제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $(2^{\sqrt{3}}\times 4)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{3-2\sqrt{3}} \cdot 2^{2\sqrt{3}-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2+6x+1 \Rightarrow f'(1) = 10$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2=6,\quad a_4+a_6=36$$

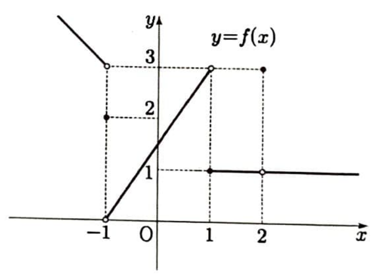
일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_2 = 6$
$a_5 = 18$ $\Big\}$ $3d = 12 \Rightarrow d = 4$

$\therefore a_{10} = a_2 + 8d = 6 + 4\times 8 = 38.$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\underbrace{\lim_{x\to -1-} f(x)}_{3+} + \underbrace{\lim_{x\to 2} f(x)}_{1}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\ge 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_1 = 1$ $a_5 = 1$

$a_2 = 2$ $a_6 = 2$

$a_3 = 4$ $a_7 = 4$

$a_4 = 8$ $a_8 = 8$

$15 \times 2 = 30$.

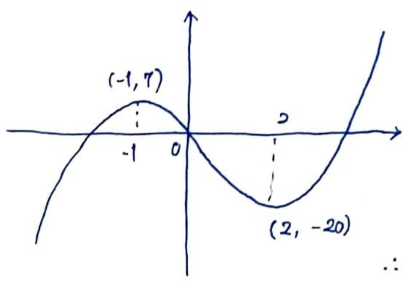
6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

$y=f(x)=2x^3-3x^2-12x$ 와 $y=-k$ 의

교점이 3개!

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$ 이므로



$\therefore -20<-k<7$

$\Rightarrow -7<k<20$

$\Rightarrow -6\le k\le 19$

$\therefore k = 26$(개)

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

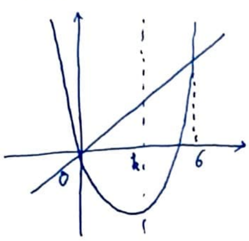
① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 에서 $\begin{cases}\tan\theta>0\\ \sin\theta<0\\ \cos\theta<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\tan\theta=3\\ \sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}\\ \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}\end{cases}$

$\therefore -\frac{4}{\sqrt{10}} = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4



$\int_0^6 (6x-x^2)\,dx = [3x^2-\frac{1}{3}x^3]_0^6 = 36$

$\therefore \int_0^k (6x-x^2)\,dx = 18$, 즉

$3k^2-\frac{1}{3}k^3=18$ 인 $k=3$

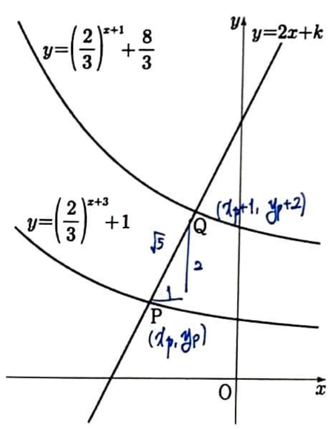
(설마 시험장에서 이렇게 푼 사람.. 없겠지요? ^^)

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



$$-\begin{cases} y_p = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_p+3}+1 \\ y_p+2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_p+2}+\frac{8}{3} \end{cases}$$

$2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_p+2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x_p+2}=1 \Rightarrow x_p=-2$

$\therefore y_p+2 = 1+\frac{8}{3}=\frac{11}{3} \Rightarrow y_p=\frac{5}{3}$

$\therefore \frac{5}{3} = (-2)\cdot 2+k \Rightarrow k=\frac{17}{3}$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

$(0,0)$에서의 접선 $y=f'(0)x$

$\frac{d}{dx}xf(x) = f(x)+xf'(x) \Rightarrow (1,2)$에서의 접선 $y=(f(1)+f'(1))(x-1)+2$

$$\therefore \begin{cases} f'(0)=f(1)+f'(1) \Rightarrow f'(0)=2. \\ f(0)=0,\quad f(1)=2 \\ -f(1)-f'(1)+2=0. \Rightarrow f'(1)=0 \end{cases}$$

