2021 9월 가형

10. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

$$a_{n+1} = -a_n + (-1)^{n+1} \times n$$

$a_2 = -12+1$ $\quad$ $a_3 = 12-1-2$

$a_4 = -12+1+2+3$ $\quad$ $a_5 = 12-1-2-3-4$

$\vdots$

$a_{2n} = -12+(1+2+\cdots+(2n-1))$ $\quad$ $a_{2n-1} = 12-(1+2+\cdots+(2n-2))$

$= -12+n(2n-1)$ $\quad$ ≤ 12

$a_6 = 3,\ a_8 = 16$ $\quad$ $\boxed{8}$

#Comment

① 대입, 나열, 관찰이 기본

② 주기가 생기는 경우 관찰

③ 사칙연산을 표시하는게 관찰에 유리한 경우 있음

2022 예시

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5 = 5$

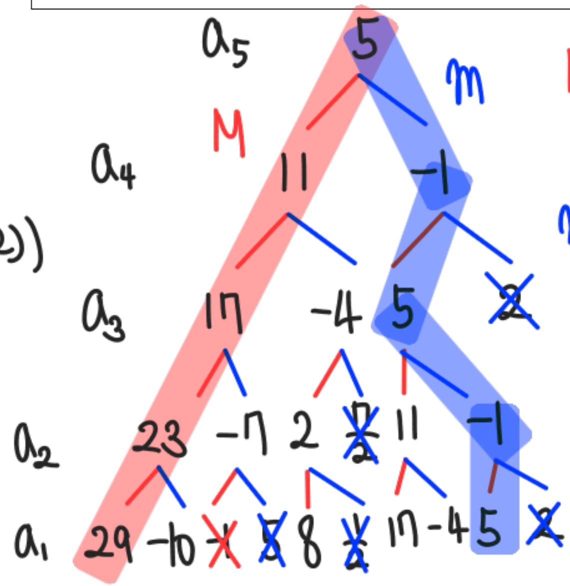
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \ge 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

$a_n = a_{n+1} + 6$

$a_n = \dfrac{3-a_{n+1}}{2}$



$M = 5+11+17+23+29+(a_6+\cdots+a_{100})$

$m = 5-1+5-1+5+(a_6+\cdots+a_{100})$

$M-m = 72$

#Comment

① 경우 나누어질 때 수형도(가지치기)가 강력한 도구

② 뒤에서부터 역추적

2021 9월 나형

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

a_1 부터 조사하면 갈길이 멀다, a_3 부터 시도

$\boxed{-\frac{1}{4}}$

a_2

a_3: 2

a_4: $2a_2+2$ $(a_2 \le 2)$, a_2+2 $(a_2>2)$

a_5: $2a_2+6$ $(a_2 \ge 0)$, $2a_2+4$ $(a_2<0)$, a_2+6 $(a_2 \ge 0)$, $\cancel{a_2+4\ (a_2<0)}$ $(a_2>2)$

a_6: $6a_2+10$, $6a_2+8$, $3a_2+10$ $=19$

$\Rightarrow a_2 = \frac{3}{2}$, $\cancel{\frac{11}{6}}$ $(a_2<0)$, 3

$a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}(o)$ $\frac{1}{2}(x)$

$a_2=3$, $a_3=2 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}(o)$ $-1(x)$

$a_1 \le a_2$ $a_1 > a_2$

#Comment

① 경우 나누어질 때 수형도(가지치기)가 강력한 도구

② 추적 시작지점을 어디로 잡는 지가 센스

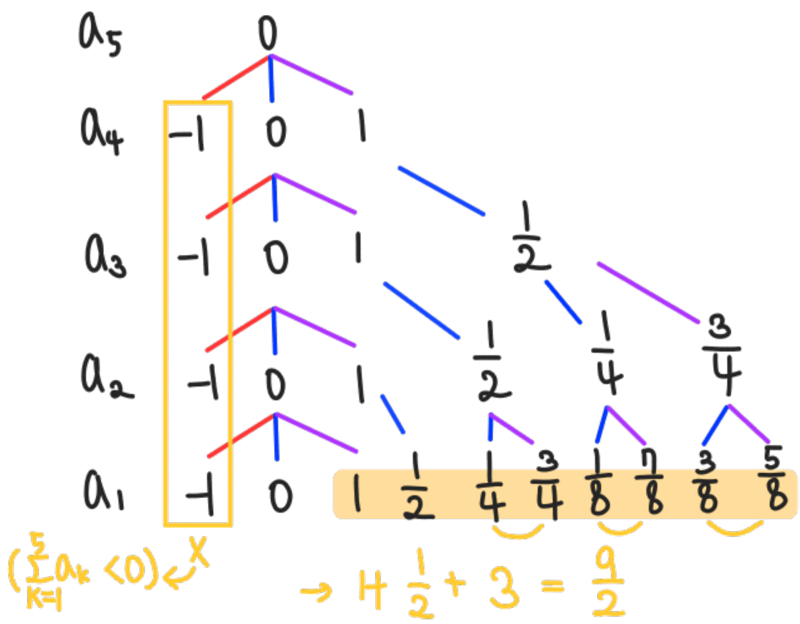
2022 9월

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n-2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \to -1 < a_{n+1} \le 0 \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \to -1 \le a_{n+1} \le 1 \\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \to 0 \le a_{n+1} < 1 \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} \boxed{\dfrac{a_{n+1}+2}{-2}} \\ \boxed{\dfrac{a_{n+1}}{2}} \\ \boxed{\dfrac{a_{n+1}-2}{-2}} \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]



a_n, a_{n+1} 부호가 같음을 눈치챌 수 있으면 Good!

① $-1 \le a_5 < -\frac{1}{2} \to a_5+a_6 = -a_5-2=0,\ a_5=-2$ (X)

② $\frac{1}{2} < a_5 \le 1 \to a_5+a_6 = -a_5+2=0,\ a_5=2$ (X)

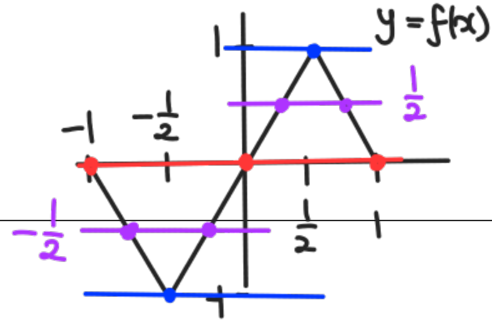
③ $-\frac{1}{2} \le a_5 \le \frac{1}{2} \to a_5+a_6 = 3a_5=0,\ a_5=0$

따라서 $a_5=a_6=0$.

Graph 이용 풀이

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \left(-1 \le x < -\frac{1}{2}\right) \\ 2x & \left(-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}, \quad a_{n+1} = f(a_n)$$

(a_5, a_6)는 $y=-x$ & $y=f(x)$ 교점 → $a_5=a_6=0$



$f(a_4)=a_5=0$, → $a_4=0,\pm1$

$f(a_3)=a_4=0,\pm1$, → $a_3=0,\pm1,\pm\frac{1}{2}$

$f(a_2)=a_3=0,\pm1,\pm\frac{1}{2}$ → ...

