제 2 교시

2022학년도 미니 파이널 9회

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

남김없이 다 쏟아

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ······ 1~2쪽
○ 선택과목
미적분 ······ 3쪽
기하 ······ 3쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

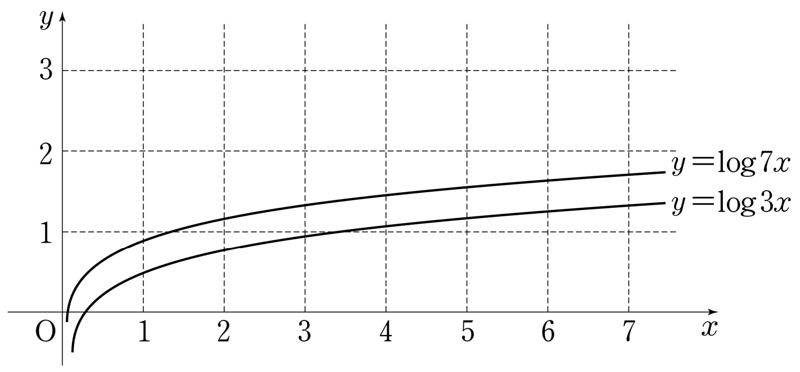
제 2 교시

수학 영역

1. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$ 의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오.

[4점][2012년 9월 가나30]

(가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
(나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다.



2. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 세 항 a_2, a_4, a_9가 이 순서대로 공비 r인 등비수열을 이룰 때, $6r$의 값을 구하시오.

[4점][2011학년도 수능 나22]

3. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

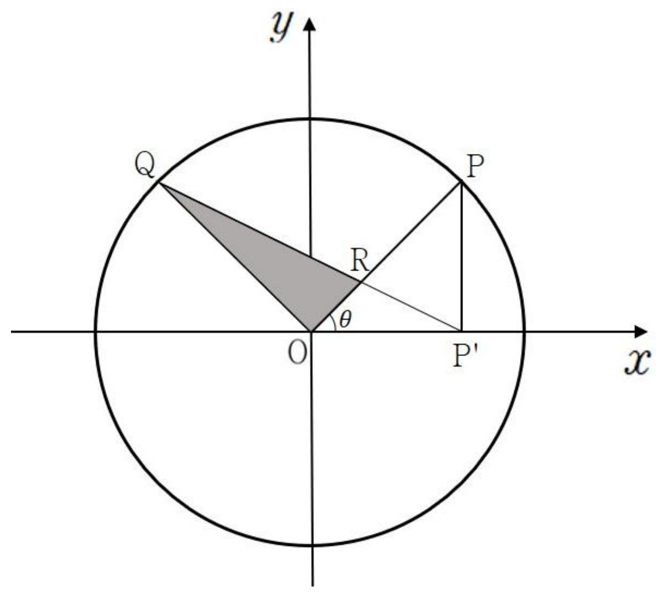
$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=0$ (나) 함수 $\lvert g(x)-g(a)\rvert$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다. $f(5)$의 값을 구하시오.
[4점][2020년 3월 가30]

4. 좌표평면 위에 원점O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있는 점P에서 x축에 내린 수선의 발을 점P′, 점P를 y축에 대하여 대칭 시킨 원 위에 점을 점Q라하고, 선분OP와 선분P′Q의 교점을 점R이라고 하자. ∠POP′ $=\theta$일 때, 삼각형ORQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.



$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$)

① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{12}$

5. 직선 $y=x$와 $y=e^{tx}$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때 선분 AB의 길이를 함수 $f(t)$라 하자. 각각 다음 조건을 만족시킨다. (단, O는 원점이다.)

(가) 점 A의 x좌표보다 점 B의 x좌표가 크다.
(나) $t=\alpha$일 때, $2\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이다.

$f'(\alpha)=\left(\frac{a}{1-2\ln 2}+\frac{b}{1-\ln 2}\right)\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.)

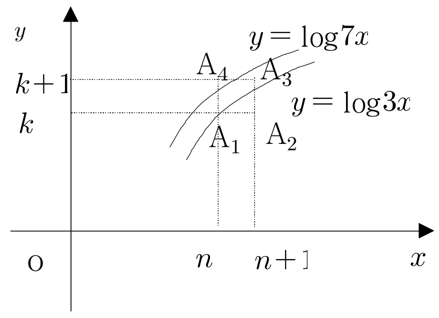
1) 79

두 자연수 n, k에 대하여 아래 그림과 같이 네 꼭짓점 $\mathrm{A}_1(n, k)$, $\mathrm{A}_2(n+1, k)$, $\mathrm{A}_3(n+1, k+1)$, $\mathrm{A}_4(n, k+1)$으로 하는 정사각형이 두 함수 $y=\log 7x$, $y=\log 3x$와 모두 만나기 위해서는

$\log 7n \le k+1$ 이고 $\log 3(n+1) \ge k$ 이어야 한다.

