제 2 교시

2022학년도 미니 파이널 2회

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

달려온

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

제 2 교시

수학 영역

1. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

[4점][2020년 9월 나21]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2. 양의 상수 a에 대하여 곡선 $f(x)=a\sin\frac{x+\pi}{3}$ $(0 \le x \le 6\pi)$와 직선 $y=-\frac{a}{2}$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값이 6π일 때, a의 값을 구하시오.

[3점][2017년 전북10월 가25]

3. 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

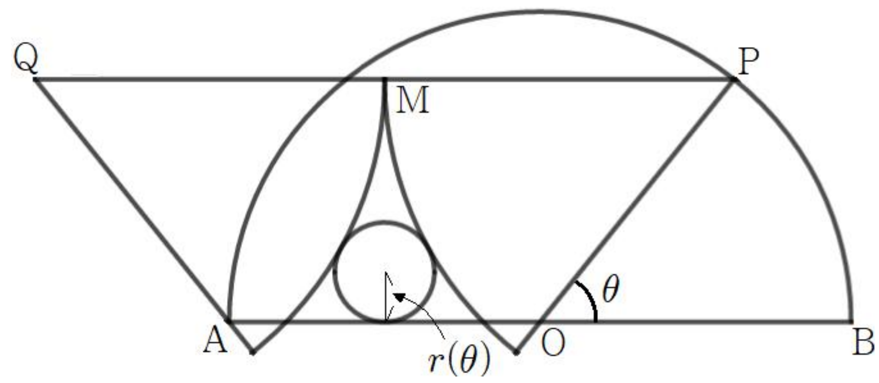
이다. 함수 $y=f(x)$ 가 구간 $(-\infty,\ 0)$ 에서 감소하고 구간 $(2,\ \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 $a,\ b$ 의 순서쌍 $(a,\ b)$ 에 대하여, a^2+b^2 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $M+m$ 의 값은?

[4점][2013년 9월 나21]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

4. 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 중심 O에 대하여 $\angle\mathrm{POB}=\theta$가 되도록 호 AB위에 점 P를 잡고, 사각형 AOPQ가 선분 AO와 선분 PQ가 평행인 등변사다리꼴이 되도록 반원 밖에 점 Q를 잡는다. 선분 PQ의 중점 M에 대하여 점 P, Q를 각각 중심으로 하고 점 M을 지나는 두 부채꼴과 선분 AB에 동시에 접하는 원의 반지름을 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=k$이다. $60k$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)



5. 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ f'(t)(x-t)+f(t) & (x \geq t) \end{cases} \quad (\text{단, } t>2)$$

라 할 때, $a<0,\ 2<b$인 실수 a,b에 대하여 $a \leq x \leq b$에서 x에 대한 방정식 $g(x)=k$의 실근의 개수를 $h(k)$라 하자. 함수 $h(k)$의 불연속점의 개수가 2개이도록 하는 모든 a,b,t에 대하여 $f(a)\times b$의 최솟값은?

① $\dfrac{12+8\sqrt{2}}{e^2}$　② $\dfrac{20+4\sqrt{2}}{e^2}$　③ $\dfrac{16+8\sqrt{2}}{e^2}$

④ $\dfrac{20+4\sqrt{2}}{e}$　⑤ $\dfrac{16+8\sqrt{2}}{e}$

1) ②

(i) $a_1 \leqq a_2$일 때,

$a_3 = 2a_1 + a_2 = 2$ ⋯ ㉠

이므로 $a_2 > 0$

① $a_1 \geqq 0$일 때

$a_2 \leqq a_3$이므로 $a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$

$a_3 \leqq a_4$이므로 $a_5 = 2a_3 + a_4 = 2a_2 + 6$

$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로 $6a_2 + 10 = 19$

$a_2 = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $2a_1 + \frac{3}{2} = 2$

$a_1 = \frac{1}{4}$

② $a_1 < 0$일 때

$a_2 > a_3$이므로 $a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + 2$

$a_3 \leqq a_4$이므로 $a_5 = 2a_3 + a_4 = a_2 + 6$

$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 3a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로 $3a_2 + 10 = 19$

$a_2 = 3$

$a_2 = 3$을 ㉠에 대입하면 $2a_1 + 3 = 2$

$a_1 = -\frac{1}{2}$

(ii) $a_1 > a_2$일 때

$a_3 = a_1 + a_2 = 2$ ⋯ ㉡

이므로 $a_1 > 0$

$a_2 \leqq a_3$이므로 $a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$

① $a_2 \geqq 0$일 때

$a_3 \leqq a_4$이므로 $a_5 = 2a_3 + a_4 = 2a_2 + 6$

$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로 $6a_2 + 10 = 19$

$a_2 = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{3}{2}$을 ㉡에 대입하면 $a_1 + \frac{3}{2} = 2$

$a_1 = \frac{1}{2}$

이때, $a_1 < a_2$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_1의 값은 존재하지 않는다.

