제 2 교시

2022학년도 미니 파이널 10회

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

하나도 빠짐없이

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

2022학년도 미니파이널 10회

제 2 교시

수학 영역

1. 양의 실수 t와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(t)$의 최솟값은 0이다.
> (나) x에 대한 방정식 $f'(x)=g(a)$를 만족시키는 x의 값은 a와 $\dfrac{5}{3}$이다. (단, $a>\dfrac{5}{3}$인 상수이다.)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$A_m=\{x\,|\,f'(x)=g(m),\ 0<x\le m\}$

이라 할 때, $n(A_m)=2$를 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오.

[4점][2020년 4월 나30]

2. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

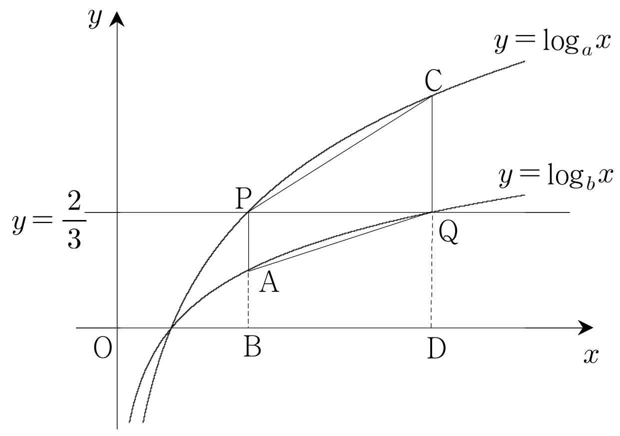
$$v(t)=-4t+5$$

이다. 시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 11일 때, 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는?

[4점][2020년 6월 나15]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

3. 그림과 같이 직선 $y=\frac{2}{3}$ 가 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$ 와 만나는 점을 각각 P, Q 라 하자. 점 P 를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_b x$ 와 x 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 점 Q 를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$ 와 x 축과 만나는 점을 각각 C, D 라 하자.



$\overline{PA}=\overline{AB}$ 이고, 사각형 PAQC 의 넓이가 1일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $1<a<b$이다.)

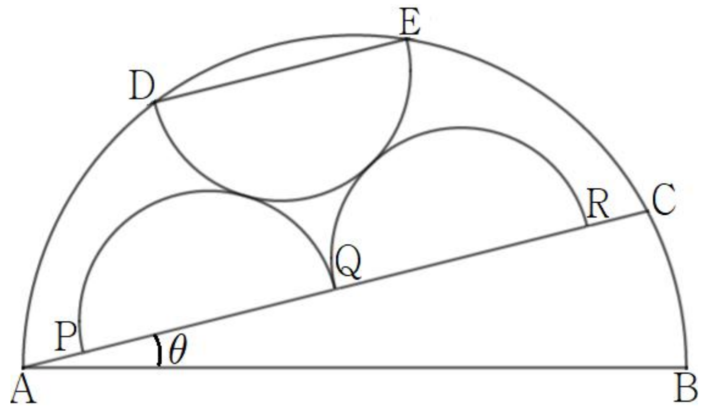
[4점][2011년 사관학교 가나22]

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

4. 함수 $f(x)=3ke^{2x}+x^4-4x^3-30x^2$의 그래프가 변곡점을 갖지 않도록 하는 k의 최솟값은 ae^b이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.)

5. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. $\angle BAC = \theta$가 되도록 호 AB위에 점 C를 잡는다. 선분 AC위에 점 P, Q, R에 대하여 선분 PQ, QR을 각각 지름으로 하는 반원을 C_1, C_2라 하고, 호 AC위에 점 D, E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 반원을 C_3라 하자. $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{DE}$이고, 세 반원 C_1, C_2, C_3가 서로 외접하고 있을 때, 반원 C_1의 반지름은 $r(\theta)$이다.

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{r(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}$의 값은 k이다. $120k^2$의 값을 구하시오.



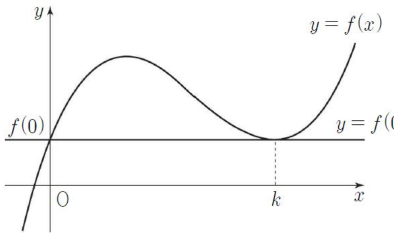
1) 35

조건 (가)에서 $g(k)=0$인 양수 k가 존재한다.

$g(k)=\dfrac{f(k)-f(0)}{k}=0$

$f(k)=f(0)$

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(k,\ f(k))$에서 직선 $y=f(0)$과 접한다.