#Comment

① 경우 나누어질 때 수형도(가지치기)가 강력한 도구

② 뒤에서부터 역추적

③ 수열은 n항 넣어서 $n+1$항 나오는 함수, 그래프 이용 가능

2021 사관 가형

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+1} = -a_n + 3a_{n+1}$
(나) $a_{2n+2} = a_n - a_{n+1}$

$a_1 = 1,\ a_2 = 2$일 때 $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [4점]

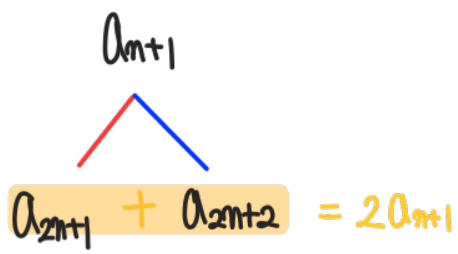
합을 묻고 있다

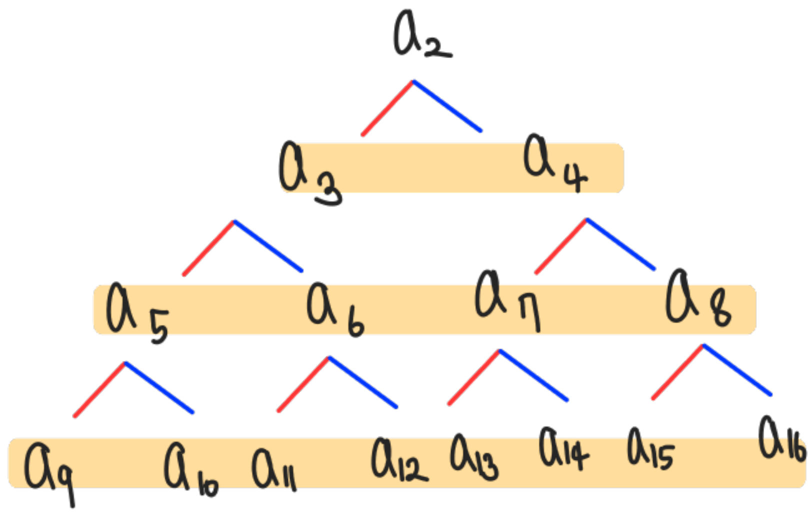
→ 짝꿍(a_{2n+1}, a_{2n+2})의 합

→ 한줄 씩 합을 떠올려본다

(가)+(나)

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} = 2a_{n+1}$$





$$\sum_{k=1}^{16} a_k = a_1 + a_2 + (a_3+a_4) + (a_5+a_6+a_7+a_8) + (a_9 + \cdots + a_{16})$$

$$= 1 + 2 + 2a_2 + 2(a_3+a_4) + 2(a_5+a_6+a_7+a_8)$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2\times 2a_2 + 2\times 2(a_3+a_4)$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2\times 2\times 2\times a_2$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$

$$= \frac{2^5-1}{2-1} = 31$$

$\boxed{31}$

2020 수능 나형

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$	$a_n = a_{2n}+1$
(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$	$a_n = \dfrac{a_{2n+1}-1}{2}$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

합을 묻고 있다

→ 짝꿍(a_{2n+1}, a_{2n+2})의 합

→ 한줄 씩 합을 떠올려 본다.

(가)+(나)

$a_{2n}+a_{2n+1} = 3a_n$

a_n

$a_{2n} + a_{2n+1} = 3a_n$

$a_{20}=1$

$a_{10} = a_{20}+1 = 2$

$a_5 = a_{10}+1 = 3$

$a_2 = \dfrac{a_5 - 1}{2} = 1$

$a_1 = a_2 + 1 = 2$

a_1

$a_2 \quad a_3$ → $3a_1$

$a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7$ → $3(a_2+a_3)$

$a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15}$ → $3(a_4+a_5+a_6+a_7)$

$a_{16} \quad \vdots \quad a_{31}$ → $3(a_8+\cdots+a_{15})$

$a_{32}+\cdots\cdots+a_{63}$ → $3(a_{16}+\cdots+a_{31})$

$$\sum_{k=1}^{63} a_k = a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_8+\cdots+a_{15})+(a_{16}+\cdots+a_{31})+(a_{32}+\cdots+a_{63})$$

$$= a_1+3a_1+3(a_2+a_3)+3(a_4+\cdots+a_7)+3(a_8+\cdots+a_{15})+3(a_{16}+\cdots+a_{31})$$

$$= a_1+3a_1+3^2a_1+3^2(a_2+a_3)+3^2(a_4+\cdots+a_7)+3^2(a_8+\cdots+a_{15})$$

$$= \cdots$$

$$= (1+3+3^2+\cdots+3^5)a_1 = \frac{3^6-1}{3-1}\times 2 = 728$$

$\boxed{728}$

2021 수능 가형

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_{2n} - a_{2n+1} = 3$

짝꿍(a_{2n}, a_{2n+1})의 차

또는 한줄의 양끝의 차를 떠올려본다.

차를 주었다.

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

풀이① 연립

$a_2 = a_2 a_1 + 1$, $a_1 = \dfrac{a_2 - 1}{a_2}$

$a_4 = a_2^2 + 1$

$a_8 = a_2^3 + a_2 + 1$ $= 4^3 + 4 + 1 = 69$

$a_3 = a_2 a_1 - 2$

$= a_2 - 3$

$a_7 = a_2^2 - 3a_2 - 2$

$a_{15} = a_2^3 - 3a_2^2 - 2a_2 - 2$

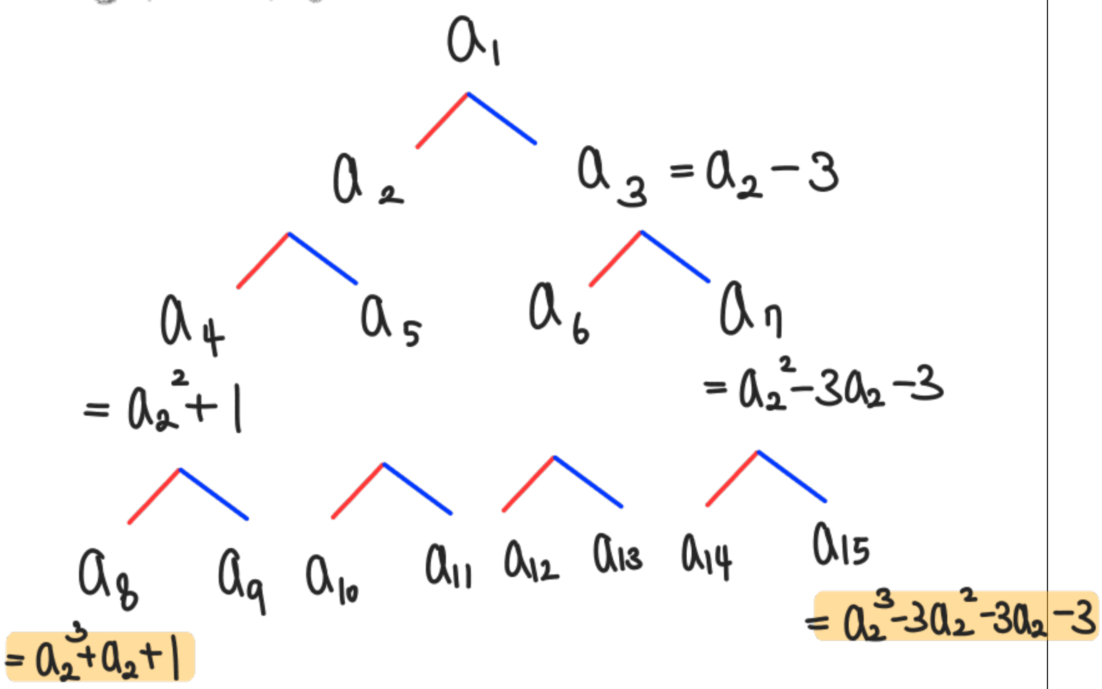
$a_8 - a_{15} = 3a_2^2 + 3a_2 + 3 = 63$

$\rightarrow a_2 = 4$ 또는 -5, $a_1 = \dfrac{3}{4}$ 또는 $\dfrac{6}{5}$

$\therefore \dfrac{a_8}{a_1} = 69 \times \dfrac{4}{3} = 92$

$\boxed{92}$

풀이② 수형도



2022 사관

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{2n} = a_3 \times a_n + 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n - a_2$$
이다.

