2022학년도 대학수학능력시험 대비

꽃전 모의평가

해 설

CHOCOLATTE MATH LAB

초코라떼 수학연구소

빠른 정답

1	③	**9**	②	**16**	2	**23**	⑤
2	⑤	**10**	②	**17**	265	**24**	②
3	②	**11**	①	**18**	4	**25**	③
4	④	**12**	③	**19**	85	**26**	③
5	①	**13**	⑤	**20**	108	**27**	④
6	③	**14**	⑤	**21**	16	**28**	①
7	④	**15**	②	**22**	48	**29**	45
8	④					**30**	324

1번

$5^{\sqrt{2}+1} \times \dfrac{1}{\sqrt{5^{2\sqrt{2}}}} = 5^{\sqrt{2}+1} \times \left(5^{2\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 5^{\sqrt{2}+1} \times 5^{-\sqrt{2}}$

$= 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

답 : ③

2번

x^2이 우함수이므로, $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx$

$\displaystyle 2\int_{0}^{2} x^2 dx - a\int_{0}^{2} x^2 dx = 0$, $a = 2$

답 : ⑤

3번

$a_n = a_1 + d \times (n-1)$이라할 때, $a_4 - a_3 = d$

즉 공차 $d = 2$, $a_6 = a_1 + 5d = a_1 + 10 = 13$

$a_1 = 3$, $a_{10} = 3 + 2 \times 9 = 21$

답 : ②

4번

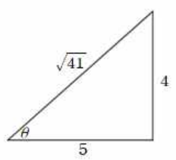
$\displaystyle\lim_{x\to 1+} f(f(x)) = \lim_{x\to -1} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1+} f(f(x)) - \lim_{x\to 0-} f(x) = 0 - (-1) = 1$

답 : ④

5번

$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$일 때, $\tan\theta < 0$이고, $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$이므로,



$\tan\theta = -\dfrac{4}{5}$, $\cot\theta = -\dfrac{5}{4}$

답 : ①

6번

$f(x)$의 역함수가 존재하려면, $f(x)$가 일대일 대응이어야 하고, 따라서 최고차가 양수인 $f(x)$는 단조증가함수이다.

$f'(x) = x^2 + 4x + m \geq 0$, $D = 4^2 - 4 \times 1 \times m \leq 0$

$16 - 4m \leq 0, 16 \leq 4m$, $m \geq 4$

답 : ③

7번

어떤 구간에서 함수가 미분가능하다는 것은 그 구간에서 함수가 연속이고 미분계수가 정의되어야 한다는 것이다. 이는 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$

$\displaystyle\lim_{x\to a-} f(x) = a^3 - 3a^2$, $\displaystyle\lim_{x\to a+} f(x) = f(a) = 9a + t$

$a^3 - 3a^2 = 9a + t$,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & (x < a) \\ 9 & (x \geq a) \end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x\to a-} f'(x) = \lim_{x\to a+} f'(x) = f'(a)$

$3a^2 - 6a = 9$, $3(a^2 - 2a - 3) = 3(a-3)(a+1) = 0$

$i)\ a = 3$일 때

$a^3 - 3a^2 = 9a + t$, $3^3 - 3 \times 3^2 = 9 \times 3 + t$, $27 - 27 = 27 + t$

$t = -27$, $a + t = -24$

$ii)\ a = -1$일 때

$a^3 - 3a^2 = 9a + t$, $(-1)^3 - 3 \times (-1)^2 = 9 \times (-1) + t$

$-1 - 3 = -9 + t$, $t = 5$, $a + t = 4$

$\therefore a + t$의 최댓값은 4

답 : ④

8번

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\log_2(k+1) - \log_2 k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\log_2\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)$

$= \log_2\dfrac{2}{1} + \log_2\dfrac{3}{2} + \log_2\dfrac{4}{3} + \ldots. + \log_2\dfrac{n}{n-1} + \log_2\dfrac{n+1}{n}$

$= \log_2\left(\dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{4}{3} \times \ldots. \times \dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{n+1}{n}\right) = \log_2(n+1)$

3이하의 자연수는 1,2,3이므로,

$\log_2(n+1) = 1$일 때, $\log_2(n+1) = 1, \log_2(n+1) = \log_2 2$

$(n+1) = 2$, $n = 1$

$\log_2(n+1) = 2$일 때, $\log_2(n+1) = 2$, $\log_2(n+1) = \log_2 4$

$(n+1) = 4$, $n = 3$

$\log_2(n+1) = 3$일 때, $\log_2(n+1) = 3$, $\log_2(n+1) = \log_2 8$

$(n+1) = 8$, $n = 7$

조건을 만족하는 모든 자연수 n의 값의 합은 $1 + 3 + 7 = 11$

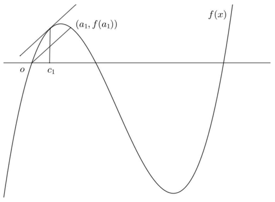
답 : ④

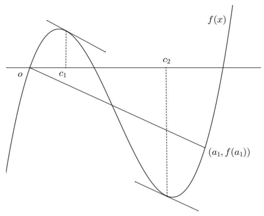
9번

문제를 분석하면 $af'(c)=f(a)$이므로, $f'(c)=\dfrac{f(a)}{a}$이다.

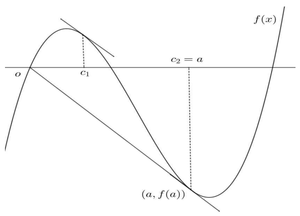
$f'(c)$는 $x=c$에서의 접선의 기울기이고, $f(0)=0$이므로, $\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$이다. 즉, 점$(0,0)$과 점$(a,f(a))$를 지나는 직선의 기울기와 같은 기울기를 가지는 점이 구간 $(0,a]$에서 두 개가 존재하도록 하는 최소의 a값을 찾는 문제이다.

평균값정리에 의해, $0<c\le a$에서 c값은 무조건 1개 이상 존재한다. 이때, 점 $(a,f(a))$의 위치에 따라 c값의 수는 달라진다.





