제 2 교시

2022학년도 미니 파이널 3회

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

당신에게

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ······························ 1~2쪽

○ 선택과목

미적분 ······························ 3쪽

기하 ······························ 3쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

제 2 교시

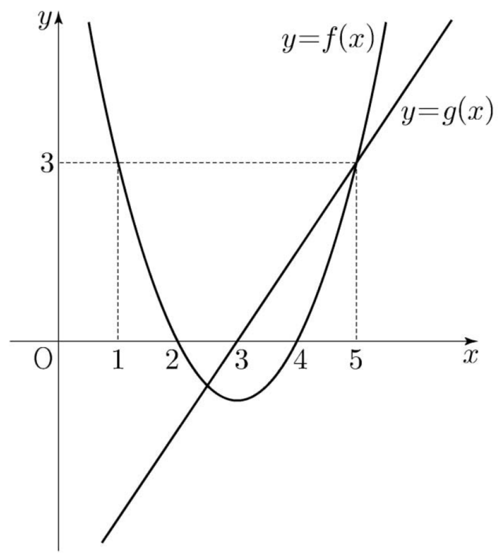
수학 영역

1. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

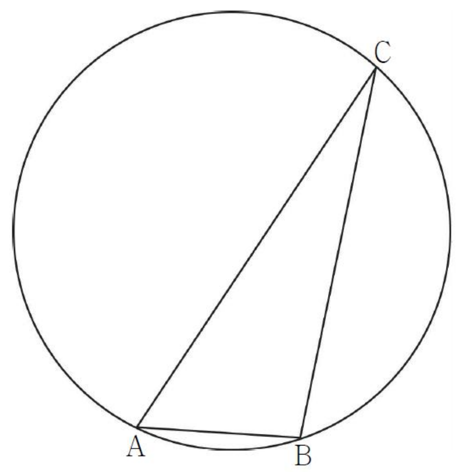
[4점][2019학년도 수능 가14]



① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

2. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.)

[4점][2020년 4월 가19]



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

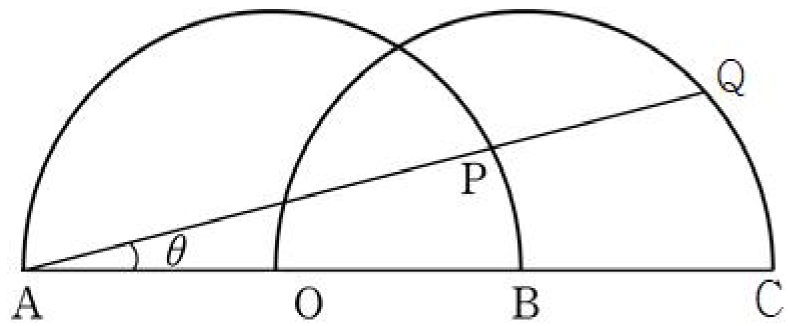
(가) $f(x) \geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)\,dx$의 값은?

[4점][2020년 9월 나20]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

4. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 S_1에 대하여 점 B를 중심으로 하고 직선 AB위에 점 O, C를 지름의 양 끝 으로 하는 반원을 S_2라 하자. 호 AB위에 점 P에 대하여 직선 PA가 반원 S_2와 만나는 두 점 중 S_1의 외부에 있는 점을 Q라 하고, $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 일때, 선분 AQ의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{3-l(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

5. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 아래의 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$에서 $f(x)=a\sin^2 x-\cos x+b$이다. $\left(단, \lvert a\rvert>\frac{1}{2}\right)$
(나) $x>0$에서 $f(x)\times f(-x)=1$
(다) $\lim_{x\to 0} f(x)<f(0)$

함수 $g(t)$를 $f(x)=t$의 실근의 개수라 할 때, $g(t)$는 두 점에서만 불연속이다. $12\left(a^2+b^2+f(0)\right)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

1) ④

[출제의도] 그래프를 이용하여 지수부등식의 해를 구할 수 있는가?

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

$f(x)g(x) \leq 3g(x)$

$\{f(x)-3\}g(x) \leq 0$

(i) $f(x)-3 \geq 0$, $g(x) \leq 0$ 인 경우: $x \leq 1$

(ii) $f(x)-3 \leq 0$, $g(x) \geq 0$ 인 경우: $3 \leq x \leq 5$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수는 1, 3, 4, 5 이므로 구하는 합은

$1+3+4+5=13$

2) ①

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이므로

$R^2\pi = \frac{49}{3}\pi$, $R = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2\times\frac{7}{3}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 7$

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}} = a$라 하면 코사인법칙에 의해

$7^2 = a^2+3^2-2\times a\times 3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$a^2 = 3a-40 = 0$, $(a-8)(a+5) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 8$