예민하게 반응할 조건 → "약수"

$a_1 = m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [4점]

$n=1$ 대입

$a_2 = a_3 a_1 + 1, \quad a_3 = 2a_1 - a_2$

$a_2 = 2a_1^2 - a_2 a_1 + 1$

$a_2 = \dfrac{2a_1^2+1}{a_1+1} = \dfrac{(a_1+1)(2a_1-2)+3}{a_1+1}$

$= 2a_1 - 2 + \boxed{\dfrac{3}{a_1+1}}$: 정수

$a_1 = -4, -2, 0, 2$

$m = -4 \rightarrow a_2 = \dfrac{2\times(-4)^2+1}{-4+1} = -11$

$a_9 = 2a_4 - a_2 \quad = -53$

$a_4 = a_3 a_2 + 1 \quad = -32$

$a_3 = 2a_1 - a_2 \quad = 3$

$\boxed{-53}$

20210618가/20210621나

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ,ㄴ,ㄷ

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

#Comment

① 그래프 크게, 비율 맞게 그리기, 정수 격자점 표시

② 교점은 대입해서 등식 세워두기

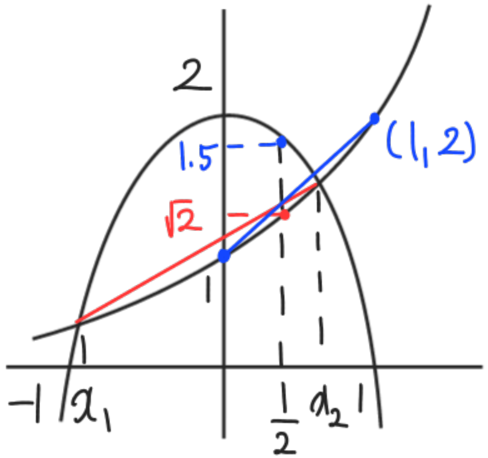
③ $f(a)$, $g(a)$ 대소 비교하여 a, x_1 대소 비교하기

④ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$은 두 점 사이의 기울기로 해석

⑤ x_1y_1이나 $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$은 사각형의 넓이

⑥ ㄱ의 $\frac{1}{2}$ 같은 값들은 그래프에 대입하여 표시해두기

⑦ 볼록성을 이용한 기울기 대소 비교



① 이용

ㄱ ③,⑥ 이용 $x=\frac{1}{2}$

$\sqrt{2}$ 　 1.5

$2^{\frac{1}{2}} < -2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2$

두 교점 기울기

ㄴ ④,⑦ 이용 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} < 1$ 　 $(0,1)\sim(1,2)$ 기울기

ㄷ ② 이용 $y_1=2^{x_1}=-2x_1^2+2$, $y_2=2^{x_2}=-2x_2^2+2$

$y_1y_2=2^{x_1+x_2}$

ㄷ $\Leftrightarrow$ $2^{-\frac{1}{2}} < 2^{x_1+x_2} < 2^0$

$-1<x_1$, $\frac{1}{2}<x_2$ 이므로 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2$

그래프에서 $|x_1|>|x_2|$ 이므로 $x_1+x_2<0$

따라서 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$ 이므로 참

20201021나

21. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$\boxed{ㄱ, ㄴ, ㄷ}$

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$

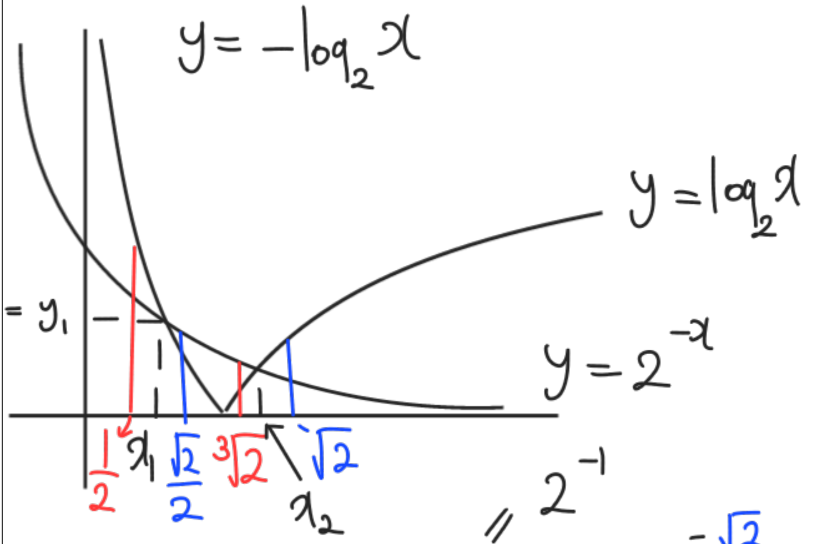
ㄷ. $y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

ⓐ $x=\frac{1}{2}$, $-\log_2\frac{1}{2} > 2^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} < x_1$

$-\log_2\frac{1}{2} = 1$, $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\log_2\frac{\sqrt{2}}{2} < 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 2^{-1}$



ⓑ $x=\sqrt{2}$, $\log_2\sqrt{2} > 2^{-\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 < \sqrt{2}$

$\log_2\sqrt{2} = 2^{-1}$

$x=\sqrt[3]{2}$, $\log_2\sqrt[3]{2} < 2^{-\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \sqrt[3]{2} < x_2$

$\log_2\sqrt[3]{2} = 3^{-1}$, $2^{-\sqrt[3]{2}}$

ⓒ $x_1 = y_1$ (∵ 역함수) $3^{-1} < 2^{-1.5} < 2^{-\sqrt[3]{2}}$ ① 이용

by ㄱ, $\frac{1}{2} < y_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ … ① $y=\log_2 x$

by ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{3} < y_2 < \frac{1}{2}$ … ②

① − ② : $0 < y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

#Comment

① $a<b$를 증명하기 위해 사이에 $a<x<b$인 x 놓는 센스

Tip! 1. 보기의 숫자가 이용되는 경우 다수

Tip! 2. 지수는 밑이 같아야 대소 비교 쉬움

② 종종 역함수, 대칭/평행이동 이용

2021 사관(나) 21번

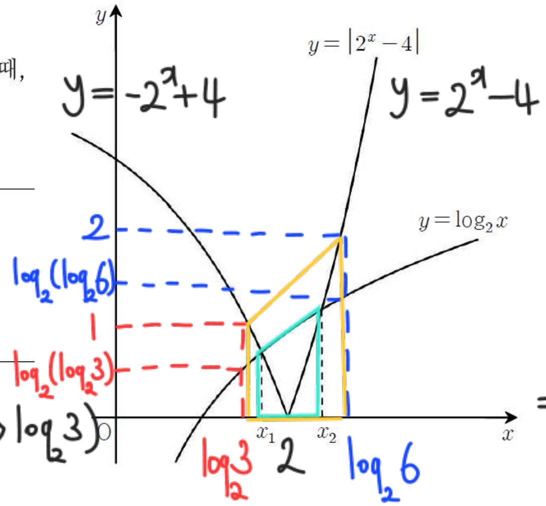
21. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] ㄱ, ㄴ