② $a_2 < 0$일 때

$a_3 > a_4$이므로 $a_5 = a_3 + a_4 = 2a_2 + 4$

$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 8$

이때, $a_6 = 19$이므로 $6a_2 + 8 = 19$

$a_2 = \frac{11}{6}$

이때, $a_2 > 0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_2와 a_1의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a_1 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_1 = -\frac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

[다른 풀이]

$a_3 = 2,\ a_6 = 19$

(i) $a_3 \leqq a_4$인 경우

$a_5 = 4 + a_4,\ a_6 = 3a_4 + 4$

$\therefore\ a_4 = 5$

① $a_2 \leqq a_3$인 경우 : $a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = 2,\ a_4 = 5$

- $a_1 \leqq a_2$일 때 $a_1 = \frac{1}{4}$

- $a_1 > a_2$일 때 $a_1 = \frac{1}{2}$(조건을 만족하지 않는다.)

② $a_2 > a_3$인 경우 : $a_2 = 3,\ a_3 = 2,\ a_4 = 5$

- $a_1 \leqq a_2$일 때 $a_1 = -\frac{1}{2}$

- $a_1 > a_2$일 때 $a_1 = -1$(조건을 만족하지 않는다.)

(ii) $a_3 > a_4$인 경우

$a_5 = a_4 + 2,\ a_6 = 3a_4 + 2$

$\therefore\ a_4 = \frac{13}{3}$(조건을 만족하지 않는다.)

(i), (ii)에서 $a_1 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_1 = -\frac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

2) 4

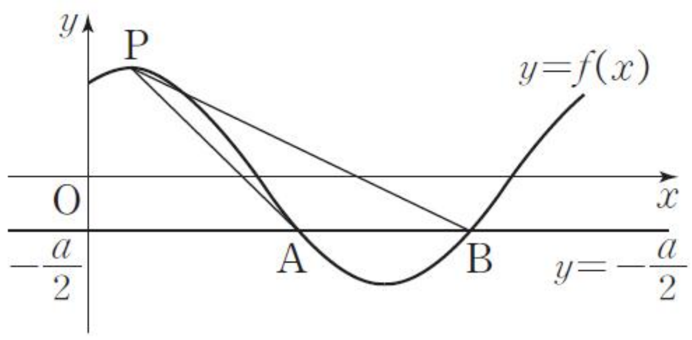
[출제의도] 이해능력-삼각함수

$a\sin\frac{x+\pi}{3} = -\frac{a}{2}$ 에서 $\sin\frac{x+\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{x+\pi}{3} = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{x+\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi$

$x = \frac{5}{2}\pi$ 또는 $x = \frac{9}{2}\pi$

즉, $\overline{AB} = \frac{9}{2}\pi - \frac{5}{2}\pi = 2\pi$



삼각형 PAB의 넓이가 최대이려면 삼각형 PAB의 높이가 최대이어야 하므로 점 P의 y좌표가 a일 때 최대이다.

삼각형 PAB의 높이가 최대일 때 그 높이는 $\frac{3}{2}a$이다.

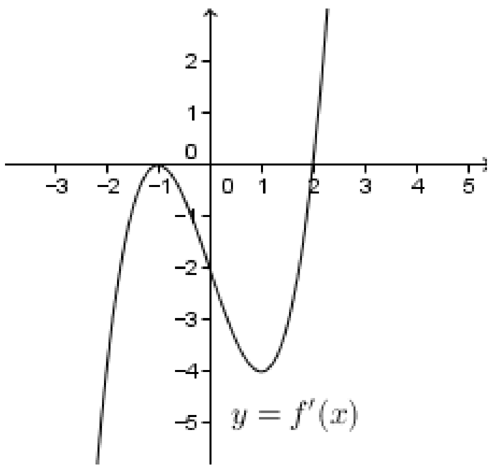
삼각형 PAB의 넓이의 최댓값이 6π 이므로

$\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{3}{2}a = 6\pi$

따라서 $a = 4$

3) ③

$(-\infty,0)$에서 감소하고 $(2,\infty)$에서 증가하는 그래프가 되기 위한 $f'(x)$의 그래프 개형은 $x=-1$에서 접하는 그래프가 나와야 된다.