따라서 어느 순간을 기점으로 $0<c\le a$인 조건을 만족하는 c의 개수는 1개에서 2개가 된다. a값의 크기를 서서히 키워가며 연속적으로 직선 $y=\dfrac{f(a)}{a}x$를 그리다 보면, 그림과 같이 직선이 곡선과 접선일 때가 조건을 만족하는 a가 최소가 되는 시점이다.



따라서, a가 최소일 때 $f'(a)=\dfrac{f(a)}{a}$

$2a(a-2)=0$이므로 최솟값 $a=2$이다.

답: ②

10번

선분 BC에 대해 코사인 법칙을 사용하면,

$\overline{\mathrm{BC}}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\dfrac{3}{8}$

$\overline{\mathrm{BC}}=4$

선분 BC에 대하여 각 A와 각 D는 원주각 이므로 $\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{D}$,

선분 BD는 원의 지름이고 점 C는 원 위의 점이므로 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$

따라서, $\tan(\angle\mathrm{D})=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$ $\quad\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{12\sqrt{55}}{55}$

답: ②

11번

극한값이 수렴하고, 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴한다. $\therefore f(8)=0$이고, $\displaystyle\lim_{x\to8}\frac{f(x)}{x-8}=1$이므로, $f'(8)=1$이다.

$\left|\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}\right|=1$이므로 절댓값을 풀면, $\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=\pm1$

$i)\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=1$일 때,

$f(6)=-m, f'(6)=1$

$f'(8)=1$이므로, $f'(x)=ax+b$라 하였을 때,

$\begin{cases}6a+b=1\\8a+b=1\end{cases}\quad a=0, b=1$

이때, $a=0$이면 함수 $f(x)$가 이차함수가 아니므로,

$\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=-1$임을 알 수 있다.

$ii)\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=-1$

$f(6)=-m, f'(6)=-1$

$\begin{cases}6a+b=-1\\8a+b=1\end{cases}\quad a=1, b=-7$

$\therefore f'(x)=x-7$, $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-7x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(8)=0$이므로, $C=24$, $\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-7x+24$

$f(6)=-m$이므로, $m=0$, $f(10)=4$이므로,

$f(10)+m=4$

답 : ①

12번

(가)를 $f(x)-x$형태로 변형하면,

$\displaystyle\int_0^{2n}f(x)dx=2n^2$

$\displaystyle\int_0^{2n}(f(x)-x)dx=2n^2-\int_0^{2n}xdx$

$\displaystyle\therefore\int_0^{2n}(f(x)-x)dx=0$

$\displaystyle\int_1^{2021}(f(x)-x)\,dx=\int_0^{2020}(f(x)-x)dx+\int_{2020}^{2021}(f(x)-x)dx$

$\displaystyle-\int_0^1(f(x)-x)dx$

변형한 조건 (가)에 $n=1010$을 대입하면,

$\displaystyle\int_0^{2020}(f(x)-x)dx=0$

조건 (나)에 $n=1011$을 대입하면,

$\displaystyle\int_{2020}^{2021}(f(x)-x)dx=1011$

조건 (나)에 $n=1$을 대입하면,

$\displaystyle\int_0^1(f(x)-x)dx=1$

따라서 $\displaystyle\int_1^{2021}(f(x)-x)dx=0+1011-1$

$=1010$

답 : ③

13번

ㄱ

$f(x)=k\sin\theta x^2+\cos\theta x+\cos^2\theta$

$g(\theta)$는 이차방정식의 서로 다른 근의 개수이므로,

판별식 $D=(\cos\theta)^2-4\times ksin\theta\times\cos^2\theta=\cos^2\theta(1-4ksin\theta)$의 부호에 따라 $g(\theta)$의 값이 달라진다.

$0<D$일 때 $g(\theta)=2$, $D=0$일 때 $g(\theta)=1$, $D<0$일 때 $g(\theta)=0$이다.

$D=0$일 때, $g(\theta)=1$이므로, $\cos^2\theta(1-4ksin\theta)=0$

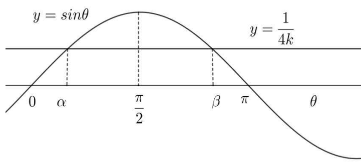
$i)\cos^2\theta=0$일 때,

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{3\pi}{2}$

$ii)1-4ksin\theta=0$일 때,

$1=4ksin\theta$, $\frac{1}{4k}=\sin\theta$

$k>\frac{1}{4}$이므로, $0<\frac{1}{4k}<1$ $\therefore 0<\sin\theta<1$



이때, 두 근의 합이 항상 일정하므로, $\alpha+\beta=\pi$

$\therefore g(\theta)=1$이 되도록 하는 모든 θ값의 합은 $\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\pi=3\pi$이므로, ㄱ은 참이다.

ㄴ

$D=\cos^2\theta(1-4ksin\theta)\geq 0$일 때, $g(\theta)\geq 1$이고, 항상 $\cos^2\theta\geq 0$이므로, $(1-4ksin\theta)\geq 0$이어야 한다.

$1\geq 4ksin\theta$

$i)k>0$

$\frac{1}{4k}\geq\sin\theta$, $-1\leq\sin\theta\leq 1$이므로. $\frac{1}{4k}\geq 1$, $\therefore 0<k\leq\frac{1}{4}$

$ii)k<0$

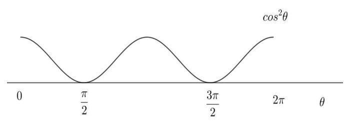
$\frac{1}{4k}\leq\sin\theta$, $-1\leq\sin\theta\leq 1$이므로, $\frac{1}{4k}\leq -1$, $\therefore -\frac{1}{4}\leq k<0$

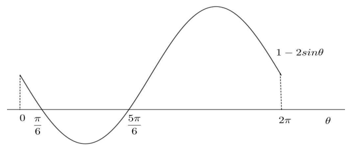
즉 k의 범위는 $-\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{1}{4}$(단, $k\neq 0$)이므로, ㄴ은 참이다.

ㄷ

$k=\frac{1}{2}$일 때, 판별식 $D=\cos^2\theta(1-2\sin\theta)$이다.