<보 기>

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$



ㄱ $x=\log_2 3$, $-2^{\log_2 3}+4=1>\log_2(\log_2 3)$ $(\because 2>\log_2 3)$

$\therefore \log_2 3 < x_1$

$x=\log_2 6$, $2^{\log_2 6}-4=2>\log_2(\log_2 6)$ $(\because 4>\log_2 6)$

$\therefore x_2 < \log_2 6$

ㄴ 교점 대입

$\rightarrow y_1=-2^{x_1}+4=\log_2 x_1$

$y_2=2^{x_2}-4=\log_2 x_2$

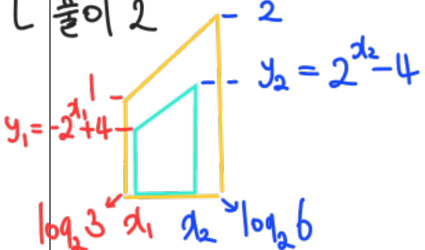
$\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

$\Rightarrow x_2-x_1<\log_2 6-\log_2 3=1$

$2^{x_2}-2^{x_1}=y_2+y_1<2+1=3$

$\therefore (x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<1\times 3=3$

ㄴ 풀이 2



사다리꼴 넓이 비교

$\frac{1}{2}\times(x_2-x_1)\times(y_2+y_1)<\frac{1}{2}\times(\log_2 6-\log_2 3)\times(1+2)$

$(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

~~ㄷ~~ $2^{x_1}+2^{x_2}-8>\log_2(\log_3 6)$

$\Leftrightarrow y_2-y_1>\log_2(\log_3 6)$

$\Leftrightarrow \log_2\frac{x_2}{x_1}>\log_2(\log_3 6)$

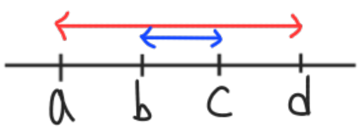
$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x_2}{x_1}}>\log_3 6=\boxed{\frac{\log_2 6}{\log_2 3}}$ (문제 조건은 밑이 2)

(거짓)

#Comment

① 교점은 대입해서 등식 세워두기

② $a<b<c<d$이면 $c-b<d-a$(수직선에 표시해보면 자명)



③ x_1y_1이나 $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$은 사각형의 넓이

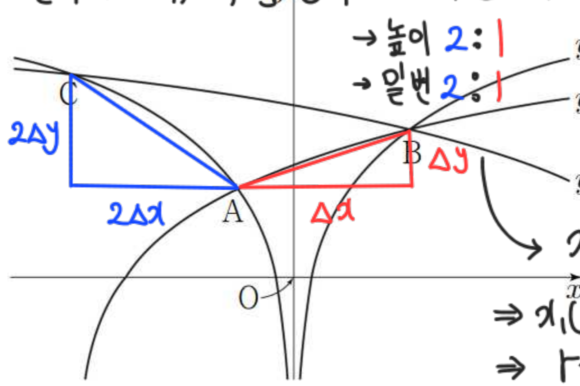
④ $(x_2-x_1)(y_2+y_1)\div 2$는 사다리꼴 넓이

20210415

$\boxed{ㄱ, ㄴ}$

15. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]

ㄷ 풀이2 : x_1, x_2, x_3 등비 → y_1, y_2, y_3 등차



$x_1-x_3=2(x_2-x_1)$

$\Rightarrow x_1(1-r^2)=2x_1(r-1)$

$\Rightarrow r=-3$, 이후 동일

〈보 기〉

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. $x_2{}^2=x_1x_3$ → "①~④에서 m, k 소거해야겠네" → "m 소거 간단하네"

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

#Comment

① 교점은 대입해서 등식 세워두기

교점은 대입

$y_1=\log_2(x_1+4)=\log_2(-kx_1)$

$y_2=\log_2(x_2+4)=\log_2(kx_2)=\log_2(-x_2+m)$

$y_3=\log_2(-x_3+m)=\log_2(-kx_3)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+4=-kx_1 \\ x_2+4=kx_2=-x_2+m \\ -x_3+m=-kx_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)x_1=-4 & ① \\ ② (k-1)x_2=4, & (k+1)x_2=m \; ③ \\ (k-1)x_3=-m & ④ \end{cases}$

ㄱ ① ÷ ② $\dfrac{(k+1)x_1}{(k-1)x_2}=-1$, ⑤ $k+1=2(k-1)$, $\boxed{k=3}$

ㄴ ③ ÷ ④ $\dfrac{(k+1)x_2}{(k-1)x_3}=-1$ ⑥ → "⑤ ÷ ⑥ 하면 k 소거" → $\boxed{x_2{}^2=x_1x_3}$

↳ 등비수열 $x_2=x_1r$, $x_3=x_1r^2$

ㄷ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\dfrac{\log_2(kx_2)-\log_2(-kx_1)}{\cancel{(r-1)x_1}}+\dfrac{\log_2(-kx_3)-\log_2(-kx_1)}{(r+1)\cancel{(r^2-1)x_1}}=0$

$(r+1)\log_2(-r)+\log_2 r^2=\log_2(-r)^{r+3}=0$ ∴ $r=-3$

→ $x_2=-3x_1$

$-3x_1=\dfrac{12}{k+1}$ → $m=12$

$x_2=\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{m}{k+1}$ → $k=2$

$\boxed{m+k^2=12+4=16}$

20210626(가)

26. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{7}$

풀이 ① 수식적 접근

$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}=4$

$(a_1+(k+1)\times2)+(a_1+k\times2)=4$

$2a_1+4k+2=4$

$a_1+2k-1=0$

$a_1=1-2k$

$S_k=\dfrac{(2a_1+(k-1)\times2)k}{2}=-k^2=-16$

$k=4,\ a_1=-7,\ a_{2k}=a_8=-7+7\times2=7$

풀이 ② 나열, 관찰하는 풀이

$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}\overset{+2}{\curvearrowleft}a_{k+1}=4$

2 차이인데 합이 4 → 1+3

a_1	a_2	a_3	a_k ($k=4$)	a_{k+1} (a_5)	a_{k+2} (a_6)	a_7	a_8
-7	-5	-3	-1	1	3	5	7

-16

#Comment

① 등차수열은 일반항, 부분 합 이용한 수식적 접근도 가능

② 하지만, 나열하여 관찰하는 것이 더 중요!

20220913

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

중요 by ③

(가) $\lvert a_m \rvert = \lvert a_{m+3} \rvert$인 자연수 m이 존재한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

자연수 $d \Rightarrow a_m < 0,\ a_{m+3} > 0$

$\Rightarrow \underset{+d}{a_m} + \underset{-d}{a_{m+3}} = 0$

$\Rightarrow a_{m+1} + a_{m+2} = 0$ by ②

$+d$, 그런데 합이 0 $\Rightarrow -\frac{d}{2} + \frac{d}{2} = 0$

$a_1 \cdots a_m \quad a_{m+1} \quad a_{m+2}$

$-45 \xrightarrow[+md]{\text{by ① } m\text{칸 차이}} -\frac{d}{2} \quad \frac{d}{2}$

$-45 + md = -\frac{d}{2}$,

$(m+\frac{1}{2})d = 45$,

3이상 홀수 $(2m+1)\,d = 90 \xrightarrow{\text{by ③}} 90 = 3^2 \times 2 \times 5$의 약수

1, 2, 5, 10,
3, 6, 15, 30,
9, 18, 45, 90.

		a_1	a_2	a_3	a_4	
3	30	-45	-15	15		>-100
5	18	-45	-27	-9	9	>-100
9	$\cancel{10}$	-45	-35	-25		≤ -100
15	$\cancel{6}$	-45	-39	-33		≤ -100
45	$\cancel{2}$	-45	-43	-41		≤ -100

$\boxed{48}$

#Comment

나열하여 관찰할 때

① 항의 넘버링 차이에 주목하기

② 등차수열 합의 대칭성에 주목하기(등차중항 확장)

③ 정수, 자연수 조건 있으면 약수 조건 활용 생각해보기

중요 by ⑤

20200917(고2)

17. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_7 = 37$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{13} a_k$이다.

