제 2 교시

2022학년도 미니 파이널 4회

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

무한한

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

제 2 교시

수학 영역

1. x에 대한 부등식

$$(3^{x+2}-1)(3^{x-p}-1) \leq 0$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 20일 때, 자연수 p의 값을 구하시오.

[4점][2014년 4월 나26]

2. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

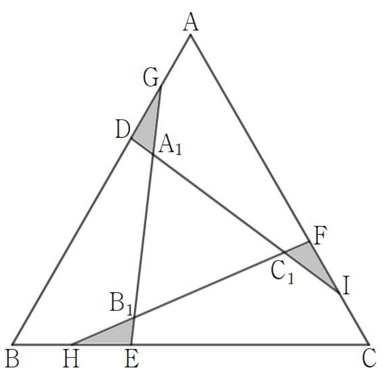
(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_7 = 2$일 때, a_{25}의 값은?

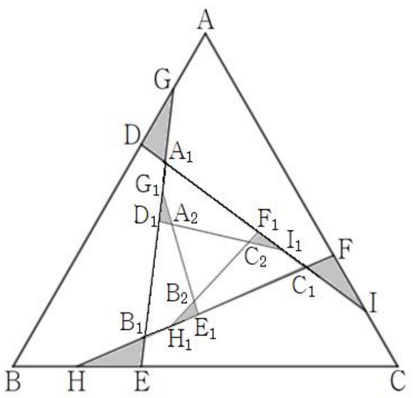
[4점][2021학년도 수능 나21]

① 78 ② 80 ③ 82 ④ 84 ⑤ 86

3. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC에 대하여 선분 AB의 삼등분점 중 A와 가까운 점을 D, 선분 BC의 삼등분점 중 B와 가까운 점을 E, 선분 CA의 삼등분점 중 C와 가까운 점을 F라고 하고 선분 AD, BE, CF의 중점을 각각 G, H, I라 하자. 선분 DI와 선분 GE가 만나는 점을 A_1, 선분 GE와 선분 HF가 만나는 점을 B_1, 선분 HF와 선분 ID가 만나는 점을 C_1이라 하고 삼각형 A_1DG, 삼각형 B_1EH, 삼각형 C_1FI를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 삼각형 $A_1B_1C_1$에 대하여 위와 마찬가지로 차례대로 점 $D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1$를 표시하고 선분 D_1I_1과 선분 G_1E_1이 만나는 점을 A_2, 선분 G_1E_1과 선분 H_1F_1이 만나는 점을 B_2, 선분 H_1F_1과 선분 I_1D_1이 만나는 점을 C_2이라 하고 삼각형 $A_2D_1G_1$, 삼각형 $B_2E_1H_1$, 삼각형 $C_2F_1I_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_2이라 하자.
위와 같은 과정을 반복하여 얻은 n번째 그림 R_n에 색칠된 영역의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



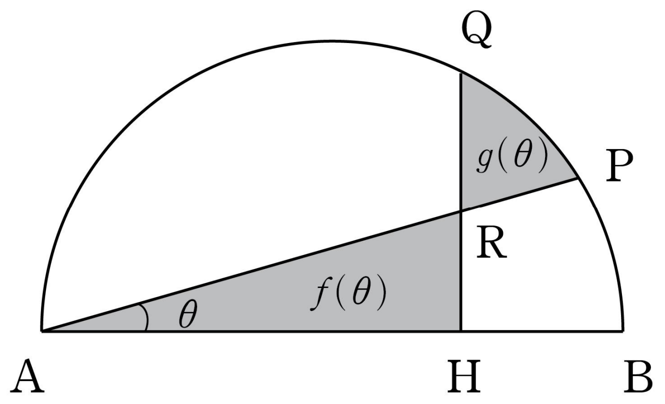
R_1



R_2

① $\frac{5\sqrt{3}}{16}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{7\sqrt{3}}{16}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{16}$

4. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. $\angle PAB=\theta$가 되도록 하는 호 AB 위에 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{PQ}$가 되도록 호 AP위에 점 Q를 잡는다. 점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 QH와 선분 AP의 교점을 R이라 하자. 삼각형 AHR의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 QR, 선분 RP, 호 QP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

5. 함수 $f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.
$\left|\lim_{t\to a+} h(t) - \lim_{t\to a-} h(t)\right|=2$를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.
[4점][2020년 10월 나30]