$\cos^2\theta$는 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서 0이고, $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$를 제외한 나머지 범위에서는 항상 0보다 크다. 또한 $1-2\sin\theta$는 $0\leq\theta<\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}<\theta\leq 2\pi$



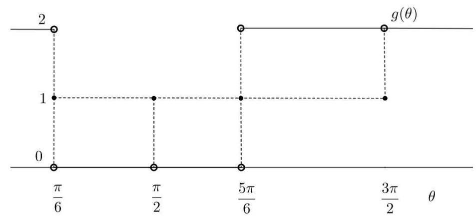


에서 양수이며, $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{6}$에서는 음수, $\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$일 때는 0이다.

따라서, 판별식 D의 부호 변화는 다음과 같다.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
D	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$

이를 이용하여, $g(\theta)$의 그래프를 그리면,

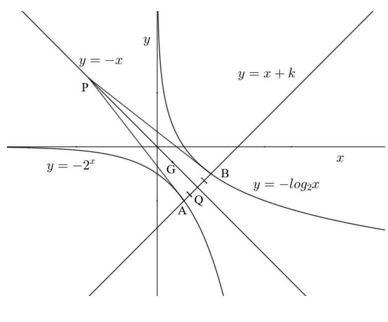


이 때, $a=\frac{\pi}{2}$, $a=\frac{3\pi}{2}$에서 $|\lim_{\theta\to a}g(\theta)-g(a)|=1$을 만족하므로, 만족시키는 모든 실수 a의 곱은 $\frac{3}{4}\pi^2$이다. 따라서 ㄷ은 참이다.

답 : ⑤

14번

$y=-2^x$와 $y=-\log_2 x$는 $y=-x$에 대하여 대칭이며, 점 P는 직선 $y=-x$위에 있다. 또한 점A와 점B는 각각 $y=-2^x$와 $y=-\log_2 x$위의 점이면서, 기울기가 1인 직선 위의 점이므로, 점A와 점B는 $y=-x$에 대하여 대칭이다. 그러므로 두 직선의 교점인 Q는 선분 AB를 이등분하는 점이다. 무게중심은 삼각형의 이등분선의 교점이므로 당연히 무게중심 G는 $y=-x$위에 있다.



$b=-a$, $a+b=0$이므로, $\begin{cases}a-b=1\\a+b=0\end{cases}$ $\therefore a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$

따라서, 무게중심G의 좌표는 $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$이다.

점A가 $y=-2^x$위의 점이므로, 점A의 x좌표를 t라하였을 때, 점A의 y좌표는 -2^t이며, 점B는 점A와 $y=-x$에 대하여 대칭이므로, 점B의 좌표는 $x=2^t, y=-t$이다. 이때, 무게중심의 좌표는 삼각형 세 꼭짓점의 좌표의 평균이므로, $\frac{1}{2}=\frac{t+2^t-2\sqrt{2}}{3}$,

$t+2^t=\frac{3}{2}+2\sqrt{2}$, $t=\frac{3}{2}$

이때, 삼각형 넓이는 $S=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2}\overline{\mathrm{PG}})\times(\overline{\mathrm{AB}})$이다.

점A와 점B는 모두 기울기가 1인 직선 위에 있는점이므로, 선분AB의 길이는 $\sqrt{2}\left(2^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)=4-\frac{3}{2}\sqrt{2}$이고, 점 P와 점 G 역시 $y=-x$위에 있으므로, 선분PG의 길이는 $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-(-2\sqrt{2})\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)$이다.

따라서 삼각형 넓이 $S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)\times\left(4-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$

$=-3\sqrt{2}+\frac{87}{8}$, $p=8, q=87, r=-3$이므로, $p+q+r=92$이다.

답 : ⑤

15번

$a_2=-2$

$n=1$일 때,

$$a_3=\begin{cases}-4-a_1-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_3)\\ -4+3=-1 & (a_3<1)\end{cases}$$

$\therefore a_3=-4-a_1-\frac{1}{2}a_4$

$n=2$일 때,

$$a_4=\begin{cases}2a_3-a_2-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_4)\\ 2a_3+3 & (a_4<1)\end{cases}$$

$Case_{1-1}$) $1\le a_3, 1\le a_4$

$a_4=2a_3-a_2-\frac{1}{2}a_4$ $a_2=-2$이므로

$a_4=\frac{4}{3}(a_3+1)$ $1\le a_3$이므로 $\frac{8}{3}\le a_4$

이는$1\le a_3, 1\le a_4$라는 조건에 만족한다.

$Case_{1-2}$) $1\le a_3, a_4<1$

$a_4=2a_3+3$

이 때, $1\le a_3$이므로 $5\le a_4$이다. 따라서 조건에 모순이다.

$Case_{2-1}$) $a_3<1, 1\le a_4$

$a_3=-1$, $a_2=-2$이므로

$a_4=2a_3-a_2-\frac{1}{2}a_4$

$a_4=-\frac{1}{2}a_4$

$a_4=0$

즉, $a_3<1, 1\le a_4$일때는 성립하지 않는다.

$Case_{2-2}$) $a_3<1, a_4<1$

$a_3=-1$이므로

$a_4=2a_3+3$

$a_4=1$

이때, $a_4<1$이므로 역시 성립하지 않는다.

즉, $Case_2$)는 성립하지 않는다.

$\therefore Case_{1-1}$)일 때 성립한다.

$n=3$ 일 때,

$$a_5=\begin{cases}2a_4-a_3-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_5)\\ 2a_4+3 & (a_5<1)\end{cases}$$

$Case_{1-1-1}$) $1\le a_3$, $\frac{8}{3}\le a_4$, $1\le a_5$

$a_5=2a_4-a_3-\frac{1}{2}a_4$ 이 때, $a_4=\frac{4}{3}(a_3+1)$이므로 $a_3=\frac{3}{4}a_4-1$

$a_5=\frac{3}{4}a_4+1$ $\frac{8}{3}\le a_4$이므로 $3\le a_5$ $a_5=3$또는 4

$n=4$일 때,

$$a_6=\begin{cases}2a_5-a_4-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_6)\\ 2a_5+3 & (a_6<1)\end{cases}$$

a_5가 3, 4일 때 각각 $1<a_6$이다.