$\therefore f(x)= ax^3+bx^2+cx$ 라 하면

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c \Rightarrow f'(0)=c=2,$

$f'(1) = 3a+2b+2=0,\quad f(1)=a+b+2=2$

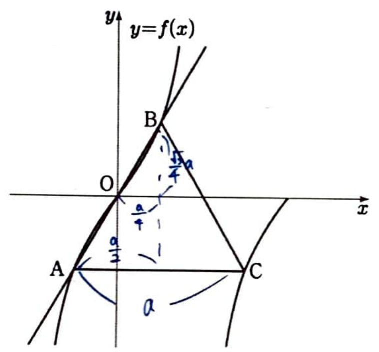
$\therefore a=-2,\ b=2,\ c=2$

$\Rightarrow f'(2) = (-6\times4)+(4\times2)+2 = -14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

B의 좌표 : $\left(\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$

∴ $\tan\frac{\pi}{a}\cdot\frac{a}{4} (=1) = \frac{\sqrt{3}}{4}a \rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

$f(x)^2(f(x)-1) - x^2(f(x)-1) = 0$

$\Rightarrow (f(x)-x)(f(x)+x)(f(x)-1) = 0$

∴ $f(x) = -x,\ x$ or 1.

이제 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이려면...

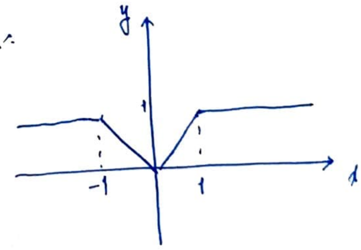
$x<-1$ 이거나 $x>1$일 때, $f(x)$가 1 이 아니라면

도저히 $f(-1)$이나 $f(1)$에서 f를 연속으로 만들 수가 없ㅠㅠ

또, $-1<x<0$일 때 $f(x)=-x$, $0<x<1$일 때 $f(x)=x$가

되어 주지 않으면, $f(x)$가 최솟값 0을 가질 수가 없ㅠㅠ

∴



∴ $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 1$

$f(0) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}$

13. 두 상수 a, $b\,(1 < a < b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$에 대하여 $f(1) = 40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

$$\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{\log_2 b - \log_2 a}{b-a}(x-a) + \log_2 a \\[2ex] y = \dfrac{\frac{1}{2}(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a}(x-a) + \frac{1}{2}\log_2 a \end{array}\right\}\ y절편\ 같다$$

$$\Rightarrow \frac{-a(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a} + \log_2 a = \frac{-\frac{1}{2}a(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a} + \frac{1}{2}\log_2 a \cdots ①$$

또, $f(1) = a^b + b^a = 40 \quad \cdots ②$

① 을 정리하면,

$$\frac{+\frac{1}{2}a(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a} = \frac{1}{2}\log_2 a$$

$$\Rightarrow a(\log_2 b - \log_2 a) = (b-a)\log_2 a$$

$$\Rightarrow a\log_2 b = b\log_2 a \Rightarrow a^b = b^a$$

$$\therefore a^b = b^a = 20 \Rightarrow f(2) = a^{2b} + b^{2a} = 20^2 + 20^2$$
$$= 800\ //$$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t) = t(t-1)(at+b)\quad (a \neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt = 0$

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

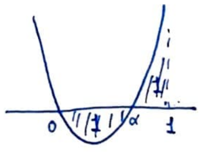
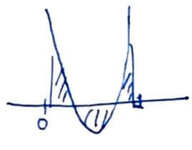
ㄷ. $0 \le t \le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)| < 1$이면 $x(t_2) = 0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt = x(1) - x(0) = 0.$

ㄴ. $\cancel{v(t) = (t-1)(at+b) + t(at+b) + at(t-1)}$

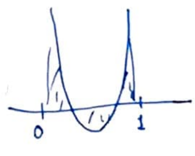
안타깝지만… 수식으로 풀면 안돼요 ㅠㅠ

 or 

응 그런 점은 없어~

ㄷ. 위의 두 그림 중, 왼쪽의 경우는 $|x(\alpha)| = 1$이므로

$0 \le t \le 1$ 인 모든 t에 대하여 $|x(t)| < 1$:

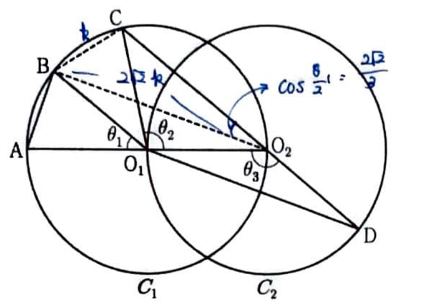


이 그래프 (즉, $t = -\frac{b}{a}$가 0과 1사이에 있는 것)