즉, $n \le \dfrac{10^{k+1}}{7}$ 이고 $n \ge \dfrac{10^k}{3}-1$

$\therefore\ \dfrac{10^k}{3}-1 \le n \le \dfrac{10^{k+1}}{7}$



(ⅰ) $k=1$일 때,

$\dfrac{10}{3}-1 \le n \le \dfrac{100}{7}$

그러므로 자연수 n은 3, 4, $\cdots$, 14로 12개다.

(ⅱ) $k=2$일 때,

$\dfrac{100}{3}-1 \le n \le \dfrac{1000}{7}$

그리고 꼭짓점의 x좌표는 모두 100이하이므로 $n+1 \le 100$이다.

그러므로 99이하의 자연수 n은 33, 34, $\cdots$, 99로 67개다.

따라서 모든 정사각형의 개수는

$12+67=79$

3) 432

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)$가 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$g(x)=\displaystyle\int_t^x f(s)ds$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)-g(a)$는 미분가능하다.

$g(x) \ge g(a)$일 때, $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)$

$g(x) < g(a)$일 때, $|g(x)-g(a)|=-\{g(x)-g(a)\}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$은 $g(x)-g(a) \ne 0$인 모든 x에서 미분가능하다.

$g(x)-g(a)=0$를 만족시키는 x의 값을 k라 하면,

$g(k)=g(a)$이므로

$\dfrac{|g(x)-g(a)|-|g(k)-g(a)|}{x-k}=\dfrac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

(ⅰ) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 같을 때

$\displaystyle\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(ⅱ) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 다르고 $f(k)=0$일 때

$\displaystyle\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(ⅲ) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 다르고 $f(k) \ne 0$일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k} \ne \lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이므로

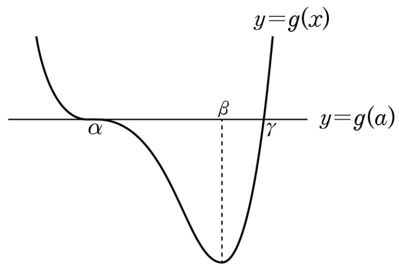
$g(x)-g(a)=0$, $g'(x)=f(x) \ne 0$

인 x가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

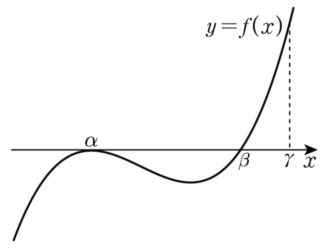
그러므로 사차함수 $y=g(x)$는 단 하나의 극솟값을 갖고 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=g(a)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g'(x)=0$인 방정식 $g(x)-g(a)=0$의 근을 α, 함수 $g(x)$가 극솟값을 가질 때의 x의 값을 β라 하면 α, β의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $\alpha<\beta$인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\beta<\gamma$)



함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면



$g(\alpha)=g(\gamma)=g(a)$이므로 $\alpha=a$ 또는 $\gamma=a$

(가)에서 $f'(a)=0$이므로 $\alpha=a$이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$이다.

$h(t)=g(a)=\displaystyle\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds$에서

$h'(t)=-f(t)$

함수 $h(t)$가 $t=2$에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지므로

$h'(2)=-f(2)=0$

따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$이다.

$a=2$이면 $h(2)=\displaystyle\int_2^2 f(t)dt=0 \ne 27$ 이므로 $a \ne 2$

$\beta=2$이면

$h(3)=\displaystyle\int_3^a f(s)ds=0$이고,

$h(2)=\displaystyle\int_2^a f(s)ds=27$이므로

$h(2)-h(3)=\displaystyle\int_2^3 f(s)ds=27$이다.