$\overline{\mathrm{AC}} = 8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

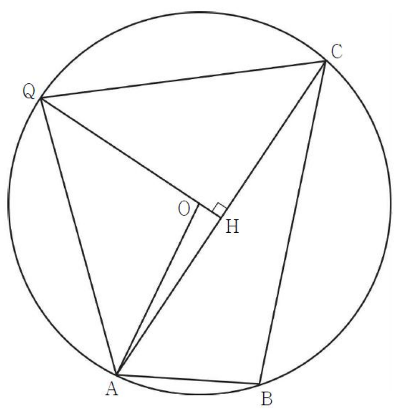
$\cos(\angle\mathrm{CBA}) = \frac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7} = -\frac{1}{7}$

이므로 $\frac{\pi}{2} < \angle\mathrm{CBA} < \pi$가 되어 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면

점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$\overline{\mathrm{OH}} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 4^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{QH}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times8\times\frac{8}{3}\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{3}$

3) ③

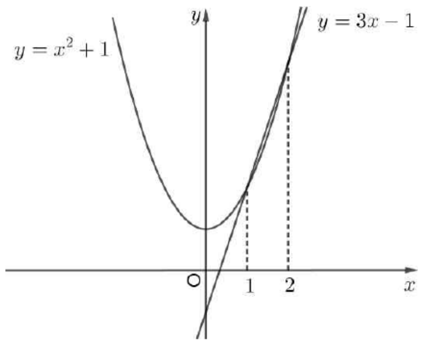
$x^2+3x = (x^2+1)+(3x-1)$

이고 두 함수 $y = x^2+1$, $y = 3x-1$의 교점의 x좌표는

$x^2+1 = 3x-1$, $x^2-3x+2 = 0$, $(x-1)(x-2) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = 2$

이므로 두 함수의 그래프는 그림과 같다.



즉, $x \leqq 1$ 또는 $x \geqq 2$일 때 $x^2+1 \geqq 3x-1$

$1 < x < 2$일 때 $x^2+1 < 3x-1$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & (x \leqq 1) \\ 3x-1 & (1 < x < 2) \\ x^2+1 & (x \geqq 2) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x-1 & (x \leqq 1) \\ x^2+1 & (1 < x < 2) \\ 3x-1 & (x \geqq 2) \end{cases}$$

따라서

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 (3x-1)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2$$

$$= \frac{4}{3}+\left(4-\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{6}$$

4) ⑤

삼각형 PBQ에서 피타고라스를 적절히 사용하면,

$l(\theta) = 2\cos\theta+\sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이며, 구하려는 극한값은

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{3-l(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2-2\cos\theta}{\theta^2}+\frac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}+\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}+\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$

$= 1+2$

$= 3$

5) 111

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가

변할 수 있는 의심지점은 크게 3종류가 있다.

직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때(극값을 지날 때)

직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$의 불연속점을 지날 때

직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$의 점근선 일 때

상수함수와 만나는 실근의 개수 문항은 극값에 유의하여 그래프를 그려주는 게 중요하다.

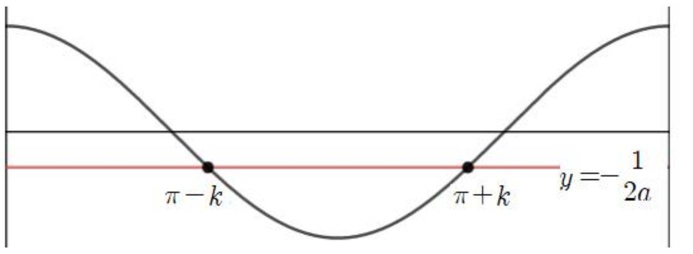
$f(x)=a\sin^2 x-\cos x+b$를 미분하면

$f'(x)=2a\sin x\cos x+\sin x$ 이므로

$\quad =\sin x(2a\cos x+1)$

$x=\pi, 2\pi$와 $\cos x=-\dfrac{1}{2a}$를 만족시키는 x값에 유의해야 한다.

$|a|>\dfrac{1}{2}$이므로 $\cos x=-\dfrac{1}{2a}$의 실근은 2개 존재 한다.



이 x값들을 $x=\pi-k, \pi+k$라고 하자.

$f(\pi)=b+1$,

$f(\pi-k)=f(\pi+k)=a\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2a}\right)^2\right\}+\dfrac{1}{2a}+b$

$\quad =a+\dfrac{1}{4a}+b$

그런데 이것으로만 $f(x)$를 그리기엔 a, b에 대한 정보가 부족하다.

(나)조건식에 $\lim\limits_{x\to0+}$을 하면 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)\times\lim\limits_{x\to0-}f(x)=1$

그런데 (다)조건식에 있는 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$를 통해 $x=0$에서

$f(x)$의 극한값이 존재하고 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)$임을 알 수 있다.