따라서, $a_5=3$일 때,

$a_6=2a_5-a_4-\frac{1}{2}a_4$, $a_4=\frac{8}{3}$이므로 $a_6=2$, $a_5=3$, $a_4=\frac{8}{3}$,

$a_3=1$, $a_2=-2$, $a_1=-\frac{19}{3}$

$\Rightarrow$ a_1이 정수가 아니므로 모순이다.

$a_5=4$일 때,

$a_6=2$, $a_5=4$, $a_4=4$, $a_3=2$, $a_2=-2$, $a_1=-8$

$\Rightarrow a_1+a_6=-6$이다.

$Case_{1-1-2}$) $1\le a_3, 1\le a_4, a_5<1$

애초에 문제에서 a_5는 4이하의 자연수라고 했으므로 모순이다.

$\therefore a_1+a_6=-6$

답 : ②

16번

$\log_6 4+\dfrac{2}{1+\log_3 2}$

$=\log_6 4+\dfrac{2}{\log_3 3+\log_3 2}=\log_6 4+\dfrac{2}{\log_3 6}$

$=\log_6 4+2\log_6 3 \ =\log_6 4+\log_6 9 \ =\log_6 36=2$

답 : 2

17번

$\sum_{k=1}^{11}(k+1)^2-\sum_{k=2}^{10}k^2$

$=\sum_{k=1}^{11}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2$

$=\sum_{k=10}^{11}(k+1)^2$

$=\sum_{k=11}^{12}k^2$

$=121+144=265$

답 : 265

18번

$\int_0^4 |v(t)|dt=\int_0^1 v(t)dt-\int_1^3 v(t)dt+\int_3^4 v(t)dt$

$\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1 t^2-4t+3dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1=\frac{4}{3}$

$\int_1^3 v(t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^3=-\frac{4}{3}$

$\int_3^4 v(t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_3^4=\frac{4}{3}$

이동거리 $P=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{4}{3}=4$

답 : 4

19번

$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$

$x=1$ 대입)

$1\times\int_1^1 f(t)dt-\int_1^1 tf(t)dt=a+\frac{1}{2}f(0)-1+\frac{7}{12}=0$

$a+\frac{1}{2}f(0)=\frac{5}{12}$

$\left(x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt\right)'=xf(x)+\int_1^x f(t)dt-xf(x)=\int_1^x f(t)dt$

$=3ax^2+f(0)x-1$

$x=1$ 대입)

$\int_1^1 f(t)dt=0=3a+f(0)-1$

$\begin{cases} a+\frac{1}{2}f(0)=\frac{5}{12} \\ 3a+f(0)=1 \end{cases} \quad \therefore a=\frac{1}{6},f(0)=\frac{1}{2}$

$\left(\int_1^x f(x)dx\right)'=f(x)=6ax+f(0)=x+\frac{1}{2}$

$\{f(-5)\}^2=\left(-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$, $\therefore p+q=81+4=85$

답 : 85

20번

공비가 양수일 때, 모든 항은 음수이므로, $a_n+|a_n|$의 값은 항상 0이다. 따라서 공비는 음수이다. n이 홀수면, a_n이 음수이므로, $a_n+|a_n|=0$이며, n이 짝수일 때, $a_n+|a_n|=2a_n$이다. 즉, 조건의 식을 변형하면,

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+|a_n|)=2a_2+2a_4=\frac{20}{9}$

$\sum_{n=1}^{6}(a_n+|a_n|)=2a_2+2a_4+2a_6=\frac{182}{9}$

두 식을 연립하면, $2a_6=\frac{162}{9},a_6=\frac{81}{9}$이다. 초항을 a_1, 공비를 d라하면, $a_6=a_1\times d^5=\frac{81}{9}=\frac{3^4}{3^2}=\frac{3^5}{3^3}=\frac{1}{3^3}\times 3^5$

이때, 초항과 공비 둘 다 음수이므로, $a_1=\left(-\frac{1}{3^3}\right)$, $d=(-3)$이다.

$a_6=9$이므로, $a_7=-27,a_8=81$이다.

$\therefore a_8-a_7=81-(-27)=108$

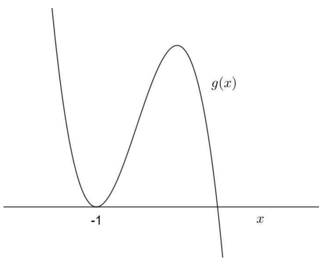
답 : 108

21번

함수 $g(x)$는 -1부터 x까지 함수 $f(x)$를 $-f(k)$만큼 평행이동한 함수의 적분값이다. 따라서 $g(x)$는 최고차항이 음수인 삼차함수이다.

$g(-1)=0$, $g'(x)=f(x)-f(k)$이다. 방정식 $g(x)=0$의 근이 2개라는 것은 극값을 2개 갖고, 한 점에서는 중근을 갖고 한점에서는 1개의 실근을 가져야한다.

$Case_1$) $x=-1$에서 $g(x)$가 중근을 갖는 경우



$g'(-1)=0$이므로

$\Rightarrow f(-1)-f(k)=0$

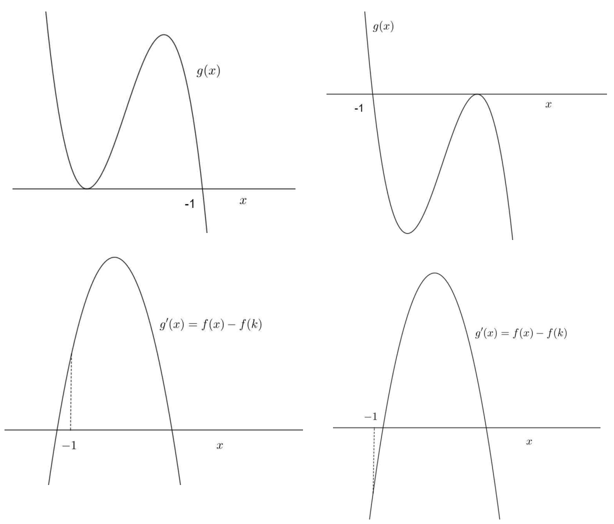
$\Rightarrow f(-1)=f(k)$

$\Rightarrow f(k)=0$

따라서 $Case_1$을 만족시키는 k의 값은 $-1,3$이다.

