제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $(2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점] 2

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = 2^{-1}$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점] 5

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$ $f'(1) = 10$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 6, \quad a_4 + a_6 = 36$$

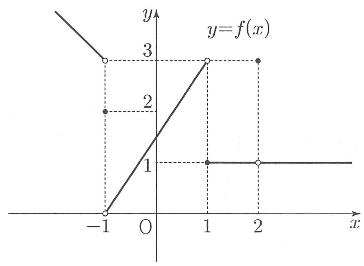
일 때, a_{10} 의 값은? [3점] 5

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_2 = 6.$ $a_5 = 18.$ $d = 4$

$a_{10} = a_2 + 8d = 6 + 32 = 38$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$ 의 값은? [3점] 4

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3 + 1 = 4$

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점] |

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_n = 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, \cdots$

$\sum_{k=1}^{8} a_k = 30$

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점] 3

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$.

$\therefore f(2)<-k<f(-1)$.

$\therefore -20<k<7$, k 26개.

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점] |

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$. $\tan\theta=-2$ or 3

θ: 제3사분면, $\tan\theta=3$ ($\because \tan\theta>0$)

$\therefore \sin\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점] 1

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

$\left|\int_0^6 x^2-6x\,dx\right| = \int_0^6 6x-x^2\,dx$

$= \left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^6 = 36.$

$\therefore \int_0^k 6x-x^2\,dx = 3k^2-\frac{1}{3}k^3 = 18 \quad (0<k<6)$

$\therefore k^3-9k^2+54=0$

$(k-3)(k^2-6k-18)=0.$

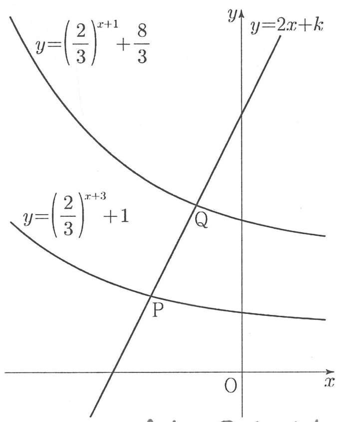
$k=3$ or $3\pm3\sqrt{3}$. $\therefore k=3$.

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점] 4

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



$P(p,\ 2p+k)$ $Q(p+1,\ 2p+k+2)$

$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1+2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}.$

$\therefore \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}\left(1-\frac{2}{3}\right).$ $p=-2.$

$\therefore \frac{2}{3}+1 = -4+k.$ $k=\frac{17}{3}$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점] 5

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

$f(0)=0,\ f(1)=2$

$f'(0)=f'(1)+f(1)=2.$

$\therefore f'(0)=2,\ f'(1)=0.$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$

$d=0,\ a+b+c=2.$ $c=2.$

$\therefore f(x)=ax^3-ax^2+2x.$

$f'(x)=3ax^2-2ax+2$

$f'(1)=a+2=0,\ a=-2.$

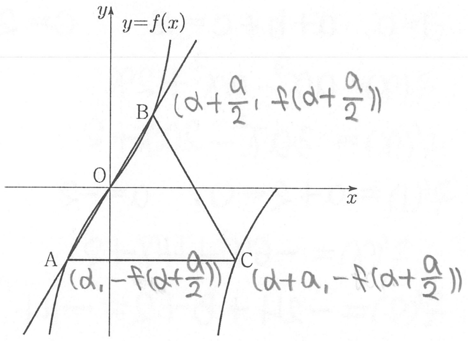
$\therefore f'(x)=-6x^2+4x+2$

$f'(2)=-24+8+2=-14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$ → 주기 a

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점] 3



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

$\overline{AB}$의 기울기: $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

$\therefore \frac{\sqrt{3}a}{2} = \left[\tan\frac{\pi}{a}\left(\alpha+\frac{a}{2}\right)\right] \times 2$

$\overline{AB}$가 O를 지나므로, $2\alpha + \frac{a}{2} = 0$.

$\therefore 4\alpha = -a$.