$f(x)=x(x-k)^2+f(0)$

$f'(x)=(x-k)^2+2x(x-k)=(3x-k)(x-k)$ …… ㉠

$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{t(t-k)^2}{t}=(t-k)^2$

조건 (나)에서 $f'(a)=g(a)$

$(3a-k)(a-k)=(a-k)^2$

$2a(a-k)=0$

$a>0$이므로 $a=k$

㉠에서 $f'(k)=0$이므로 $g(a)=0$ …… ㉡

조건 (나)에서 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=g(a)$이고

㉡에서 $g(a)=0$이므로 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$

㉠에서 $f'(x)=0$에서

$x=\dfrac{k}{3}$ 또는 $x=k$이므로

$\dfrac{k}{3}=\dfrac{5}{3}$ 또는 $k=\dfrac{5}{3}$

조건 (나)에서 $a>\dfrac{5}{3}$이므로 $k>\dfrac{5}{3}$

따라서 $k=5$

$f'(x)=(3x-5)(x-5)$

$g(t)=(t-5)^2$

이차방정식 $f'(x)=g(m)$에서

$3x^2-20x-m^2+10m=0$

이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-20)^2-4\times3\times(-m^2+10m)$

$=12(m-5)^2+100>0$

이므로 이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$은 m의 값에 관계없이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

서로 다른 두 실근을 $c_1,\ c_2\,(c_1<c_2)$라 하자.

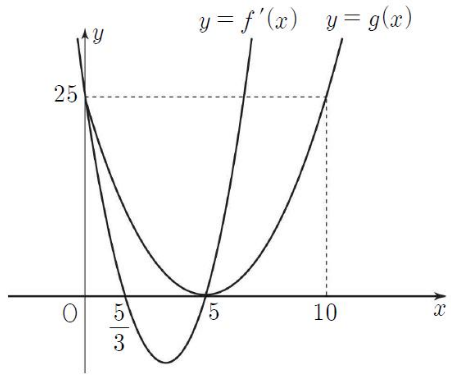
$n(A_m)=2$이려면 $0<c_1<c_2\le m$이어야 한다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$c_1c_2=\dfrac{-m^2+10m}{3}>0$

$0<m<10$

두 함수 $y=f'(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



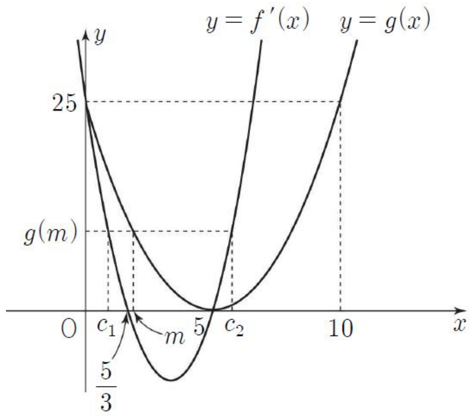
$g(m)=(m-5)^2\ge0$이므로

$f'(x)=g(m)$에서

$f'(x)=(3x-5)(x-5)\ge0$

$x\le\dfrac{5}{3}$ 또는 $x\ge5$

ⅰ) $0<m<5$인 경우



$0<c_1<m<5<c_2$이므로

$A_m=\{c_1\}$

$n(A_m)\ne2$

ⅱ) $m=5$인 경우

$g(5)=0$이므로

$f'(x)=g(5)=0$

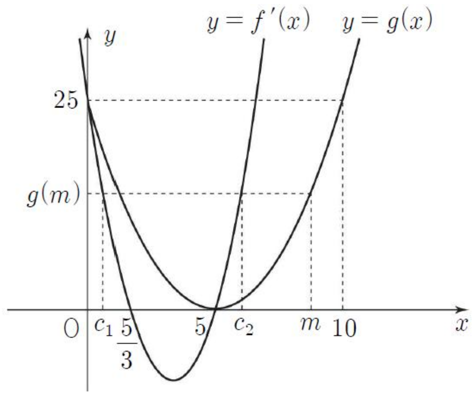
$(3x-5)(x-5)=0$

$x=\dfrac{5}{3}$ 또는 $x=5$

$A_5=\left\{\dfrac{5}{3},\ 5\right\}$

$n(A_5)=2$

ⅲ) $5<m<10$인 경우



$0<c_1<c_2<m$이므로

$A_m=\{c_1,\ c_2\}$

$n(A_m)=2$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $n(a_m)=2$를 만족시키는 자연수 m은

5, 6, 7, 8, 9

따라서 $5+6+7+8+9=35$

2) ④

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 속도가 주어져 있을 때 위치를 구할 수 있는가?