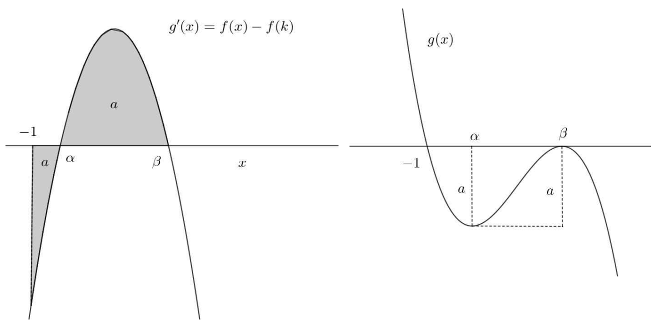
$Case_2$) $x\neq-1$에서 중근을 갖는 경우

$Case_{2-1}$ $Case_{2-2}$



$f(k)$가 음수인 경우 $f(k)$가 양수인 경우

$-1 < x$인 구간에서 $g(x)$가 단조감소하는 경우 즉 $g'(x)$의 함숫값이 항상 음수인 경우는 존재하지 않는다.
따라서 $Case_{2-1}$는 불가능하다. $Case_{2-2}$가 가능한 $g(x)$의 경우이며 $-1 < x$에서 함수$g'(x)$의 부호변화는 $- \rightarrow + \rightarrow -$이므로 $f(k)$는 양수이다.
그림과 같이 도함수의 적분값은 원함수의 함숫값의 변화량이다.



삼차함수의 비율관계에 의해, $\alpha - (-1) = \dfrac{\beta - (-1)}{3}$

$\Rightarrow 3\alpha - \beta = -2$

그리고 $f(x) - f(k)$는 y축으로만 평행이동하였으므로 여전히 축을 $x = -1$로 가진다. 따라서, $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 1$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 2$

위 두 개의 식을 연립하면, $\alpha = 0, \beta = 2$이다.
따라서, $f(x) - f(k) = -3x(x-2)$
$\Rightarrow f(k) = 9$이다.
따라서 $k = 0, 2$

$Case_1$과 $Case_2$ 모두 만족시키는 k값은 $-1, 0, 2, 3$ $\alpha = 4$
$\therefore \alpha^2 = 16$이다.
답 : 16

22번

점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$이다. 점P의 좌표는 $(0, -tf'(t) + f(t))$이므로, 점 P부터 원점 O까지의 거리는 $|-tf'(t) + f(t)|$이다. 점H의 좌표는 $(t, 0)$이므로 점 H부터 점 A까지의 거리는 $|1-t|$이다. $h_1(t) = f(t) - tf'(t)$, $h_2(t) = t-1$라 하였을 때, 함수$g(t)$는

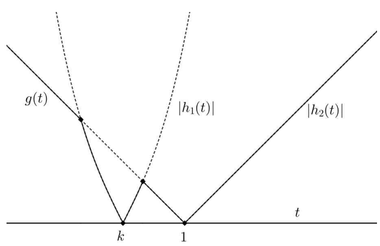
$$g(t) = \begin{cases} |h_1(t)| & (|h_2(t)| \geq |h_1(t)|) \\ |h_2(t)| & (|h_2(t)| < |h_1(t)|) \end{cases}$$

$f(t) = -\dfrac{1}{2}t^3 + \cdots$이므로, $f'(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + \cdots$이다. 따라서

$-tf'(t) + f(t) = \dfrac{3}{2}t^3 + \cdots + \left(-\dfrac{1}{2}t + \cdots\right) = t^3 + \cdots$이고, $h_1(t)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

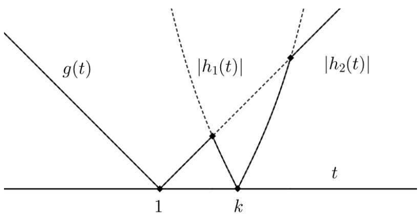
함수$|h_2(t)|$에서 $t=1$일 때, $g(1) = 0$이므로, 방정식 $g(t) = 0$는 $t = 1$을 근으로 가진다. (다)조건에 의하면, 방정식 $g(t) = 0$은 서로 다른 실근 2개를 가지고, 방정식$|h_2(t)| = 0$에서 $t=1$을 제외하고, 근이 없으므로, 나머지 근 한 개는 방정식$|h_1(t)| = 0$에서 가진다.
따라서 $|h_1(t)|$와 x축과의 교점이 $t=1$을 포함하여 2개거나, $t=1$을 제외하고 교점이 1개이면 (다)조건이 성립한다. 즉 방정식 $h_1(t) = 0$는
1) $t = k(k \neq 1)$에서 하나의 근을 가지거나
2) $t = 1$에서 중근을 가지고 $t = k$ (단, $k \neq 1$)에서 근을 가지거나
3) $t = k$(단, $k \neq 1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가져야한다.

$Case_1$)
방정식 $h_1(t) = 0$은 $t = k(k \neq 1)$에서 하나의 근을 가진다.
$Case_{1-1}$) 근이 $k < 1$일 때



미분가능하지 않는 점이 4개이므로 (가)조건에 성립하지 않는다.
(k에서 삼중근일 경우에는 미분불가능점이 3개이다)

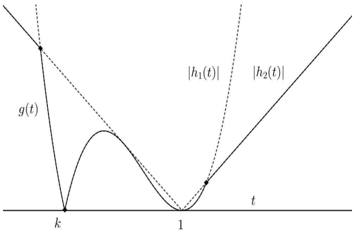
$Case_{1-2}$) 근이 $k > 1$일 때

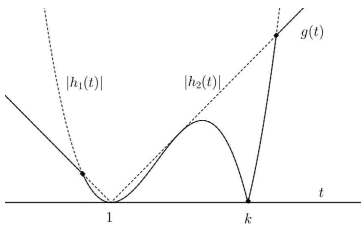


미분가능하지 않는 점이 4개이므로 (가)조건에 성립하지 않는다.
(k에서 삼중근일 경우에는 미분불가능점이 3개이다.)