$\sum_{k=1}^{21} |a_k|$ 의 값은? [4점]

$n = 12$: $a_1 + \cdots + a_{12} \le a_1 + \cdots + a_{12} + a_{13}$, $a_{13} \ge 0$

$n = 14$: $a_1 + \cdots + a_{13} + a_{14} \le a_1 + \cdots + a_{13}$, $a_{14} \le 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_{13} = a_7 + 6d = 37 + 6d \ge 0 \\ a_{14} = a_7 + 7d = 37 + 7d \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{-6.xx}{-\frac{37}{6}} \le d \le \underset{-5.xx}{-\frac{37}{7}} \qquad \therefore d = -6.$$

$a_1 \cdots a_7 \cdots a_{13}$ $a_{14} \cdots a_{21}$

$73 \cdots 37 \cdots 1$ $-5 \cdots -47$

$+6d = -36$ $+6d = -36$ $+7d = -42$

등차 13개 등차 8개

$$\sum_{k=1}^{21} |a_k| = (73 + \cdots + 1) + (5 + \cdots + 47)$$
$$= 74 \times \frac{13}{2} + 52 \times \frac{8}{2}$$
$$= 37 \times 13 + 26 \times 8$$
$$= 370 + 111 + 160 + 48$$
$$= 481 + 208$$
$$= 689$$

$\boxed{689}$

#Comment

① 등차수열은 부호가 일정하거나 “단 한 번” 바뀜

② 부호가 변하는 부분이 핵심이 되는 경우가 많고

③ 이를 조건에서 숨기는 방법이 다양하다.

④ 부호 변화 힌트 : 부분 합의 대소(조건 나)

⑤ 정수, 자연수 조건 있으면 약수 조건 활용 생각해보기

20200717(가형)

17. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ \ T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7 = T_7$ $= 42$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은? [4점]

※ $x \geq 0$ 이면 $|x| = x$

$x < 0$ 이면 $|x| = -x \Leftrightarrow |x| + x = 0.$

(가) $T_7 - S_7 = \underbrace{|a_1| - a_1}_{\geq 0} + \underbrace{|a_2| - a_2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{|a_7| - a_7}_{\geq 0} = 0$

$|a_1| = a_1$, ''', $|a_7| = a_7$, $\therefore a_7 \geq 0$

(나) $(S_7 + T_7) - (S_6 + T_6) = (S_7 - S_6) + (T_7 - T_6) = 0$

$a_7 + |a_7| = 0$, $\therefore a_7 \leq 0$

따라서 $a_7 = 0$.

$S_7 = 42 = \dfrac{(a_1 + \cancel{a_7}^{\,0}) \times 7}{2}$, $\therefore a_1 = 12$

$a_1 \quad \cdots \quad a_7 \quad a_8 \quad \cdots \quad a_{15}$

7개   8개

$12 \quad\quad 0 \quad -2 \quad\quad -16$

$+6d = -12 \quad -2 \quad +7d = -14$

$(12+0) \times \dfrac{7}{2} + \dfrac{(2+16) \times 8}{2}$

$= 42 + 72 = 114$

$\boxed{114}$

#Comment

① 부호 변화 힌트 : 절댓값

20190921(고2 가형)

21. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{14}의 값은? [4점]

a_m 점점 커진다. 음수 → 양수

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = 0$을 만족시키는 자연수 m이 존재한다.

(나) $2\displaystyle\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} |a_n| = 90$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_m + \cdots + a_{2m-2} + a_{2m-1} = 0$

$a_m = 0$

$a_1 + \cdots + a_{15} = 45 = \dfrac{(a_1+a_{15})\times 15}{2}$

$a_1 + a_{15} = 6 = 2a_8$,

⊖ ⊕

$a_8 = 3$

⊖ $1<m<8$인 자연수 ⊕

a_1 ⊖ a_m ⊕ a_8 a_{15}

0 3 $(15-m)d$

합 △ 합 □

$+(8-m)d = 3$ … ㉠

$\triangle + \square = 45$, $-\triangle + \square = 90$

$\Rightarrow \triangle = -\dfrac{45}{2}$, $\square = \dfrac{135}{2} = (15-m)d \times \dfrac{(16-m)}{2}$

$\therefore (15-m)(16-m)d = 135$ … ㉡

풀이 ① 기계적 계산

㉡ ÷ ㉠ $(15-m)(16-m) = 45(8-m)$

$m^2 + 14m - 120 = 0$

$(m+20)(m-6) = 0$.

$m = 6$, $d = \dfrac{3}{2}$

$a_{14} = a_8 + 6d = 3 + 9 = 12$

$\boxed{12}$

풀이 ② m이 자연수니까 $(1<m<8)$

㉠ $(8-m)d = 3$

m	d
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{3}{5}$
4	$\frac{3}{4}$
5	1
6	$\frac{3}{2}$ ✓
7	3

㉡에 대입해서 되는 것 찾기 → $m=6$, $d=\frac{3}{2}$

#Comment

① 부호 변화 힌트 : 절댓값

등차수열

20191017(나형)

17. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) S_n은 n에 대한 이차식이다. → a_n은 등차 $(n \geq 2)$
> (나) $S_{10} = S_{50} = 10$
> (다) S_n은 $n = 30$에서 최댓값 410을 갖는다.

50보다 작은 자연수 m에 대하여 $S_m > S_{50}$을 만족시키는 m의 최솟값을 p, 최댓값을 q라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$의 값은? [4점]

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow S_n = \dfrac{(2a_1+(n-1)d)n}{2}$

$= \boxed{\dfrac{d}{2}}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n + 0$