$v(t)=-4t+5$ 이므로

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t)=-2t^2+5t+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $x(3)=11$이므로

$-2\times9+5\times3+C=11$ 에서 $C=14$

$\therefore\ x(0)=C=14$

3) ③

$\log_a x : \log_b x = 2:1 \qquad \therefore b=a^2$

$$\square PAQC=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}\times\overline{BD}=1\quad,\ \overline{BD}=2$$

$a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=2$, $a^{\frac{2}{3}}=2 \qquad \therefore ab=a^3=2^{\frac{9}{2}}=16\sqrt{2}$

4) 8

$f''(x)=12(ke^{2x}+x^2-2x-5)$에 대하여

$ke^{2x}+x^2-2x-5=0$의 실근을

$y=ke^{2x}$의 그래프와 $y=-x^2+2x+5=0$의

그래프의 교점으로 해석한다.

변곡점을 갖지 않기 위해서는 교점이 없거나,

있어도 두 그래프가 서로 접하여 부호변화가 없어야 한다.

접하는 상황이라 생각하기는 쉽고,

위에서 설명 하였듯 접점의 x좌표를 t라 잡으면

$ke^{2t}=-t^2+2t+5$, $2ke^{2t}=-2t+2$를 얻고

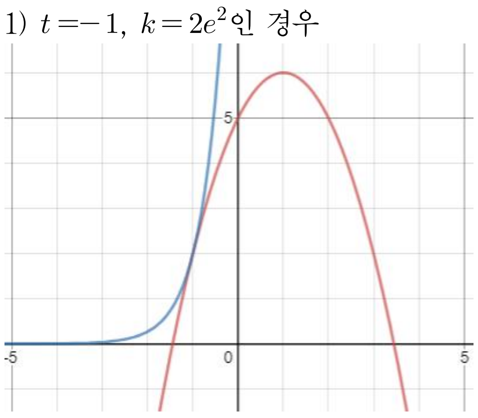
이를 연립하여

$t^2-3t-4=0,\ t=-1, 4$를 얻고 이에 따라

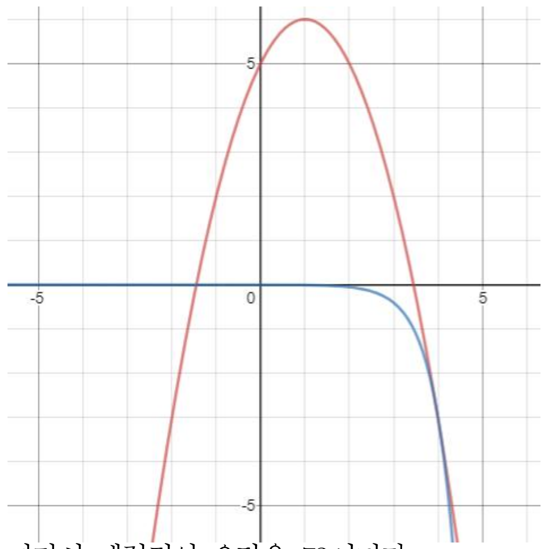
얻어지는 $k=2e^2, -3e^{-8}$이다.

각각 그래프를 그려줄 테니 분석은 스스로 하자.

1) $t=-1,\ k=2e^2$인 경우



2) $t=4,\ k=-3e^{-8}$인 경우

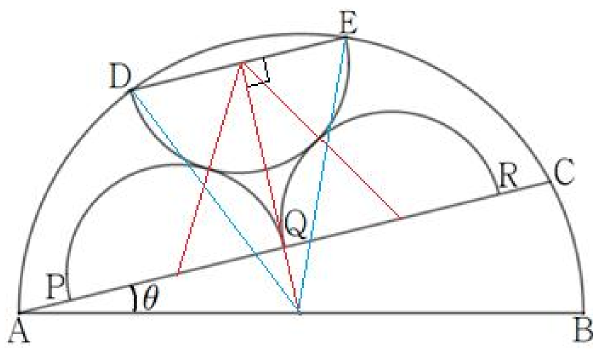


따라서 매력적인 오답은 73이지만,

정답은 8이 된다.

5) 10

[출제의도] 피타고라스, 특수각



$$1^2=r^2+(r\sqrt{3}+\sin\theta)^2$$

$$4r^2+2\sqrt{3}\sin\theta\times r+\sin^2\theta-1=0$$

$$r=\frac{-\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{4-\sin^2\theta}}{4}$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{r(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}=\lim_{t\to0+}\frac{-\sqrt{3}\cos t+\sqrt{4-\cos^2 t}}{4(t)^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4\sin^2 t}{4(t)^2\left(\sqrt{4-\cos^2 t}+\sqrt{3}\cos t\right)}=\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\quad,\quad 120k^2=10$$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.