$Case_2$)

방정식 $h_1(t)=0$은 $t=1$에서 중근을 가지고 $t=k$(단, $k\neq1$)에서 근을 가진다.



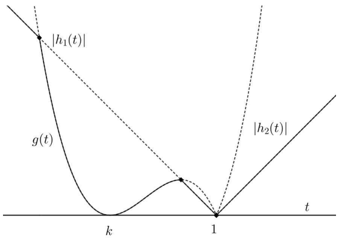


두 그래프 모두 미분가능하지 않는 점이 3개이므로 (가)조건에 성립하지 않는다. 오른쪽 그래프에서는 (나)조건도 만족시키지 못한다.

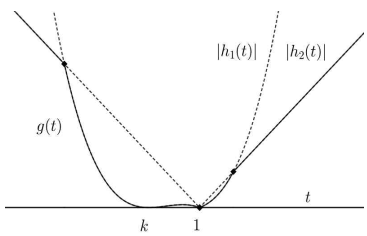
결국 (나)조건을 만족시키려면, $k<1$이어야하므로,

$Case_3$) **방정식 $h_1(t)$는 $t=k$(단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가진다.**

$Case_{3-1}$) **방정식 $h_1(t)=0$는 $t=k$(단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가지면서 $h_1'(1)\neq1$일 때**



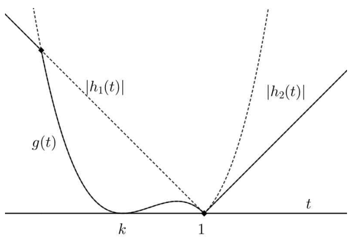
$1<h'(1)$



$h'(1)<1$

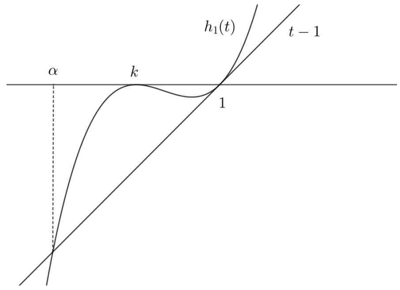
미분가능하지 않는 점이 3개이므로 (가)조건에 성립하지 않는다.

$Case_{3-2}$) **방정식 $h_1(t)=0$는 $t=k$(단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가지면서 $h_1'(1)=1$일 때**



미분가능하지 않는 점이 2개이므로 모든 조건에 성립한다.

따라서, 함수 $h_1(t)$는 $y=t-1$과 접하면서 $x=k(k<1)$에서 중근을 갖는다.



$h_1(t)=(t-k)^2(t-1)$ 또는 $h_1(t)-(t-1)=(t-\alpha)(t-1)^2$이므로,

$h_1(t)=t^3-(2k+1)t^2+(k^2+2k)t-k^2$

$h_1(t)=t^3-(\alpha+2)t^2+(2\alpha+2)t-(\alpha+1)$

$\therefore k=0,\ \alpha=-1$

따라서, $h_1(t)=f(t)-tf'(t)=t^3-t^2$

$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+at^2+bt+c$라고 하면

$h_1(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+at^2+bt+c-(-\dfrac{3}{2}t^3+2at^2+bt)$

$=t^3-at^2+c=t^3-t^2$

따라서, $a=1,\ c=0$이다.

고로 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+x^2+bx$ 이때, $f(1)=\dfrac{5}{2}$이므로

$b=2$

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+x^2+2x$

$f(-2)\times g(13)=4\times|h_2(13)|=48$

답 : 48

23번

$$\lim_{n\to0+}\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}-\frac{2}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to0+}\frac{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}-\frac{2}{n}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to0+}\frac{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3-\frac{4}{n^2}}{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to0+}\frac{\frac{5}{n}-3}{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to0+}\frac{\frac{5}{n}-3}{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to0+}\frac{\frac{5}{n}}{\frac{4}{n}}=\frac{5}{4}$$

답 : ⑤

24번

x에 대하여 미분하면,

$$(x^3+y^3=6xy)'=\left(3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=6y+6x\frac{dy}{dx}\right)$$

$x=3, y=3$을 대입하면, $27+27\dfrac{dy}{dx}=18+18\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx}=-1$

답 : ②

25번

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(n+k)^2-n\ln n^2}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(\frac{n+k}{n})^2}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(1+\frac{k}{n})^2}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+\frac{k}{n})^2}{1+\frac{k}{n}}$$

$x_k=\dfrac{k}{n}$라 하였을 때, $dx=\dfrac{1}{n}$, $x_0=0, x_n=1$이고

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}=\int$이므로,

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)^2}{1+x}dx=2\int_1^2\frac{\ln|x|}{x}dx$$

$\ln x=t$라고 치환하면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이다. 따라서, $2\int_0^{\ln2}t\,dt$이다.

$$2\int_0^{\ln2}t\,dt=2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln2}=2\times\frac{1}{2}\times\{\ln2\}^2=\{\ln2\}^2$$

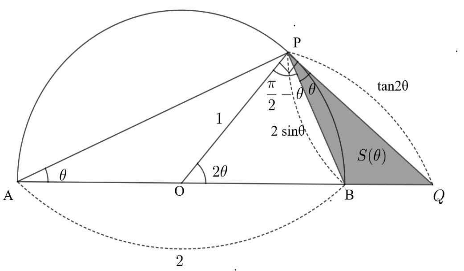
답 : ③

26번

원의 중심을 O라 하였을 때, $\triangle$AOP는 이등변삼각형이며, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}=1$이다. 선분 PQ는 호 AB에 접하는 선분이므로, $\angle\mathrm{OPQ}=90^\circ$이다. $\triangle$AOP가 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{APO}=\theta$이고, $\angle\mathrm{POQ}=2\theta$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\tan2\theta$이다.