→ 최고차항 계수 $\dfrac{d}{2}$, 상수항 0인 이차식

$* \; S_n = \boxed{2}n^2 + 4n$

$\rightarrow d = 4,\ a_1 = S_1 = 6.\ a_n = 4n+2$

$S_n = an^2 + bn + c$

$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$

$= an^2 + bn + c$

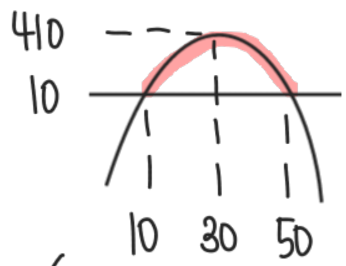
$\quad - a(n-1)^2 - b(n-1) - c$

$= 2an - a + b$

S_n 이차식 → a_n 등차$(n \geq 2)$

$a_1 = S_1 \Leftrightarrow a + b = a + b + c$

$c = 0$ 이면 a_n 등차$(n \geq 1)$



$11 \leq m \leq 49$

$p \qquad q$

$S_n - 10 = \square(n-10)(n-50)$

$n = 30:\ 400 = \square \times 20 \times (-20),\ \square = -1$

$S_n = -(n-10)(n-50) + 10$

$= -n^2 + 60n - 490,\ d = -2$

$a_1 = S_1 = -1 + 60 - 490 = -431$

$a_1 + a_2 = S_2 = -4 + 120 - 490 = -374$

$a_2 = 431 - 374 = 57$

$a_n = \begin{cases} -2n + 61 & (n \geq 2) \\ -431 & (n = 1) \end{cases}$

$\sum_{k=11}^{49} a_k = S_{49} - S_{10} = -39 \times (-1) + 0 = 39$

$\boxed{39}$

#Comment

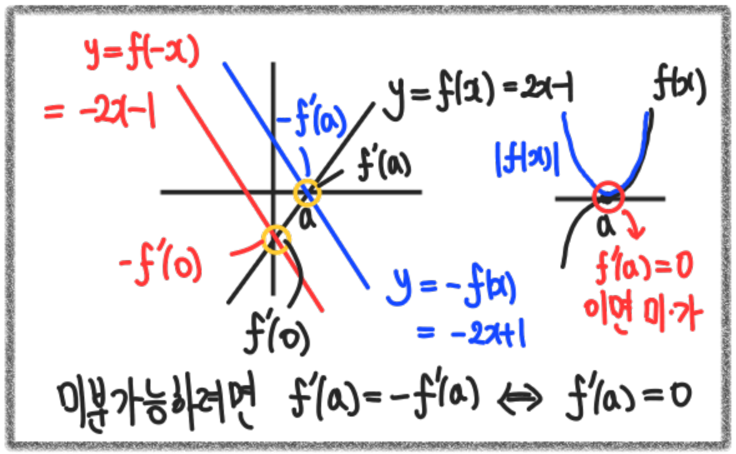
① 수식적 접근 : 등차수열 부분 합과 이차식의 관계

20210930(나)

30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f(3)=0$
>
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $\boxed{f'(x)=0}\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]



#Comment

① $y=|f(x)|$ 꼴의 미분 가능성

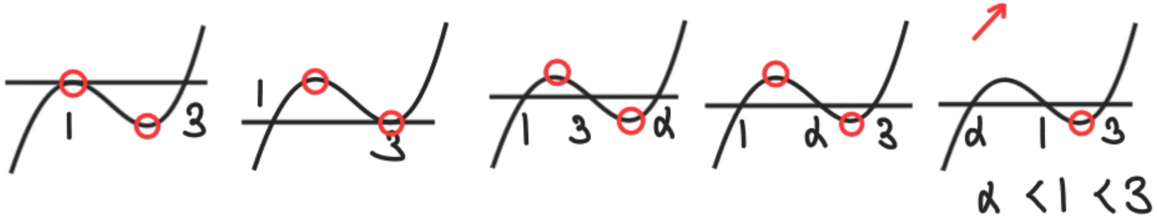
② 꺾이면 뾰족점이 생기므로

③ 접히는 경계 미분계수가 0이어야 미분가능

④ 다항함수라면 중근을 가져야함 ⇐ $f(a)=0,\ f'(a)=0.$

$f(x)=0$ 세 실근 $1, 3, \alpha$

이 경우만 (나) 만족

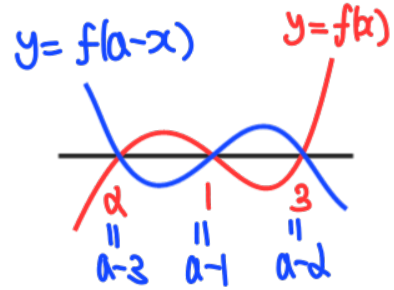


$f(x)f(a-x)=0$ 의 실근

$\alpha,\ 1,\ 3$
$\parallel\ \ \parallel\ \ \parallel$
$a-3,\ a-1,\ a-\alpha$

$\left(\begin{array}{l} a-x=\alpha, 1, 3 \\ a-3<a-1<a-\alpha \end{array}\right)$

(중근이어야 미분 가능) → $a=2,\ \alpha=-1$



$f(x)=k(x+1)(x-1)(x-3)$

$$\frac{g(4a)}{f(0)f(4a)}=\frac{|f(4a)f(-3a)|}{f(0)f(4a)}=\frac{|f(8)f(-6)|}{f(0)f(8)}=\frac{\cancel{k}\cdot\cancel{9\cdot7\cdot5}\cdot5\cdot7\cdot9}{\cancel{k}\cdot1\cdot1\cdot3\cdot\cancel{9\cdot7\cdot5}}$$

$=105$

$\boxed{105}$

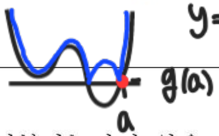
20200330(가)

30. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds \quad = x^4+\sim,\ g(t)=0,\ g'(x)=f(x)$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$y=|g(x)-g(a)|$ $y=g(x)$



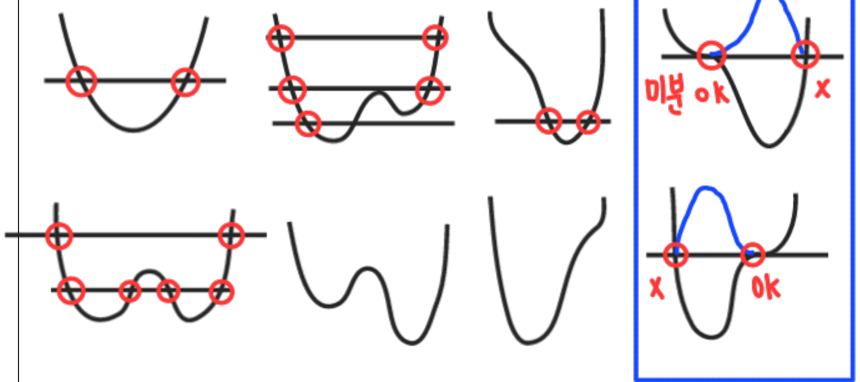
> (가) $f'(a)=0$
> (나) 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.
> $(a, g(a))$ 기준 접어 올리기

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$y=g(x)=x^4+\sim.$

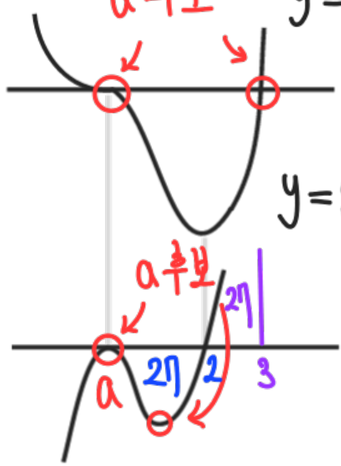
(나) 만족 Case



$h(t)=g(a)=\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds,\ h'(t)=-f(t)$

$h(3)=\int_3^a f(s)ds=0$
$h(2)=\int_2^a f(s)ds=27$
$\rightarrow \int_2^3 f(s)ds=27$
: 최댓값 $\rightarrow h'(2)=0,\ f(2)=0$

Case 1



(가) $f'(a)=0$

$f(2)=0,\ \int_2^a=27$

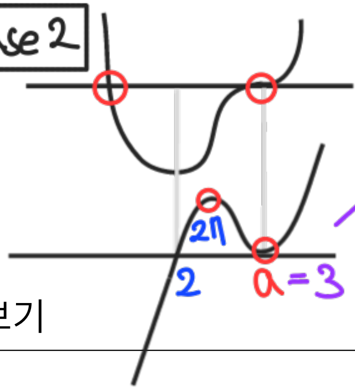
$\int_3^a\ =0$

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$0=\int_3^a f(x)dx=\int_{3-a}^0 f(x+a)dx$
$=\int_{3-a}^0 4\cdot x^2\cdot(x+a-2)dx$
$=\left[x^4+\frac{4(a-2)}{3}x^3\right]_{3-a}^0$
$=(3-a)^3\frac{a+1}{3}=0,\ a=-1$

