제 2 교시

2022학년도 미니 파이널 5회

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

행운이

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

2022학년도 미니파이널 5회

제 2 교시

수학 영역

1. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(e^x) = x + f(x)e^{-x}$
(나) $\int_1^e f(x)dx = 0$

$\int_{\ln 2}^{e^2} f(x)dx = e^2 + a\ln 2 + b$일 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

2. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2} = a_n - 4$ $(a = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6} = a_n$ 이다.

$\sum_{k=1}^{50} a_k = 258$ 일 때, a_2의 값을 구하시오.

[4점][2013년 6월 나28]

3. 자연수 n에 대하여 $0 \le x < 2^{n+1}$일 때, 부등식

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \le -\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 7월 나27]

4. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서만 만난다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2020년 7월 나20]

< 보 기 >

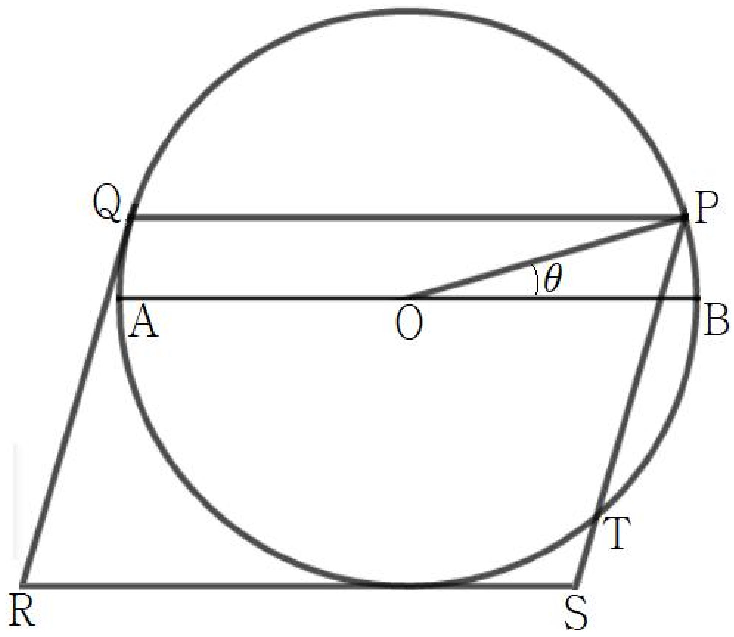
ㄱ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다.

ㄴ. $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}\,dt \ge 0$이면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx=2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 호 AB 위에 점 P에 대하여 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 원과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q에서의 접선 위에 점 R과 직선 QR과 평행하고 점 P를 지나는 직선 위의 점 S를 직선 RS가 원에 접하고 사각형 PQRS가 평행사변형이 되도록 잡는다. $\angle \mathrm{POB} = \theta$일 때, 직선 PS가 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점 T에 대하여 선분 ST의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{f(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)^2}$의 값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)



1) ②

$f(e^x) = x + f(x)e^{-x}$에서 양변에 e^x를 곱하고 이항하면

$e^x f(e^x) - f(x) = xe^x \Leftrightarrow \left(\int_x^{e^x} f(t)dt\right)' = \{(x-1)e^x\}'$

양변을 부정적분하면, $\int_x^{e^x} f(t)dt = (x-1)e^x + C$

$\int_1^e f(x)dx = 0$이므로 $C = 0$을 얻는다.

$\int_x^{e^x} f(t)dt = (x-1)e^x$에 $x = \ln 2$, $x = 2$를 대입하면

$\int_{\ln 2}^2 f(t)dt = (\ln 2 - 1) \times 2$, $\int_2^{e^2} f(t)dt = e^2$이므로

$\int_{\ln 2}^{e^2} f(x)dx = e^2 + 2\ln 2 - 2$를 얻는다.

2) 11

(가) $a_{n+2} = a_n - 4$, $a_2 = x$ 라 하면

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$ 은 차례로 $7, x, 3, x-4, -1, x-8$

의 값을 가지는 주기가 6인 주기 함수가 된다.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3x - 3$

조건 $\sum_{k=1}^{50} a_k = 8(3x-3) + 7 + x = 258$

$a_2 = x = 11$

3) 169

$0 \le x < 2^{n+1}$일 때, $0 \le \frac{\pi}{2^n}x < 2\pi$이므로

부등식 $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \le -\frac{1}{2}$ 의 해는

$\frac{2}{3}\pi \le \frac{\pi}{2^n}x \le \frac{4}{3}\pi$, 즉 $\frac{2^{n+1}}{3} \le x \le \frac{2^{n+2}}{3}$

a_n은 $\frac{2^{n+1}}{3} \le x \le \frac{2^{n+2}}{3}$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의

개수이고, $\frac{2^{n+2}}{3}$은 자연수가 아니므로

$\sum_{n=1}^{7} a_n$은 $\frac{2^2}{3} \le x \le \frac{2^9}{3}$인 자연수의 개수와 같다.