그리고 삼각형 BOP는 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{OPB}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이고

$\angle\mathrm{OPQ}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{OPB}=\theta$



$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times\tan2\theta\times\sin\theta$$

$$\therefore\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{S(\theta)}}{\theta^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\sin\theta|\sqrt{\tan2\theta}}{\theta\sqrt{\theta}}$$

$$\therefore\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{S(\theta)}}{\theta^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin\theta}{\theta}\sqrt{\frac{\tan2\theta}{2\theta}\times2}=\sqrt{2}$$

답 : ③

27번

로그의 진수범위를 통해 x의 범위를 구하였을 때,

$x<2$일 때, $2-x>0$이므로, $x<2$

$x>2$일 때, $x-2>0$이므로, $x>2$

$f(x)=\ln(x-2), g(x)=-\ln(2-x)+b, h(x)=a(x-2)$라 하자.

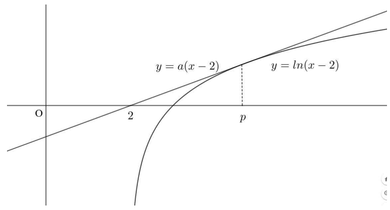
이 때, 직선의 기울기인 a가 최소일 때, 함수 $h(x)$와 $f(x)$가 $x>2$인 한 점에서 접하므로, 접하는 점의 x좌표를 p라 하였을 때(단 $p>2$), $\ln(p-2)=a(p-2)$, $a=\dfrac{1}{p-2}$

$a(p-2)=1$

$\ln(p-2)=1$

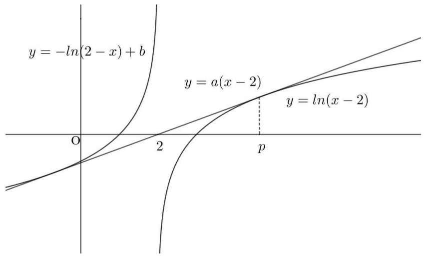
$p-2=e$

$\therefore p=e+2, a=\dfrac{1}{e+2}$



즉 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{e+2}$이다.

b 역시 직선과 접할 때 최솟값을 가지고, 이때 $g(x)$는 $f(x)$와 $x=2$ 기준으로 대칭일 때이므로 $b=0$이다.

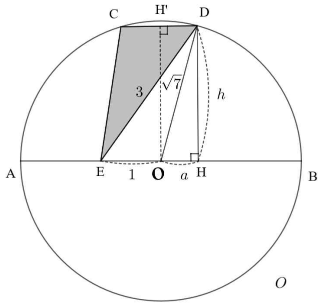


답 : ④

28번

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{7}:1$, 원의 반지름이 $\sqrt{7}$이므로, $\overline{\mathrm{OE}}=1$, $\overline{\mathrm{DE}}=3\overline{\mathrm{OE}}$이므로, $\overline{\mathrm{DE}}=3$이다.

점D에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 수선의 발을 내리고 그 점을 H라 하고, 원의 중심과 점D를 연결하면, ΔDEH와 ΔODH이 만들어진다. 또한 점O에서 $\overline{\mathrm{CD}}$에 수선의 발을 내린 점을 H′이라 하였을 때, $\overline{\mathrm{CD}}$는 점H′을 기준으로 이등분되므로, $\overline{\mathrm{DH'}}$와 $\overline{\mathrm{OH}}$의 길이는 같다. 즉 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 $2a$라 하였을 때, $\overline{\mathrm{OH}}=a$이다. $\overline{\mathrm{DH}}$의 길이를 h라 하였을 때, ΔODH와 ΔDEH는 직각삼각형이므로,

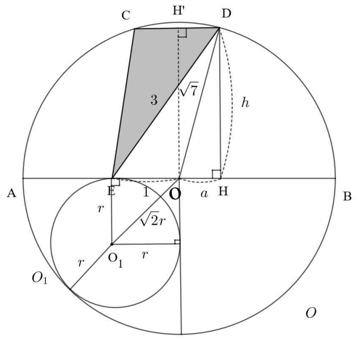


$$\begin{cases}a^2+h^2=7\\(1+a)^2+h^2=9\end{cases}\quad\therefore a=\frac{1}{2}, h=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\overline{\mathrm{CD}}$를 밑변, $\overline{\mathrm{DH}}$를 높이라 하였을 때,

R_1에서의 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\left(2\times\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

R_2에서 반원 안에 왼쪽 원을 O_1이라하고, 그 중심을 O_1, O_1의 반지름을 r이라 하였을 때, $\overline{\mathrm{OO_1}}=\sqrt{2}r$이므로,



$r+\sqrt{2}r=\sqrt{7}$이다. $r=\dfrac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{2}}$이므로, 원 O의 반지름과 원 O_1의 반지름의 길이비는 $\sqrt{7}:\dfrac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{2}}=1:\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$이다. 따라서 그림 R_1에서 삼각형의 넓이와 R_2에서 새로 만들어진 삼각형 1개의 넓이비는 $1:\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2$이다. 또한 삼각형은 2^n개씩 증가하므로, 새로 만들어진 삼각형의 넓이는 $\left(2\times\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2\right)^n$배씩 증가한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\left(\frac{2}{(1+\sqrt{2})^2}\right)}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{1+2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}}=\frac{3(5\sqrt{3}+4\sqrt{6})}{28}$$

답 : ①

29번

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

$$\int_a^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx=\int_0^\alpha\sqrt{1+\tan^2x}\,dx=1$$

$$\int_0^\alpha\sqrt{\sec^2x}\,dx=1,\quad \int_0^\alpha|\sec x|\,dx=1$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에서, 항상 $\sec\alpha>0$이므로,

$$\int_0^\alpha|\sec x|\,dx=\int_0^\alpha \sec x\,dx$$

$$=\int_0^\alpha\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^\alpha\frac{\cos x}{\cos^2x}dx=\int_0^\alpha\frac{\cos x}{1-\sin^2x}dx$$