$\displaystyle\int_2^3 f(s)ds=\int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$

$=\displaystyle\int_2^3 4\{s^3-2(a+1)s^2+(a^2+4a)s-2a^2\}ds$

$=\left[s^4-\dfrac{8}{3}(a+1)s^3+2(a^2+4a)s^2-8a^2s\right]_2^3$

$=65-\dfrac{152}{3}(a+1)+10(a^2+4a)-8a^2$

$=2a^2-\dfrac{32}{3}a+\dfrac{43}{3}=27$

이므로

$3a^2-16a-19=0$

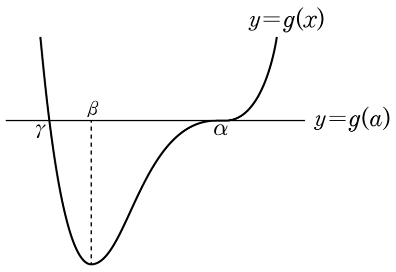
$(a+1)(3a-19)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\dfrac{19}{3}$

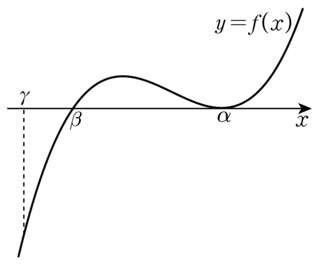
$a<2$ 이므로 $a=-1$ 이다.

$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha>\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\gamma<\beta$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$\alpha<\beta$ 인 경우와 마찬가지로 $\beta=2$ 이다.

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$a\neq3$ 이면 $h(3)=\int_3^a f(s)ds\neq0$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=4(x-3)^2(x-2)$이고

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=\int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds=\frac{1}{3}$

$h(2)\neq27$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 이다.

$f(5)=4\times36\times3=432$

4) ④

[출제의도] 엇각

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\angle\mathrm{QOR})$이다. 그런데 삼각형 QRP와 삼각형 P′RO는 닮았고 닮음비는 $2:1$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{OR}}\times2=\overline{\mathrm{PR}}$이고 $\overline{\mathrm{OR}}+\overline{\mathrm{PR}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}$이다. 한편

$\angle\mathrm{QOR}=\pi-2\times\angle\mathrm{POP'}=\pi-2\theta$이고 $\overline{\mathrm{OQ}}=1$이므로,

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{6}\sin2\theta$이다. 계산하면

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{3}$이다.

5) 272

$x=e^{tx}\Rightarrow\ln x=tx\Rightarrow\frac{\ln x}{x}=t$로 상황을 등치하여 보면 편하다.

$g(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하고, $\frac{\ln x}{x}=t$의 서로 다른 두 실근을 각각

$h_1(t)$, $h_2(t)$라 하자. (단, $h_1(t)<h_2(t)$)

실제로 점 A, B의 좌표 또한 $\mathrm{A}(h_1(t),h_1(t))$, $\mathrm{B}(h_2(t),h_2(t))$이 된다.

한편 $t=\alpha$일 때, $2h_1(\alpha)=h_2(\alpha)$가 성립하는데 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$에서

$g(h_1(t))=t$, $g(h_2(t))=t$에 각각 $t=\alpha$를 대입하여 연립하면

$$\frac{\ln h_1(\alpha)}{h_1(\alpha)}=\frac{\ln h_2(\alpha)}{h_2(\alpha)}$$

$$=\frac{\ln2h_1(\alpha)}{2h_1(\alpha)}$$ 이므로, $\{h_1(\alpha)\}^2=2h_1(\alpha)$에서

$h_1(\alpha)=2,\ h_2(\alpha)=4$를 얻는다.

한편, $f(t)=\sqrt{2}\left(h_2(t)-h_1(t)\right)$에 대하여 구하고자 하는

$f'(\alpha)=\sqrt{2}\left(h_2{}'(\alpha)-h_1{}'(\alpha)\right)$인데, $g(h_1(t))=t,\ g(h_2(t))=t$의 양변을

t에 대하여 미분하고 $t=\alpha$를 대입하여

$g'(h_1(\alpha))\times h_1{}'(\alpha)=1,\ g'(h_2(\alpha))\times h_2{}'(\alpha)=1$를 얻는다.

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$와 $h_1(\alpha)=2,\ h_2(\alpha)=4$를 이용하면

$\dfrac{1-\ln 2}{4}\times h_1{}'(\alpha)=1,\ \dfrac{1-2\ln 2}{16}\times h_2{}'(\alpha)=1$이므로

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \sqrt{2}\left(h_2{}'(\alpha)-h_1{}'(\alpha)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{16}{1-2\ln 2}+\frac{-4}{1-\ln 2}\right) \end{aligned}$$

이다. $a=16,\ b=-4$이므로 $a^2+b^2=272$이다.