$\therefore\ x(t_2) = 0$ 인 t_2가 존재

절대 이렇게 풀고싶지 않아요…

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로 $\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle CO_1B = \theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB} = k$라 할 때
> 3k
> $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)}$이다. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$이므로
> x라 하면, $\frac{7}{3}k$.
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\frac{\boxed{(가)}}{2} + \boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은? [4점]

① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$ ④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$

(다) = x라 하면,

$x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}k \cdot x \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = k^2$

$\Rightarrow x^2 - \frac{16}{3}kx + 7k^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$

3 -7
1 -3

$\therefore x = 3k$ or $\frac{7}{3}k$: x는 지름(3k)보다 작으므로

$x = \frac{7}{3}k$.

$\therefore f(p) = 2\sqrt{2}$, $g(p) = \frac{14\sqrt{2}}{9} \Rightarrow \frac{56}{9}$

단답형

16. $\log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2 120 - \log_2 15 = \log_2 8$

③

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 2x$이고 $f(0) = 2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = x^3 + x^2 + 2$

$\therefore f(1) = 4$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

$$\begin{cases} \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_7}{2} + a_8 + a_9 + a_{10} = 56 & \cdots ① \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_8 + 2a_9 + 2a_{10} = 100 & \cdots ② \end{cases}$$

$2 \times ① - ②$ 하면, $a_8 = 12$

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

$\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 의 판별식이 ≤ 0

$\therefore$ $3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$ 의 $D/4$

$= a^2 - 3(a^2 - 8a) \leq 0$

$\therefore$ $0 \leq a \leq 6$

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1) - xf(x) = ax + b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$f(1) - 0 \cdot f(0) = b = 1 \Rightarrow b = 1$

$\therefore f(x+1) = xf(x) + ax + b = x^2 + ax + 1$ (for $0 \leq x \leq 1$)

$\therefore$ $f(1)$ 에서 $\begin{cases} \text{좌미분계수} & 1 \\ \text{우미분계수} & 2x + a\big|_{x=0} = a \end{cases}$

$\therefore a = 1 \Rightarrow f(x+1) = x^2 + x + 1.$

$\therefore$ $60 \int_1^2 f(x)\,dx = 60 \int_0^1 f(x+1)\,dx$

$= 60 \int_0^1 (x^2 + x + 1)\,dx = 110$

아니 어떻게 항정을 두 번 과냐 미쳤니 정말

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 \rvert = 2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_{n+1} \rvert = 2\lvert a_n \rvert$ 이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점]

$|a_1| = 2$

$|a_2| = 4$

$|a_3| = 8$

$|a_4| = 16$

$\vdots$

$|a_{10}| = 1024$

$\Rightarrow$ $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $\vdots$, $a_{10} = -1024$ $\Downarrow$ 합 -2 $\rightarrow$ -14

$\Rightarrow$ $a_1 = -2$, $a_2 = -4$, $a_3 = 8$, $\vdots$, $a_5 = 32$, $a_7 = 128$, $a_9 = 512$ $\Downarrow$

2를 -2, 4를 -4로 바꾸면 12 감소!

$\therefore$ $512 + 128 + 32 + 8 - 2 = 678$

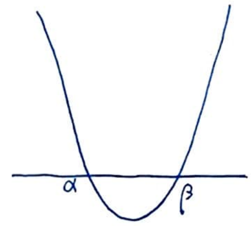
680

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x) = 0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

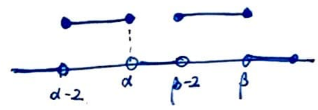
(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$이다.
(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

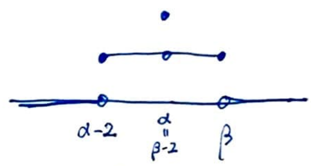
$f'(x)$는 이차함수.



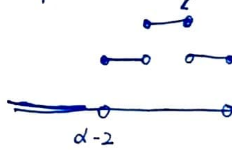
if $|\alpha - \beta| > 2$:



$|\alpha - \beta| = 2$:



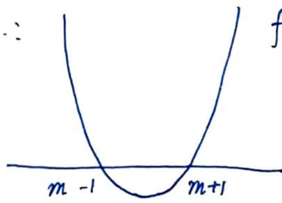
$|\alpha - \beta| < 2$:



여기에서 $\lim g(t) + \lim g(t) = 4$ (가)에 모순!