1) 17

[출제의도] 지수부등식을 활용하여 추론하기

주어진 부등식의 양변에 $3^{-2}\times 3^{p}$을 곱하면
$(3^{x}-3^{-2})(3^{x}-3^{p})\le 0$
p가 자연수이므로 $3^{-2}\le 3^{x}\le 3^{p}$
$\therefore\ -2\le x\le p$
$-2\le x\le p$를 만족시키는 정수 x는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ p$
이때, 정수 x의 개수는 $p+3=20$
따라서 $p=17$

2) ③

$a_2=a_2\times a_1-1$
$a_7=a_2\times a_3-2$
$=a_2\times(a_2\times a_1-2)-2$
$=a_2\times(a_2-1-2)-2$
$=(a_2)^2-3a_2-2=2$
$(a_2)^2-3a_2-4=0$
$a_2>0$이므로 $a_2=4$이고 $a_1=\frac{3}{4}$
$a_{25}=4a_{12}-2$
$=4(4a_6+1)-2=16a_6+2$
$=16(4a_3+1)+2$
$=64a_3+18$
$=64(4a_1-2)+18=82$

3) ④

삼각형 BEG와 삼각형 $\mathrm{A_1DG}$는 닮음인데 이때 두 삼각형의

길이 비 $5:2:\sqrt{19}$에 의해

$S_1=3\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{19}}\times\frac{5}{\sqrt{19}}\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{15\sqrt{3}}{38}$ 이고,

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{A_1B_1}}=6:\frac{12}{\sqrt{19}}$이므로, 길이 비 $\frac{2}{\sqrt{19}}$에서

공비 $\frac{4}{19}$를 얻는다. $\dfrac{\frac{15\sqrt{3}}{38}}{1-\frac{4}{19}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) ④

선분RP, 선분 RH, 선분 HB, 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(f(\theta)+h(\theta))-(g(\theta)+h(\theta))}{\theta}$

반원의 중심 O에 대하여

$f(\theta)+h(\theta)=\triangle\mathrm{AOP}$의넓이$+$부채꼴$OPB$의넓이

$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta$ 이때,

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 $\angle\mathrm{POB}=\angle\mathrm{POQ}=2\theta$,

$\angle\mathrm{QOB}=4\theta$이다.

$g(\theta)+h(\theta)=$부채꼴OBQ의넓이$-\triangle OHQ$의넓이

$=\frac{1}{2}\times 1^2\times 4\theta-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}=2\theta-\frac{1}{2}\cos 4\theta\times\sin 4\theta$

$=2\theta-\frac{1}{4}sin8\theta$ $\therefore$ $\lim_{\theta\to 0+}\frac{(f(\theta)+h(\theta))-(g(\theta)+h(\theta))}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\left(\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right)-\left(2\theta-\frac{1}{4}sin8\theta\right)}{\theta}$

$=\left(\frac{2}{2}+1\right)-\left(2-\frac{8}{4}\right)=2$

5) 80

[출제의도] 함수의 연속성과 적분의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases}-3x^3+3x^2 & (x<1)\\ 2x^2-8x+6 & (x\ge 1)\end{cases}$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\ge 1)\end{cases}$ (C_1, C_2 는 적분상수)

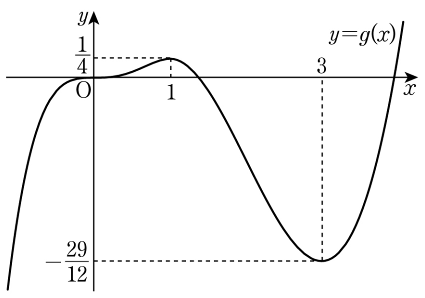
$g'(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$g(0)=0$ 에서 $C_1=0$ 이고 $-\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{2}{3}-4+6+C_2$

에서 $C_2=-\dfrac{29}{12}$

$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12} & (x\ge 1)\end{cases}$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$ 를 구하면

$h(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-\dfrac{29}{12} \text{ 또는 } t>\dfrac{1}{4}\right)\\ 2 & \left(t=-\dfrac{29}{12} \text{ 또는 } t=\dfrac{1}{4}\right)\\ 3 & \left(-\dfrac{29}{12}<t<\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $\dfrac{1}{4}$ 과 $-\dfrac{29}{12}$ 뿐이다.

그러므로 $S=\left|\dfrac{1}{4}\right|+\left|-\dfrac{29}{12}\right|=\dfrac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\dfrac{8}{3}=80$

[참고] $g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$ 는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $x<1$일 때,

$g(x)=\int_0^x (t-1)(-3t^2)dt=-\dfrac{3}{4}x^4+x^3$

(ii) $x\ge 1$일 때,

$g(x)=\int_0^1 (t-1)(-3t^2)dt+\int_1^x 2(t-1)(t-3)dt$

$=\dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12}$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.