$\left(\lim\limits_{x\to0+}f(x)\right)^2=1,\ \lim\limits_{x\to0+}f(x)=-1$ 또는 1

그런데 $\lim\limits_{x\to0+}a\sin^2 x-\cos x+b=-1$이라면

$b=0$이 되는데 그렇게 되면 $f(\pi)=1$가 되고 열린구간 $(0, \pi)$에서 $f(c)=0$을 만족시키는 c가 존재하게 돼서 (나)조건에 위배된다.

그러므로 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$이고

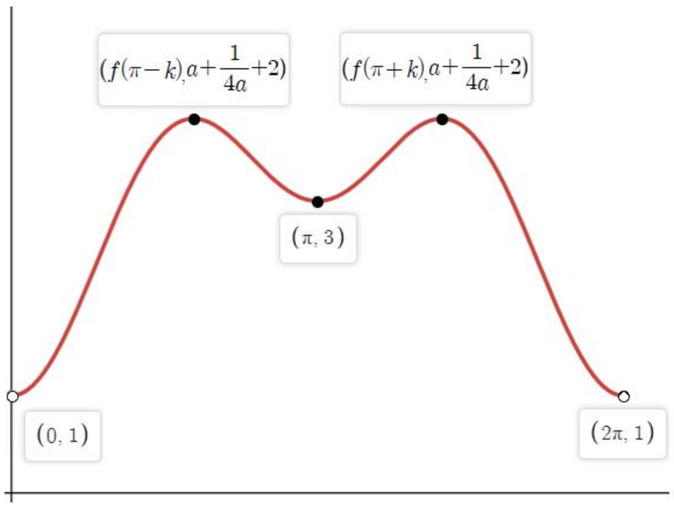
$\lim\limits_{x\to0+}a\sin^2 x-\cos x+b=1$에 대하여 $b=2$ 를 얻는다.

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1,\ f(\pi)=3,\ \lim\limits_{x\to2\pi-}f(x)=1$

$f(\pi-k)=f(\pi+k)=a\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2a}\right)^2\right\}+\dfrac{1}{2a}+b$

$\quad =a+\dfrac{1}{4a}+2$

에 유의하여 $x>0$에서 $f(x)$의 대략적인 그래프를 그리자.



$x=\pi-k, \pi+k$에서 극대를 갖는지 극소를 갖는지는 알 수 없으나 어쨌든 극값을 갖는다.

이렇게 $x>0$에서 3개의 극값과 실근의 개수에 영향을 줄 수 있는 구간의 끝 값 2개를 갖는데

$f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$이므로 $x<0$에서는 $x>0$에서

그려진 그래프의 역수형태가 그려지는데

함숫값이 양수인 함수를 역수취할 때,

증가하다가 감소하는 극댓값이 역수를 취하면

감소하다가 증가하는 극솟값이 된다.

감소하다가 증가하는 극솟값이 역수를 취하면

증가하다가 감소하는 극댓값이 된다.

이를 통해서 $x<0$에서의 그래프 개형역시

개의 극값과 실근의 개수에 영향을 줄 수 있는 구간의 끝 값

$x=-2\pi$를 갖는다.

극값이 6개가 되는데 $g(t)$의 불연속점이

2개이기 위해서는 극값들이 겹쳐야 한다.

$a+\dfrac{1}{4a}+2=\dfrac{1}{3}$

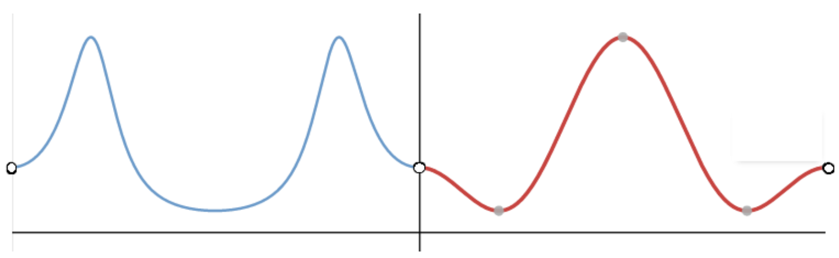
($x>0$에서 가지는 극값 3의 역수 $\dfrac{1}{3}$도 $x<0$에서 존재하는

극값이므로)

양변에 $12a$를 곱하면

$12a^2+20a+3=0,\ (2a+3)(6a+1)=0$

$|a|>\dfrac{1}{2}$이므로 $a=-\dfrac{3}{2}$



$g(t)=\frac{1}{3}, 3$에서만 불연속이라 조건을 만족시킨다. 그러나 이것은 $f(0)$을 아직 그래프에 표시하기 전이다. $f(0)$이 표시되면 불연속점이 1개 더 생길 수 있다.
불연속점이 2개로 유지되기 위해서는
$f(0)$의 값이 $\frac{1}{3}$또는 3이어야 한다.
(78번 문제에서 얻은 발상)
$\lim_{x\to 0} f(x) < f(0)$이므로 $f(0)=3$
따라서 $12\left(\frac{9}{4}+4+3\right)=111$