$\sin x=t$라하면,

$\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이고, $\sin 0=0$이므로, $\displaystyle\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{1-t^2}dt=1$

$$\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{1-t^2}dt=-\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{t^2-1}dt=-\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{(t+1)(t-1)}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sin\alpha}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=-\frac{1}{2}\left[\ln|t-1|-\ln|t+1|\right]_0^{\sin\alpha}$$

$$=-\frac{1}{2}(\ln|\sin\alpha-1|-\ln|\sin\alpha+1|),$$

$0<\sin\alpha<1$이므로,

$$=-\frac{1}{2}(\ln|\sin\alpha-1|-\ln|\sin\alpha+1|)=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)=1$$

$\ln\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=-2$이므로, $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{1}{e^2}$, $e^2-e^2\sin\alpha=1+\sin\alpha$,

$e^2-1=(e^2+1)\sin\alpha$, $\quad\sin\alpha=\dfrac{e^2-1}{e^2+1}$,

$\tan\alpha>0$이므로, $\tan\alpha=\dfrac{e^2-1}{2e}$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}$ 이므로, $60(a^2+b)=45$

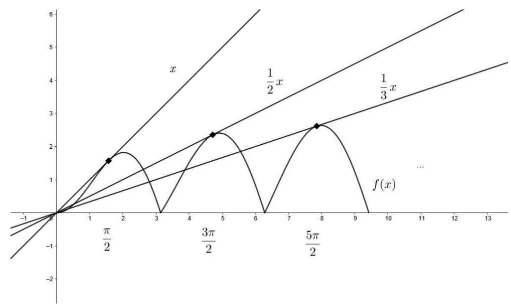
답 : 45

30번

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$일 때, $|f(x)|=\dfrac{1}{n}x$

$f'(x)=\dfrac{1}{n}(\sin x+x\cos x)$, $f'(\dfrac{2n-1}{2}\pi)=\dfrac{1}{n}$

x가 $\dfrac{2n-1}{2}\pi$보다 약간 작으면 $\sin x$와 $x\cos x$가 작아진다. x가 $\dfrac{2n-1}{2}\pi$보다 약간 크면 $\sin x$는 작아지고 $x\cos x$는 음수이다. 따라서, 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$일 때 기울기가 최대가 되고 함숫값이 $\dfrac{1}{n}x$와 같으므로 $x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$에서 접한다. 따라서 $|f(x)|$와 $\dfrac{1}{n}x$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

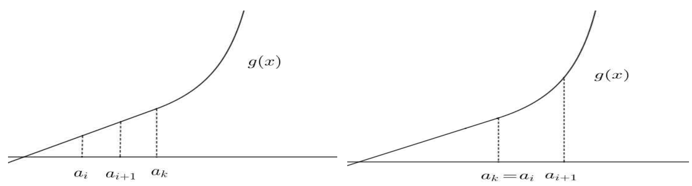


$\alpha=\dfrac{2n-1}{2}\pi$이고 $a_n=f(\alpha)=\dfrac{2n-1}{2n}\pi$이다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\pi$이므로 $\dfrac{\pi}{2}\le a_n<\pi$

$g(x)$는 수열 a_n의 k항을 기준으로 왼쪽은 직선 오른쪽은 유리함수의 형태이다. 또한 주어진 구간에서 미분가능하다.

조건 (나)에 대해서 함수 $g(x)$를 다음과 같이 그릴 수 있다.



$g'(a_i)<g'(a_{i+1})$를 만족하지 못함 $\quad$ $g'(a_i)<g'(a_{i+1})$를 만족

만약 a_i와 a_{i+1}이 모두 유리함수에 있다고 해도 a가 양수이므로 유리함수는 단조증가한다. 따라서, 두 번째 그림이 조건을 만족시키는 i가 최소일 때이므로 $k=5$이다.

조건 (가)의 경우는 다음과 같이 해석할 수 있다.

$g(a_{m+1}) < (a_{m+1} - a_m)^2 + g(a_m)$

$\Rightarrow \dfrac{g(a_{m+1}) - g(a_m)}{a_{m+1} - a_m} < a_{m+1} - a_m$

위 식의 기하학적 의미는 $g(x)$의 a_m에서 a_{m+1}까지의 평균변화율이 $a_{m+1} - a_m$보다 작은 m이 3개 존재한다라는 것이다.

$a_{m+1} - a_m$의 값은 m이 커질수록 작아지고 $\dfrac{g(a_{m+1}) - g(a_m)}{a_{m+1} - a_m}$의 값은 일정하다가 $m=5$부터 커지므로 조건 (가)를 만족시키는 3개의 m의 값은 $m = 1, 2, 3$이다.

$m \le 5$ 일 때 $\dfrac{g(a_{m+1}) - g(a_m)}{a_{m+1} - a_m} = a$이므로 $a < a_4 - a_3$이고 $m = 4$일 때는 조건 (가)를 만족시키지 못하므로 $a_5 - a_4 \le a$이다.

따라서, $a_5 - a_4 \le a < a_4 - a_3$ 문제의 조건에서 a는 최소라고 했으므로

$a = a_5 - a_4 = \dfrac{\pi}{40}$

함수 $g(x)$는 미분가능하다고 했으므로

연속: $\lim_{x \to a_5 -} g(x) = \lim_{x \to a_5 +} g(x) = g(a_5)$

$\lim_{x \to \frac{9}{10}\pi -} a\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{9}{10}\pi +} \left(\dfrac{b}{\pi - x} + c\right) = \dfrac{10b}{\pi} + c$

미분가능: $\lim_{x \to a_5 -} g'(x) = \lim_{x \to a_5 +} g'(x)$

$\lim_{x \to \frac{9}{10}\pi -} a = \lim_{x \to \frac{9}{10}\pi +} \dfrac{b}{(\pi - x)^2}$

위 두 개의 식을 연립하면, $b = \dfrac{\pi^3}{4 \times 10^3}$, $c = \dfrac{3\pi^2}{4 \times 10^2}$

$\therefore$ 따라서, $\dfrac{3^k c}{ab}$의 값은 324이다.

답 : 324

예상등급컷

1컷: 84

2컷: 77

3컷: 67

예상 오답률 순위

1위: 30번

2위: 22번

3위: 21번

4위: 15번

5위: 28번

6위: 14번

7위: 9번