$\therefore \frac{\sqrt{3}a}{4} = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$(\triangle ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

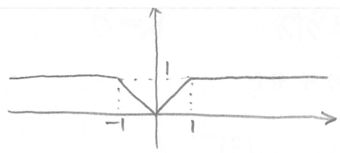
$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점] 3

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

$(f(x)-1)(f(x)+x)(f(x)-x) = 0$이며

최솟값 0, 최댓값 1이려면



$f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

13. 두 상수 a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? 2 [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

$\frac{1}{b-a}\times\log_2\frac{b}{a}\times(-a)+\log_2 a$

$=\frac{1}{b-a}\times\log_4\frac{b}{a}\times(-a)+\log_4 a$

∴ $\frac{1}{b-a}\times\log_4\frac{b}{a}\times a=\log_4 a$

∴ $\log_4\left(\frac{b}{a}\right)^a=\log_4 a^{b-a}$

∴ $\frac{b^a}{a^a}=a^{b-a}$ ∴ $a^b=b^a$

$f(1)=40$, $a^b+b^a=40$

∴ $a^b=b^a=20$ ∴ $f(x)=2\cdot 20^x$

$f(2)=2\cdot 400=800$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\quad(a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1|v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 3 [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$ O

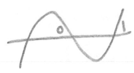
ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다. X

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다. O

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=[x(t)]_0^1=0$.

ㄴ. $0<-\frac{b}{a}<1$ 이 아니라면 $x(t)$는

 or  이다.

$(0, 1)$에 있는 극값을 α라 하면,

$(0, 1)$에서 $0\le|x(t_1)|<\alpha$ 이다.

이때 $\int_0^1|v(t)|dt=2\alpha=2$, $\alpha=1$

$|x(t_1)|>1$이 아니다.

($\int|f'(t)|dt$는 $f(t)$에서 감소하는 구간을 증가하도록 대칭해서 그리면 된다

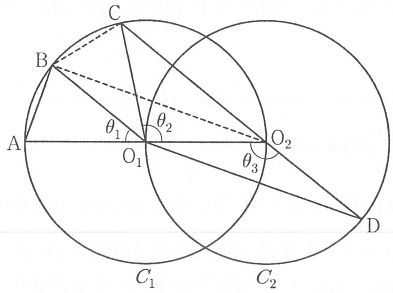
 → )

ㄷ. $0<-\frac{b}{a}<1$이 아니라면 $0\le t\le 1$에서 $|x(t)|=1$이 존재한다. (ㄴ에 의해)

∴ 이 경우는 $0<-\frac{b}{a}<1$.

이때 $t_2=-\frac{b}{a}$로 t_2가 $(0, 1)$에 존재한다.

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$이고, 3K
> $\angle BO_2A=\frac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\frac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점] 2

① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$ ④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$

$(k)^2+(2\sqrt{2}k)^2=\overline{AO_2}^2$ (직각삼각형). $\overline{AO_2}=3k$.

$p=\frac{8+9-1}{2\cdot2\sqrt{2}\cdot3}=\frac{16}{12\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\overline{O_2C}^2+7k^2}{4\sqrt{2}k\overline{O_2C}}$. $3\overline{O_2C}^2-16k\overline{O_2C}+21k^2=0$

$(3\overline{O_2C}-7k)(\overline{O_2C}-3k)=0$ $\overline{O_2C}\neq3k$.

$\therefore g(k)=\frac{7}{3}k$.

$f(p)\cdot g(p)=7\cdot\frac{8}{9}=\frac{56}{9}$

단답형

16. $\log_2 120-\frac{1}{\log_{15}2}$의 값을 구하시오. [3점] 3

$\log_2\frac{120}{15}=\log_2 8=3$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점] 4

$f(x)=x^3+x^2+2$. $f(1)=4$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점] 12

$\frac{a_1+\cdots+a_7}{2} + a_8+a_9+a_{10} = 56.$

$\frac{a_1+\cdots+a_8}{2} + a_9+a_{10} = 50.$

$\frac{a_8}{2} = 6. \quad a_8 = 12.$

19. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점] 6.

$f'(x) = 3x^2+2ax-(a^2-8a) \geq 0.$

$\therefore D/4 = a^2+3(a^2-8a) \leq 0$

$4a(a-6) \leq 0, \quad 0 \leq a \leq 6.$

$a_{max} = 6.$

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점] 110.

$f(1) = f'(1) = 1.$

$[0,1]$에서 $f(x+1) - x^2 = ax+b.$

$\therefore f(x+1) = x^2+ax+b \quad (0 \leq x \leq 1)$

$\therefore f'(x+1) = 2x+a.$

$\therefore x=0$이면 $b=1, \ a=1$

$\therefore \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x+1)dx$

$= \int_0^1 x^2+x+1\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1 = \frac{11}{6}$

$\therefore 60 \cdot \int_1^2 f(x)dx$

$= 60 \cdot \frac{11}{6} = 110.$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 \rvert = 2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_{n+1} \rvert = 2\lvert a_n \rvert$이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점] 678.

$a_n = \pm 2^n$.

만약 $a_{10} = 1024$이면 $\sum_{n=1}^{10} a_n \ge 0$.