$\frac{2^2}{3} = 1.333\cdots$, $\frac{2^9}{3} = 170.666\cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{7} a_n = 170 - 1 = 169$

[참고]

$n = 1$일 때, $\frac{2^2}{3} \le x \le \frac{2^3}{3}$인 자연수 x는 2이므로 $a_1 = 1$

$n = 2$일 때, $\frac{2^3}{3} \le x \le \frac{2^4}{3}$인 자연수 x는 3, 4, 5이므로 $a_2 = 3$

$n = 3$일 때, $\frac{2^4}{3} \le x \le \frac{2^5}{3}$인 자연수 x는 6, 7, 8, 9, 10이므로

$a_3 = 5$

$n = 4$일 때, $\frac{2^5}{3} \le x \le \frac{2^6}{3}$인 자연수 x는 11, 12, 13, $\cdots$, 21이므로

$a_4 = 11$

$n = 5$일 때, $\frac{2^6}{3} \le x \le \frac{2^7}{3}$인 자연수 x는 22, 23, 24, $\cdots$, 42이므로

$a_5 = 21$

$n = 6$일 때, $\frac{2^7}{3} \le x \le \frac{2^8}{3}$인 자연수 x는 43, 44, 45, $\cdots$, 85이므로

$a_6 = 43$

$n = 7$일 때, $\frac{2^8}{3} \le x \le \frac{2^9}{3}$인 자연수 x는 86, 87, 88, $\cdots$, 170이므로

$a_7 = 85$

4) ⑤

ㄱ. $f'(0) = g'(0) = 0$

$x < 0$에서 $f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$

$0 < x < 4$에서 $f'(x) < 0$, $g'(x) < 0$

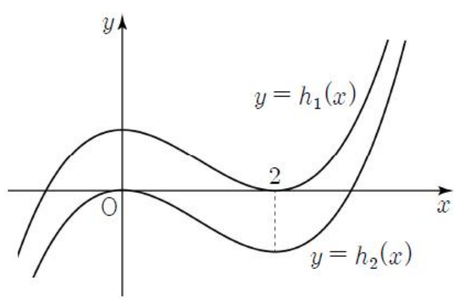
이므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x = 0$에서 극대이다. (참)

ㄴ. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + C_1$, $g(x) = -x^2 + C_2$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$h(x) = f(x) - g(x)$라 하면

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = x(x-2)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 삼차함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우이므로 삼차함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음 $y = h_1(x)$와 $y = h_2(x)$의 두 가지이다.



$h(x) = h_1(x)$일 때, $h_1(2) = 0$이므로 $h_1(0) \times h_1(2) = 0$

$h(x) = h_2(x)$일 때, $h_2(0) = 0$이므로

$h_2(0) \times h_2(2) = 0$

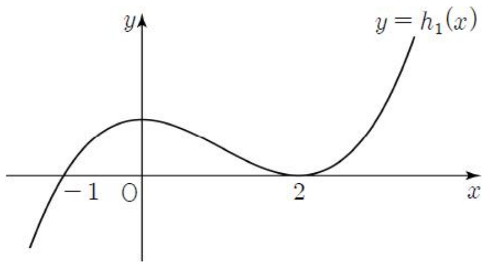
$\{f(0) - g(0)\} \times \{f(2) - g(2)\} = 0$ (참)

ㄷ. $\int_{-1}^{0} h_2(t)dt < 0$이므로 함수 $h_2(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x} \{f(t) - g(t)\}dt \ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$가 아니다.

$h_1(2) = -\frac{4}{3} + C_1 - C_2 = 0$, $C_1 - C_2 = \frac{4}{3}$

$h_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$



$x<-1$일 때, $h_1(x)<0$이므로 $\int_{-1}^{x} h_1(t)dt>0$

$x \geq -1$일 때, $h_1(x) \geq 0$이므로 $\int_{-1}^{x} h_1(t)dt \geq 0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x} \{f(t)-g(t)\}dt \geq 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$는 함수 $h_1(x)$이다.

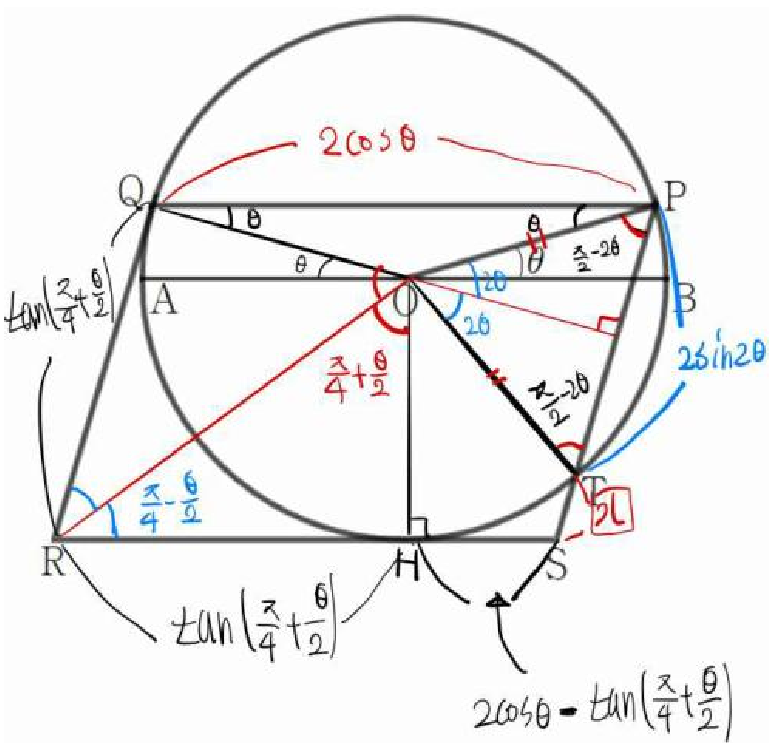
$\int_{-1}^{1} \{f(x)-g(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}\right)dx = 2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

5) 27

[출제의도] 할선정리

방법은 매우 많습니다.
대표적인 것은 2가지입니다.



(1).
선분 RS와 원이만나는 접점의 좌표를 M라 하면,
$\overline{SM}^2 = \overline{ST} \times \overline{SP}$ (할선정리) (현재 교과 외라고 함)

(2).
평행사변형의 각 관계를 이용하면

$\overline{ST} = \overline{SP} - \overline{PT}$에서 $\overline{SP} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$,

이등변 삼각형 OPR에서 $\overline{PT} = 2\sin 2\theta$를 얻는다.
기타 등등