그런데 (나) 조건을 보니 $g(k) = 2$인 점이 있긴 있...네? 4!! $|\alpha - \beta| = 2$ 구나!!

$\therefore$



$f'(x)$의 두 근 $(m-1)$, $(m+1)$라 하면

$f'(x) = \frac{3}{2}(x-m-1)(x-m+1)$

$= \frac{3}{2}(x-m)^2 - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-m)^3 - \frac{3}{2}x + C$

이제 $f(1) = f(4) = m-1$ 이므로,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1-m)^3 - \frac{3}{2} + C = m-1 \\ \frac{1}{2}(4-m)^3 - \frac{3}{2}\cdot 4 + C = m-1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}(1-m)^3 - \frac{1}{2}(4-m)^3 = \frac{9}{2}$

$\therefore m = 2$, $C = 3 \Rightarrow f(5) = \frac{1}{2}(5-2)^3 - \frac{3}{2}\cdot 5 + 3$

$= \frac{27}{2} - \frac{15}{2} + 3 = 9$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 수학 영역(미적분) 홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n}{n^2-2}=5$

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$ ④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

양변을 (x^3+x)로 미분하면

$\dfrac{df(x^3+x)}{d(x^3+x)}=\dfrac{d(e^x)}{d(x^3+x)}=\dfrac{de^x/dx}{d(x^3+x)/dx}$

$\Rightarrow f'(x^3+x)=\dfrac{e^x}{3x^2+1}$

$\therefore f'(2)=\dfrac{e^x}{3x^2+1}\Big|_{x=1}=\dfrac{e}{4}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

초항 : a, 공비 : r 라 하면

$$(a-ar)+(ar^2-ar^3)+\cdots+\ =3.$$

$$a^2+a^2r^2+a^2r^4+\cdots\ =6$$

$$\Rightarrow \frac{a-ar}{1-r^2}=3,\quad \frac{a^2}{1-r^2}=6$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a(1-r)}=2 \Rightarrow a=2-2r. \quad \cdots (*)$$

$$\therefore \frac{2^2(1-r)^2}{1-r^2}=6 \Rightarrow \frac{(1-r)^2}{1-r^2}=\frac{1-r}{1+r}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{r=-\frac{1}{5}},\quad \boxed{a=\frac{12}{5}}$$

$$\therefore \sum a_n=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{6}{5}}=2$$

26. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$의 값은? [3점]

① $\ln5$ ② $\frac{\ln5}{2}$ ③ $\frac{\ln5}{3}$ ④ $\frac{\ln5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln5}{5}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}\,dx=\left[\frac{1}{3}\ln|x^3+3x^2+1|\right]_0^1=\frac{\ln5}{3}$$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

두 점의 좌표를 (α, y_α), (β, y_β) 라 하면,

α, β는 $x^2 = t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 의 두 근이므로

$\alpha+\beta = t^2 \Rightarrow$ 중점의 x좌표 $\frac{t^2}{2}$

또, 두 점이 직선 $t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 위의 점이므로

중점도 이 직선 위에 있다.

∴ 중점의 좌표는 $\left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^4}{2} - \frac{\ln t}{8}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(t, 2t^3 - \frac{1}{8t}\right)$

∴ $\int_1^e \sqrt{t^2 + \left(4t^6 - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{64t^2}\right)}\,dt$

$= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)dt = \left[\frac{t^4}{2} + \frac{\ln t}{8}\right]_1^e = \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}$.

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

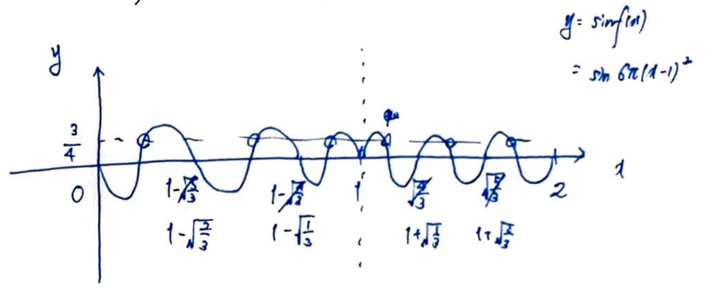
$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x) = 3f'(x) - 4f'(x)\sin f(x)$