$f(5)=4\cdot 6^2\cdot 3=\boxed{432}$

Case 2



$\int_3^a f(x)dx=0$ 이려면 $a=3$

$f(x)=4(x-2)(x-3)^2$
$\int_2^3 f(x)dx=\frac{1}{3}\neq 27$
모순

#Comment

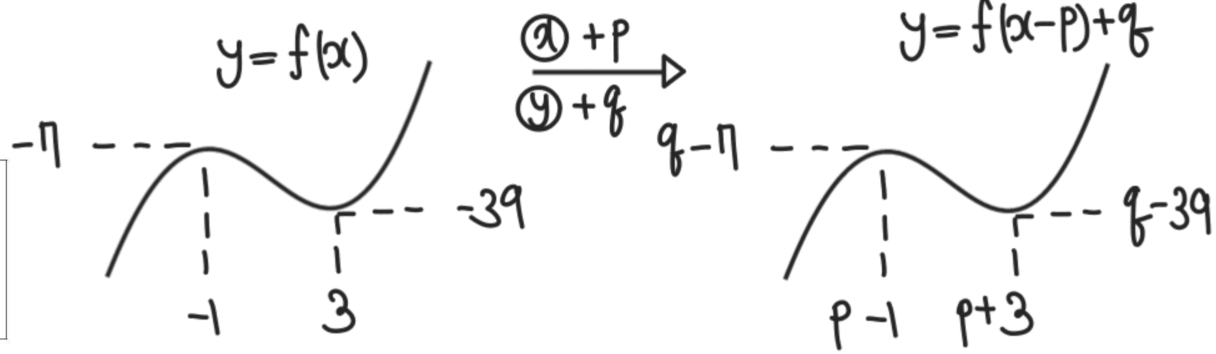
① |삼차 or 사차함수| 개형, 미분 불가 점 개수 관찰해보기

20220614

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

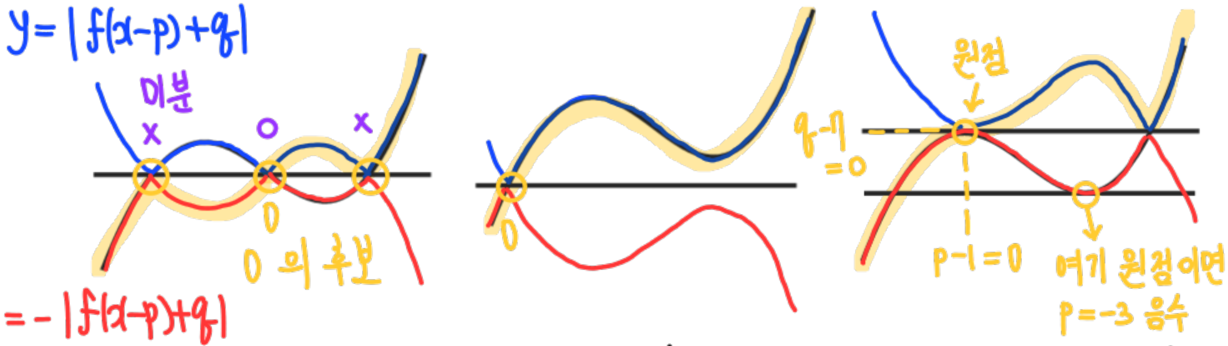


첫번째 접기

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & x\ge0\\ -|f(x-p)+q| & x<0\end{cases}$$

두번째 접기

"x=0 기준 두 번 접으니 미분가능"



$g(0+)=|f(-p)+q|$
$=g(0-)=-|f(-p)+q|$
$\Rightarrow g(0)=0,\ f(-p)+q=0$

$f(x-p)+q=0$ 실근 서로 다른 3개, 실근 1개, 실근 1개, 중근 1개

→ $g(x)$ 미분 불가 2개 (0 제외) → $g(x)$ 미분불가 0개 → 극대점 원점, $p=1$, $q=17$

$\boxed{8}$

#Comment

① $y=\pm|f(x)|$ 꼴의 미분 가능성
② $y=-|f(x)|$ 그래프는 두 번 접으면 제자리($f(x)<0$일 때)
③ $y=f(x-a)+b$ 그래프 그리는 연습($x=a$ 경계점 기준)

20211022

22. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$$
> 이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

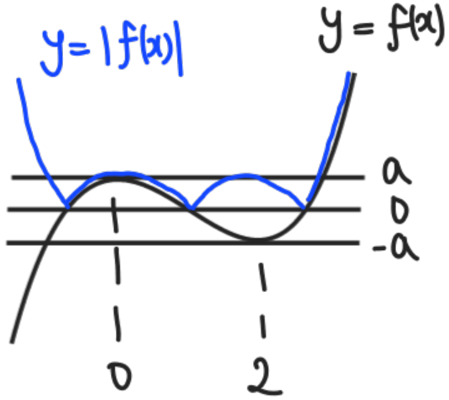
$g(3a)$의 값을 구하시오. [4점]

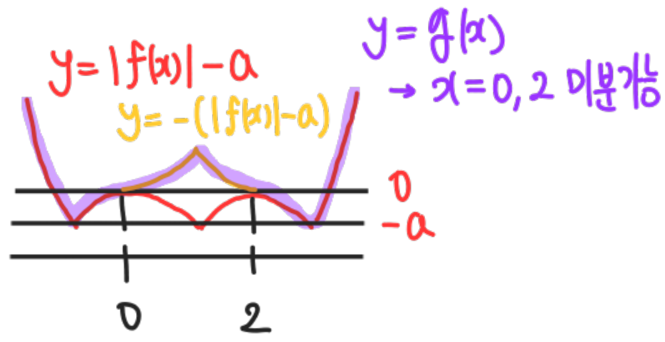
$$g(x)=\begin{cases}(|f(x)|-a) & x<0,\ x>2\\ -(|f(x)|-a) & 0\le x\le 2\end{cases}$$

"$x=0, 2$ 경계로 접는데 미분 가능이라면 $x=0, 2$ 에서 미분계수 0 이겠구나"

$g(0+)=g(0-)\Rightarrow g(0)=0,\ |f(0)|=a$

$g(2+)=g(2-)\Rightarrow g(2)=0,\ |f(2)|=a$





$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

$f(x)=x^3-3x^2+C$

$f(0)=C=a$

$f(2)=C-4=-a$ → $C=2$, $a=2$

$g(3a)=g(6)=|f(6)|-2$

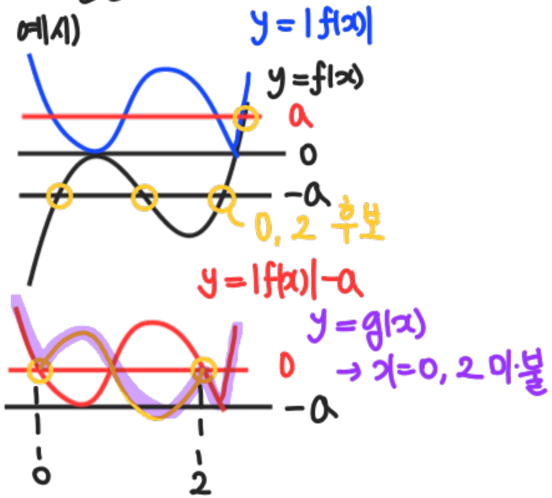
$=6^3-3\cdot 6^2+2-2$

$=3\cdot 6^2=108$

$\boxed{108}$

* $f'(0)=f'(2)=0$ 으로 단정짓고 다른 개형 살펴보지 않은 게 불안하다면 직접 확인해보기.