∴ $a_{10} = -1024$

$a_9 = -512$이면 $\sum_{n=1}^{10} a_n \le -1024$

∴ $a_9 = 512$ ... 이런 식으로 추론하면

$-2-4+8+16+32+64+128$
$+256+512-1024$
$=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$
$=-2+8+32+128+512$
$=678$

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$이다.
(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점] 9

$f'(x)=0$의 두 실근을 α, β라 할 때 ($\alpha \le \beta$)

(나)에서 g(어떤 실수)$=2$. ∴ $\beta-\alpha \le 2$

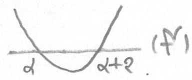
(∵ $\beta-\alpha > 2$라면 $g(t) \le 1$이다).

이때 $\beta-\alpha < 2$이면 $a<\alpha<\beta<a+2$인

실수 a 존재하며, 이때

$\lim_{t\to a-} g(t) = \lim_{t\to a+} g(t) = 2$로 (가)에 모순.

∴ $\beta-\alpha=2$.



이때 $g(\alpha)=2$. $x\ne\alpha$이면 $g(x)\ne 2$.

∴ $f(1)=f(4)=\alpha$. 개형에 의하여 $\alpha=1$.

∴ $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$

∴ $f(5)=\frac{1}{2}\times 16\times 1+1=9$.

※ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점] 5

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+3n}{n^2-2} = 5$

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점] 4

① e ② $\dfrac{e}{2}$ ③ $\dfrac{e}{3}$ ④ $\dfrac{e}{4}$ ⑤ $\dfrac{e}{5}$

미분하면 $(3x^2+1)f'(x^3+x)=e^x$

$x=1$이면 $4f'(2)=e^1$ $\therefore f'(2)=\dfrac{e}{4}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점] 2.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a_n=a_1r^{n-1}$, $a_{2n-1}=a_1r^{2n-2}$, $a_{2n}=a_1r^{2n-1}$

$\frac{a_1}{1-r^2}-\frac{a_1r}{1-r^2}=3$, $\frac{a_1^2}{1-r^2}=6$.

$\therefore 2(a_1-a_1r)=a_1^2$

$2(1-r)=a_1$

$\therefore \frac{a_1^2}{(1+r)(1-r)}=\frac{a_1^2}{(1+r)\times\frac{a_1}{2}}=\frac{2a_1}{1+r}=6$

$\therefore 4(1-r)=6(1+r)$. $r=-\frac{1}{5}$

$a_1=\frac{12}{5}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{12}{5}}{1-(-\frac{1}{5})}=2$

26. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$ 의 값은? [3점] 3

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{k}{n})^2+2(\frac{k}{n})}{(\frac{k}{n})^3+3(\frac{k}{n})^2+1}\times\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3(\frac{k}{n})^2+6(\frac{k}{n})}{(\frac{k}{n})^3+3(\frac{k}{n})^2+1}\cdot\frac{1}{3n}$

$f(x)=x^3+3x^2+1$ 이면 $f'(x)=3x^2+6x$.

$\therefore (식)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(\frac{k}{n})}{f(\frac{k}{n})}\cdot\frac{1}{3n}$

$=\frac{1}{3}\times\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\frac{1}{3}[\ln f(x)]_0^1$

$=\frac{1}{3}\ln\frac{f(1)}{f(0)}=\frac{\ln 5}{3}$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? 1 [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

서로 다른 두점이 (α, α^2), (β, β^2)이면

$P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$ 에서

$\alpha+\beta=t^2$, $\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$ 에서

$\alpha^2+\beta^2=t^4-\frac{\ln t}{4}$

$P\left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^4}{2}-\frac{\ln t}{8}\right) \xrightarrow{\text{미분}} \left(t, 2t^3-\frac{1}{8t}\right)$

$l=\int_1^e \sqrt{(t)^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt$

$=\int_1^e \left(4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt$

$=\int_1^e \left(2t^3+\frac{1}{8t}\right) dt$

$=\left[\frac{t^4}{2}+\frac{\ln t}{8}\right]_1^e=\frac{e^4}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

$=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? 2 [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

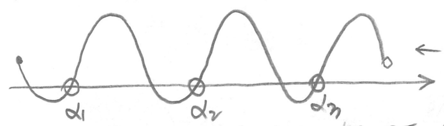
$0<x<2$에서, $0\le f(x)<6\pi$

$g'(x)=(3-4\sin f(x))\times 12\pi(x-1)$

①. 감소∘극대 = 극소 인 경우
f가 극대를 가지지 않으므로 없다.

