제 2 교시

2022학년도 미니 파이널 6회

수학 영역

홀수형

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

찾아들길

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

제 2 교시

수학 영역

1. 세 상수 a, b, c $(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}-ax^2+6ex+b & (x<c)\\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge c)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\dfrac{1}{2e}\right)$의 값은?

[4점][2021년 사관학교 가20]

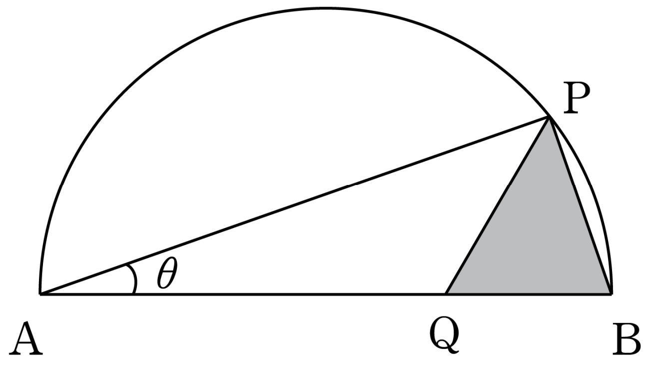
① $-4\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ③ $-3\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$
④ $-3\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ⑤ $-2\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$

2. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-m)$의 그래프와 한 점에서 만나고, 직선 $y=n$이 함수 $y=\left|2^{-x}-m\right|$의 그래프와 두 점에서 만나도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합을 a_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=5}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은?

[5점][2021년 경찰대 17]

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{1}{20}$ ③ $\dfrac{1}{30}$ ④ $\dfrac{1}{40}$ ⑤ $\dfrac{1}{50}$

3. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 갖는 반원이 있다. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$가 되도록 하는 부채꼴 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PQB} = \frac{\pi}{3}$가 되도록 선분 AB위에 점 Q를 잡는다. 삼각형 PQB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

4. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x) = mx$의 실근의 개수를 $g(m)$이라 하자. $0 \le x < 2$일 때, $f(x) = e^x$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) = f(4-x)$
(나) $g(m)$은 세 점에서만 불연속이다.

이때, 가능한 $f(2)$ 값들의 합은?

① $e^2 - 2e - \frac{1}{2}$ ② $e^2 - 2e + \frac{1}{2}$ ③ $e^2 + 2e - \frac{1}{2}$
④ $e^2 + 2e + \frac{1}{2}$ ⑤ $e^2 + 2e + 1$

5. 이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
> (나) $n \le x < n+1$일 때,
> $$g(x)=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$$
> 이다. (단, n은 자연수이다.)

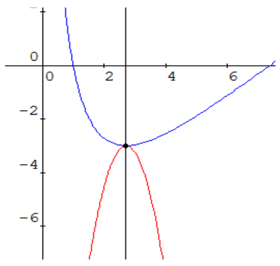
어떤 자연수 $k\,(k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\int_0^n h(x)\,dx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-n^2\right)=\dfrac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오.

[4점][2018학년도 수능 나30]

1) ③

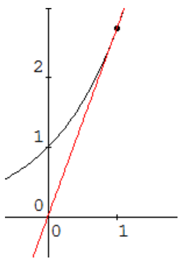


$-ax^2+6ex+b$는 $x=\dfrac{3e}{a}$에서

$a(\ln x)^2-6\ln x$는 $\ln x=\dfrac{3}{a}$에서

증감이 변한다. 따라서 $e^{\frac{3}{a}} \le c \le \dfrac{3e}{a}$

그런데 $y=e^x$와 $y=ex$의 그래프는 그림과 같이 $e^x \ge ex$이고 등호는 $x=1$일 때 성립한다.



그러므로 $\dfrac{3}{a}=1,\ c=e$ 이다.

$$f(x)=\begin{cases} -3x^2+6ex+b & (x<e) \\ 3(\ln x)^2-6\ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

$f(x)$는 연속이므로

$-3e^2+6e^2+b=3-6,\ b=-3-3e^2$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{2e}\right)=-3\left(\frac{1}{4e^2}\right)+\frac{6e}{2e}-3-3e^2$$
$$=-3\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$$

2) ①

로그함수의 정의역 및 점근선으로부터 $\dfrac{m}{2}<n$

지수함수의 점근선으로부터 $n<m$

따라서 $n<m<2n$ 이므로

$$a_n=(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-1)=\frac{3}{2}n(n-1)$$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=5}^{10}\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}$$

3) ②

[출제의도] 특수각

부채꼴의 중심을 O라하고, P에서 선분 QB에 내린 수선의발 H이라하자. 삼각형 OPH에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sin2\theta$, $\overline{\mathrm{OH}}=\cos2\theta$

삼각형 PHQ에 대하여, 변의 길이 비 $1:\sqrt{3}:2$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{2\sin2\theta}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{QH}}=\dfrac{\sin2\theta}{\sqrt{3}}$