$f'(x)=(x+1)(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha=-1$

$a=-(\alpha+\beta),\ b=\alpha\beta$

$a^2+b^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+(\alpha\beta)^2=1-2\beta+2\beta^2=2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

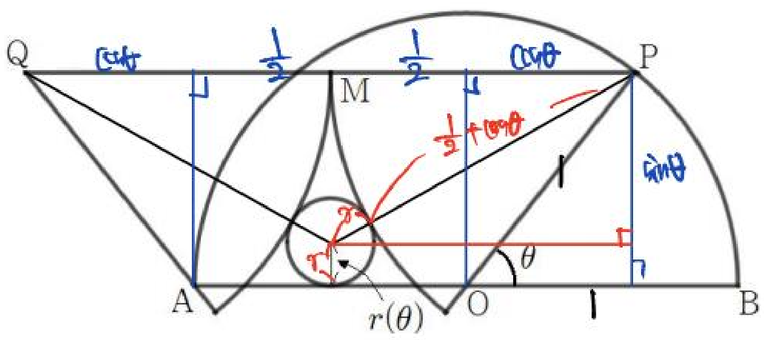
따라서 $\beta=\frac{1}{2}$일 때 최솟값을 갖고, $\beta=2$일 때 최댓값을 갖는다.

$m=\frac{1}{2},\ M=5$

$\therefore M+m=\frac{11}{2}$

4) 20

[출제의도] 피타고라스



$$\left(\frac{1}{2}+\cos\theta+r\right)^2=\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)^2+(\sin\theta-r)^2$$

(by 피타고라스)

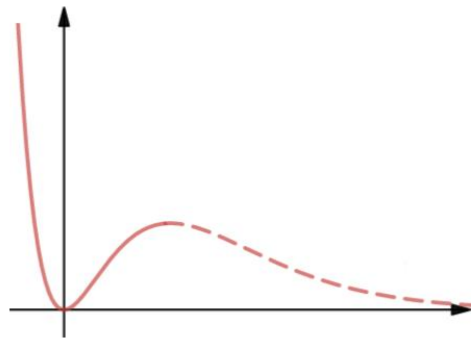
$$\Rightarrow\quad r(1+2\cos\theta)=\sin^2\theta-2r\sin\theta$$

$$r=\frac{\sin^2\theta}{1+2\cos\theta+2\sin\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\frac{1}{3}\qquad 20$$

5) ①

함수 $f(x)=x^2e^{-x}$의 개형을 그려서 상황을 파악하자.



$t>2$이고 $x<t$에서 $g(x)=f(x)$인 것을 생각하면 $g(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대를 갖는 개형이 확보된다. 한편, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 변할 수 있는 의심지점은 크게 3종류가 있다.

직선 $y=k$가 곡선 $y=g(x)$에 접할 때(극값을 지날 때)

직선 $y=k$가 곡선 $y=g(x)$의 불연속점을 지날 때

직선 $y=k$가 곡선 $y=g(x)$의 점근선 일 때

$g(x)=k$의 실근에 개수가 변할 수 있는 경계 (극값을 지날 때)

$y=g(0), y=g(2)$를 현재 알 고 있는데,

$a\le x\le b$에서로 정의역이 제한됨에 따라 실근에 개수가 변할 수 있는 불연속점에 의한 경계 $y=g(a), y=g(b)$가 추가되어 $h(k)$는 최대 불연속점을 최대 4개까지 가질 수 있다.

그러나 문제에서는 불연속점의 개수가 2개라고 하였으므로 경계들끼리 겹쳐서 상쇄되는 상황을 예상해 볼 수 있다.

$a<0, 2<b$이므로 $g(a)=g(2),\ g(b)=g(0)$이면 조건을 만족시킨다.

$g(a)=f(a)$이므로, $f(a)=f(2)=\frac{4}{e^2}$이고, $g(0)=0$이므로 b는 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$의 x절편이다.

$b=t-\frac{f(t)}{f'(t)}$

$=t-\frac{e^{-t}t^2}{e^{-t}(-t^2+2t)}$

$=t+\frac{t}{(t-2)}$

점 $(t,f(t))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점일 때, x절편 b가 최소임이 자명하다. $f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2)$이므로 $t=2+\sqrt{2}$에서

$b=2+\sqrt{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

를 얻는다. 따라서 $f(a)\times b$의 최솟값은 $\frac{12+8\sqrt{2}}{e^2}$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.