{검은 공}}{5\text{번째 시행 흰 공} + \text{검은 공} \geq 7}$ 이죠?

일단 분모부터 구해봅시다. 한 번의 시행에서 흰 공은 2개, 검은 공은 1개를 추가할 수 있으니까 5번째 시행 후에는 흰 공이 최대 10개, 검은 공은 최대 5개가 가능해요. 공을 총합하면 최소 5개 최대 10개가 가능하구요. 여기서 7개 이상이여야 하니까 7, 8, 9, 10개이면 되겠네요.

7개인 경우는 검은 공 1개씩 3번, 흰 공 2개씩 2번 고르는 경우입니다. 확률은 $\left(\dfrac{2}{3}\right)$을 3번, $\left(\dfrac{1}{3}\right)$을 2번, 검은 공 3번과 흰 공 2번 뽑을 순서를 섞어야 하니까 ${}_5C_2$해서 ${}_5C_2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{80}{243}$입니다.

8개인 경우는 검은 공 1개씩 2번, 흰 공 2개씩 3번 고르는 경우입니다. 확률은 $\left(\dfrac{2}{3}\right)$을 2번, $\left(\dfrac{1}{3}\right)$을 3번, 검은 공 2번과 흰 공 3번 뽑을 순서를 섞어야 하니까 ${}_5C_2$해서 ${}_5C_2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{40}{243}$입니다.

9개인 경우는 검은 공 1개씩 1번, 흰 공 2개씩 4번 고르는 경우입니다. 확률은 $\left(\dfrac{2}{3}\right)$을 1번, $\left(\dfrac{1}{3}\right)$을 4번, 검은 공 1번과 흰 공 4번 뽑을 순서를 섞어야 하니까 ${}_5C_1$해서 ${}_5C_1 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{10}{243}$입니다.

10개인 경우는 흰 공 2개씩 5번 고르는 경우입니다. 확률은 $\left(\dfrac{1}{3}\right)$을 5번해서 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{1}{243}$입니다. 총

$\dfrac{80+40+10+1}{243}=\dfrac{131}{243}$ 입니다.

이제 5번째 시행에서 흰 공과 검은 공을 더해서 7개 이상이면서 k번째 시행에서 흰 공과 검은 공이 같아지는 경우가 존재하는 확률을 구해봅시다. 일단 10개인 경우는 불가능해요. 흰 공만 10개가 있으니까요.

7개인 경우는 흰 공이 2개씩 2번, 검은 공이 1개씩 3번이므로 흰 공과 검은 공의 개수가 같아지려면 흰 공 2개씩 1번=검은 공 1개씩 2번으로 흰 공과 검은 공의 개수가 같아져야겠네요. 흰 공은 2개씩 뽑으니까 3개는 가능하지 않으니까요. 일단 확률은 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ 입니다. 순서는 1, 2, 3번째 시행에서 검검흰의 순서를 바꿔주고, 4, 5번째 시행에서 검흰의 순서를 바꿔주면 됩니다. ${}_3C_1\times{}_2C_1=6$이니까 총

$6\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{48}{243}$ 입니다.

8개인 경우는 흰 공이 2개씩 3번, 검은 공이 1개씩 2번이므로 흰 공과 검은 공의 개수가 같아지려면 흰 공 2개씩 1번=검은 공 1개씩 2번으로 흰 공과 검은 공의 개수가 같아져야겠네요. 방금과 마찬가지로 흰 공은 2개씩 뽑으니까 3개는 가능하지 않으니까요. 확률은 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$ 입니다. 순서는 1, 2, 3번째 시행에서 검검흰의 순서를 바꿔주고, 4, 5번째 시행은 그냥 흰흰입니다. ${}_3C_1$이니까 총

${}_3C_1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{12}{243}$ 입니다.

9개인 경우는 흰 공이 2개씩 4번, 검은 공이 1개씩 1번이에요. 그런데 흰 공은 2개씩 뽑으니까 검은 공 1개와 개수가 같아질 수가 없습니다. 따라서 분모는 $\dfrac{48+12}{243}=\dfrac{60}{243}$ 이에요. 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{60}{243}}{\frac{131}{243}}=\dfrac{60}{131}$ 입니다.

$p=131$, $q=60$이므로 $p+q=191$이네요.