② 증가∘극소 = 극소 인 경우
f는 $x=1$에서 극소, g는 $x=f(1)$에서 증가
∴ $x=1$에서 극소, 총 1개의 극소가 나온다.

③ 극소∘F = 극소인 경우 (단 $F\ne$ 상수함수)
$h(x)=3x+4\cos x$ 일 때
$h'(x)=0$, $h''(x)>0$ 을 만족하는 실수 α에 대해
$f(x)=\alpha$인 x에서 극소이다..

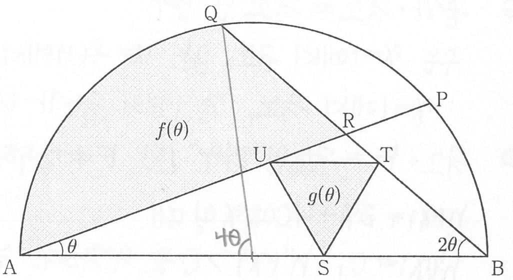


α에서 극소를 가지며 α는 모두 $(0, 6\pi)$에 있다.
∴ $0<x<2$에서 $f(x)=\alpha$의 실근은 모두 2개.
따라서 α가 3개로 총 6개의 극소가 나온다.

∴ x는 총 7개

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QBA=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 11



$f(\theta)+\triangle ARB=\frac{1}{2}\times1^2\times4\theta+\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin4\theta$
$=2\theta+\frac{\sin4\theta}{2}$

$\frac{\overline{AR}}{\sin2\theta}=\frac{2}{\sin3\theta}$, $\therefore \overline{AR}=\frac{2\sin2\theta}{\sin3\theta}$

$\triangle ARB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin2\theta}{\sin3\theta}\cdot2\cdot\sin\theta=\frac{2\sin2\theta\cdot\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\theta=0$ 근처에서 $\sin a\theta\fallingdotseq a\theta$ 으로, 이렇게 대체하면
$f(\theta)+\triangle ARB=4\theta$, $\triangle ARB=\frac{4}{3}\theta$. $\therefore f(\theta)=\frac{8}{3}\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to0^+}\frac{g(\theta)}{\theta\cdot f(\theta)}=\lim_{\theta\to0^+}\frac{3g(\theta)}{8\theta^2}$

$g(\theta)=\frac{\sqrt3}{4}a^2$ 로 두면 $\frac{a}{\sin\theta}=\frac{\overline{AS}}{\sin(120^\circ-\theta)}$,

$\frac{a}{\sin2\theta}=\frac{2-\overline{AS}}{\sin(120^\circ-2\theta)}$ $\therefore \frac{\overline{AS}\sin\theta}{\sin(120^\circ-\theta)}=\frac{(2-\overline{AS})\sin2\theta}{\sin(120^\circ-2\theta)}$

$\theta\to0^+$이므로 $\sin(120^\circ-\theta)=\sin(120^\circ-2\theta)$,

$\therefore \overline{AS}(\sin\theta+\sin2\theta)=2\sin2\theta$ $\overline{AS}\fallingdotseq\frac{4}{3}$

$\theta\to0^+$이면 $a\fallingdotseq\frac{4}{3}\sin\theta\times\frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}}\fallingdotseq\frac{8\sqrt3}{9}\theta$

$\therefore g(\theta)=\frac{64}{27}\theta^2\times\frac{\sqrt3}{4}$
$=\frac{16\sqrt3}{27}\theta^2$

$\frac{3}{8}\cdot\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\frac{2}{9}\sqrt3$, $p=9$. $q=2$

$p+q=11$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\geq1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 143

$\int_1^8 xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_1^8-\int_1^8 f(x)dx$

(나)에 $x=1, 2, 4, \cdots$ 계속 대입하면 $f(2^{n-1})=2^{n-1}$이다.

$f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$ $(0<\alpha<\beta)$에 대하여
$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx=\beta^2-\alpha^2$

$\therefore \int_1^2 g(x)dx=\frac{7}{4}$

$\int_2^4 g(x)dx=2\int_1^2 g(2t)dt=4\int_1^2 f(x)dx=5$

$\therefore \int_2^4 f(x)dx=7$.

$\int_4^8 g(x)dx=2\int_2^4 g(2t)dt=4\int_2^4 f(x)dx=28$

$\therefore \int_4^8 f(x)dx=20$

$\int_1^8 xf'(x)dx=8f(8)-f(1)-\frac{5}{4}-7-20$
$=63-27-\frac{5}{4}=\frac{139}{4}$

$p=4$, $q=139$. $p+q=143$

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.