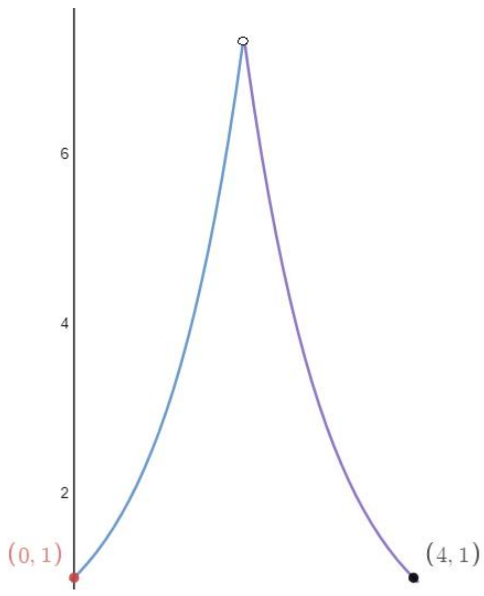
$$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{QH}}=\cos2\theta-\frac{\sin2\theta}{\sqrt{3}}.$$

$$\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OQ}}=1-\left(\cos2\theta-\frac{\sin2\theta}{\sqrt{3}}\right)$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QB}}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2\sin2\theta}{\sqrt{3}}\times\left(1-\cos2\theta+\frac{\sin2\theta}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin2\theta}{2}\left(1-\cos2\theta+\frac{\sin2\theta}{\sqrt{3}}\right)}{\theta^2}=1\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4) ④



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 만나는 점의 개수가

변할 수 있는 의심지점은 크게 3종류가 있다.

직선 $y=mx$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때(극값을 지날 때)

직선 $y=mx$가 곡선 $y=f(x)$의 불연속점을 지날 때

직선 $y=mx$가 곡선 $y=f(x)$의 점근선 일 때

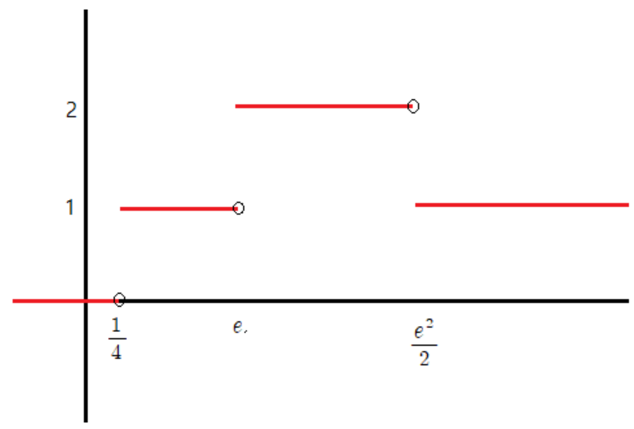
$f(2)$를 정의하지 않은 상태에서 원점을 지나는 직선 $y=mx$를

m을 서서히 증가시켜보며 $g(m)$을 관찰해보자.

1. $(4,1)$을 지나는 순간 $\left(m=\dfrac{1}{4}\right)$

2. $y=e^x$에 접하는 순간 $(m=e)$

3. $(2,e^2)$을 지나는 순간 에 유의해야 함을 알 수 있다. $\left(m=\dfrac{e^2}{2}\right)$



위와 같이 $g(m)$은 이미 세 점에서 불연속이다.

$(2, f(2))$가 정의가 되는 순간, $m=\dfrac{f(2)}{2}$일 때,

불연속점이 생성된다. 따라서 불연속점이 여전히 3개로 동일하기 위해서는

$\dfrac{f(2)}{2}$의 값이 기존의 불연속점인 $\dfrac{1}{4}, e, \dfrac{e^2}{2}$,

이어야 한다.

$f(2)$값들의 합은 $e^2+2e+\dfrac{1}{2}$이 된다.

5) 9

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 정하고 극한값을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

직선 $y=x$와 x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\dfrac{n^2}{2}$이다.

$2\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{n^2}{2}\right)=\dfrac{241}{768}$이므로

$$F(x)=h(x)-x=\begin{cases} g(x)-x & (0\le x<5,\ x\ge k) \\ x-g(x) & (5\le x<k) \end{cases}$$

로 놓으면

$2\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^n F(x)\,dx=\dfrac{241}{768}$이다.

$n\le x<n+1$일 때

$$g(x)-x=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{3}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2-(x-n)\right\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(1+n-x)$$

$$=-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))$$

이므로

$$\int_n^{n+1}\{g(x)-x\}\,dx$$

$$=\int_n^{n+1}\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}x(x-1)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 x(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{1}{6}\quad\cdots\cdots ㉠$$

한편,

$$\int_0^n F(x)\,dx$$

$$=\int_0^1(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_4^5(x-g(x))\,dx$$

$$+\int_5^6(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_{k-1}^k(x-g(x))\,dx$$

$$+\int_k^{k+1}(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_{n-1}^n(x-g(x))\,dx$$

이때, ㉠은 $n=0$일 때도 성립하므로 ㉠에서

$$2\int_0^n F(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}-\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$+\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{2}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$이므로

$$2\lim_{n\to\infty}\int_0^n F(x)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

$$=\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}$$

즉, $\dfrac{15}{48}+\dfrac{1}{48}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-5}=\dfrac{241}{768}$에서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-5}=\dfrac{1}{16}$이므로

$k-5=4$에서

$k=9$