$= f'(x)(3 - 4\sin f(x)) = 12\pi(x-1)(3-4\sin f(x))$



이제 g가 극소이려면, g'이 (−) → (+) 이어야 한다

i) $x<1$: $\sin f(x)$가 $\frac{3}{4}$보다 작다가 커지는 점! 3개

ii) $x>1$: $\sin f(x)$가 $\frac{3}{4}$보다 크다가 작아지는 점! 3개

iii) $x=1$: $\sin f(x)=0 \Rightarrow$ $x=1-0$에서 $g'<0$, $x=1+0$에서 $g'>0$ ∴극소

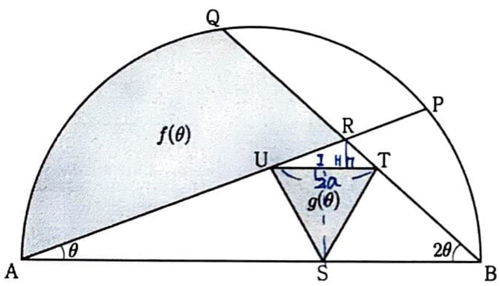
∴ 7개

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QBA=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자. 선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(△)   (◺)

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times1\times 4\theta+\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-4\theta)-\triangle ARB$

$\left(\frac{\overline{AB}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{AR}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{BR}}{\sin\theta}\Rightarrow \overline{AR}=\frac{2\sin2\theta}{\sin3\theta},\ \overline{BR}=\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}\right.$

$\left.\Rightarrow \triangle ARB=\frac{1}{2}\times\frac{4\sin2\theta\sin\theta}{\sin^2 3\theta}\cdot\sin(\pi-3\theta)=\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}\right)$

$g(\theta)=$ ($\overline{UT}=2a$라 하면 $g(\theta)=\sqrt{3}a^2$)

$\overline{RH}+\overline{SI}=(\triangle RAB$의 높이$)=\overline{AR}\sin\theta=\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$이고,

$\overline{RH}=(\triangle RAB$ 높이$)\times\frac{\overline{UT}}{\overline{AB}}=\overline{AR}\sin\theta\times\frac{2a}{2}=\frac{2a\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$이므로,

$\overline{SI}=\sqrt{3}a=\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}(1-a)$

$\Rightarrow a=\dfrac{\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}}{\sqrt{3}+\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}}$

$\therefore \lim_{\theta\to0}\dfrac{\sqrt{3}\left(\dfrac{\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}}{\sqrt{3}+\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}}\right)^2}{\theta\left(\frac{4\theta}{2}+\frac{\sin4\theta}{2}-\frac{2\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\dfrac{\frac{4}{3}\theta}{\sqrt{3}+\frac{4}{3}\theta}\right)^2}{\theta\cdot\left(\frac{8}{3}\theta\right)}=\dfrac{\frac{16}{27}}{\frac{8}{3}}\sqrt{3}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ $\therefore 11$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
(나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\ge1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

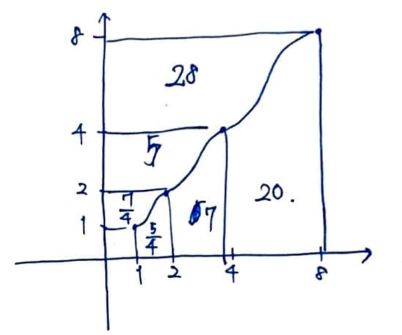
$\int xf'(x)\,dx = xf(x)-\int f(x)\,dx$

$f(1)=1$

$g(2)=2f(1)=2\Rightarrow f(2)=2$

$g(4)=2f(2)=4\Rightarrow f(4)=4$

$g(8)=2f(4)=8\Rightarrow f(8)=8$.



$\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}\Rightarrow \int_1^2 g(x)\,dx=2^2-1^2-\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{7}{4}$

$\Rightarrow \int_2^4 g(x)\,dx=\int_1^2 g(2t)(2dt)=\int_1^2 4f(t)\,dt=5$

$\begin{pmatrix} x\to 2t \\ dx\to 2dt \\ \int_2^4\to\int_1^2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \int_2^4 f(t)\,dt=4^2-2^2-5=7$

$\Rightarrow \int_4^8 g(x)\,dx=4\int_2^4 f(t)\,dt=28 \Rightarrow \int_4^8 f(x)\,dx=8^2-4^2-28=20$

$\therefore \int_1^8 xf'(x)\,dx=\left[xf(x)\right]_1^8-\int_1^8 f(x)\,dx=(8f(8)-f(1))-\int_1^8 f(x)\,dx$

$=(64-1)-\left(\frac{5}{4}+7+20\right)=\frac{139}{4}$

$\therefore 143$

※ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

63
27
36