예시)



#Comment

① 복잡해보여도 결국 $x=0$, $x=2$ 경계로 $\pm(|f(x)|-a)$

② 접히는 경계에서 미분계수 0

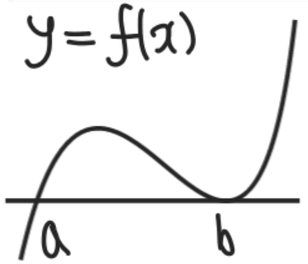
20211128(가)

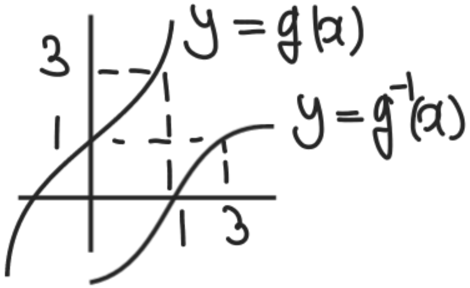
28. 두 상수 a, $b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
>
> (나) $h'(3)=2$





$\boxed{72}$

$$p(x)=(x-1)|h(x)|=\begin{cases}(x-1)h(x) & h(x)\geq 0\\ -(x-1)h(x) & h(x)<0\end{cases}$$

$p(k)=0$ 이면 $p'(k)=0$ 이다.

$$p(x)=\underbrace{(x-1)}\,|\underbrace{(g^{-1}(x)-a)}_{=0\text{ 의 해 }k_2}\underbrace{(g^{-1}(x)-b)^2}_{=0\text{ 의 해 }k_1\Rightarrow p'(k_1)=0\,(\text{제곱인수})}|$$

같은 해를 가져야 $p'(k_2)=0$, $\therefore g^{-1}(1)=a$, $a=0$

$g^{-1}(x)=Q(x)$ 라 쓰자, $h'(x)=f'(Q(x))Q'(x)$.

$$h'(3)=f'(g^{-1}(3))Q'(3)=f'(1)\cdot\frac{1}{g'(1)}=\frac{f'(1)}{4}=2$$

$f'(1)=8$.

$f(x)=x(x-b)^2=x^3-2bx^2+b^2x$

$f'(x)=3x^2-4bx+b^2$, $f'(1)=b^2-4b+3=8$

$(b-5)(b+1)=0$, $b=5$ 또는 $\cancel{b=-1}$ $(a<b)$

$f(8)=8\times3^2=72$

#Comment

① $y=f(x)|g(x)|$꼴의 미분가능성

20211130(나)

30. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$x=1$ 연속 $\pm(f(1)-g(1))=f(1)+g(1)$

$\Rightarrow f(1)=0$ 또는 $g(1)=0$

$x=1$ 미가 $\pm(f'(1)-g'(1))=f'(1)+g'(1)$

$\Rightarrow f'(1)=0$ 또는 $\cancel{g'(1)=0}$

↳ $g'(1)=0$ 이면 $g(x)$는 $y=k$ 꼴 일차함수 아니다.

$h(0)=0=|f(0)-g(0)|$, $f(0)=g(0)$

$x=0$ 미가 $f'(0)-g'(0)=0$, $f'(0)=g'(0)$

$f(x)-g(x)=x^2(x-a)$, $g(x)=bx+c$

$f(x)=x^3-ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2-2ax+b$

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 2a-b=3$ — ㉠

$h(2)=f(2)+g(2)=5$

$4(2-a)+2(2b+c)=5$

$4a-4b-2c=3$ — ㉡

㉠ & ㉡ : $b=2a-3$, $c=-2a+\frac{9}{2}$

$g(1)=0$ 이라면 $b+c=(2a-3)+(-2a+\frac{9}{2})=\frac{3}{2}=0$ 모순

$f(1)=0$ 이다. $1-a+b+c=-a+\frac{5}{2}=0$,

$a=\frac{5}{2}$, $b=2$, $c=-\frac{1}{2}$

$\boxed{39}$

$h(4)=16(4-a)+2(4b+c)=64-40+16-1=39$

20190921(나)

21. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x\geq 0$에서 정의된 함수

우함수, y축 대칭 $(f(-x)=f(x))$

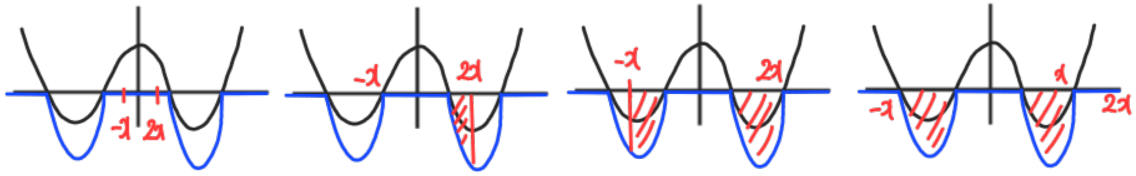
$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

$= h(t) = \begin{cases} 0, & f(t)\geq 0 \\ 2f(t), & f(t)<0 \end{cases}$

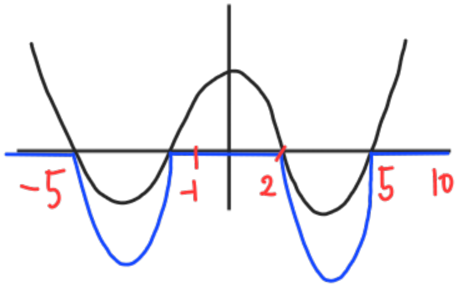
가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]



$g(x)=0=C_1$ $g(x)<0$, 감소 $g(x)<0$, 감소 $g(x)=C_2<0$



$f(x)=(x+5)(x+2)(x-2)(x-5)$

$\quad=(x^2-4)(x^2-25)$

$f(\sqrt{2})=2\times 23=46$

$\boxed{46}$

#Comment

① $f(x)>0$이면 (정적분)=(넓이)>0

② $f(x)<0$이면 (정적분)=$-$(넓이)<0

20201128(나)

28. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

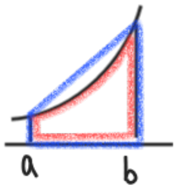
(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}\text{ 이다.}$$

(나) $\int_0^2 f(x)\,dx = 5\int_{-1}^1 x f(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

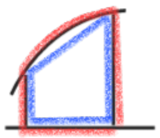
* 아래로 볼록한 함수 ($f''(x)>0$)



(사다리꼴) > (정적분)

$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) > \int_a^b f(x)\,dx$

* 위로 볼록한 함수 ($f''(x)<0$)

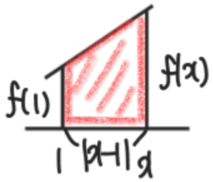


(사다리꼴) < (정적분)

$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) < \int_a^b f(x)\,dx$

(가) $f(x)=a_n x^n+\cdots$ 라 하고 대입해도 되지만..

(사다리꼴 넓이) = (정적분) 이므로 위로 볼록 X, 아래로 볼록 X ⇒ 직선!



$\frac{x-1}{2}(f(x)+f(1)) = \int_1^x f(t)\,dt$

따라서 $f(x)=ax+1$ ($\because f(0)=1$)

(나) $\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2 = 2a+2$

$5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx = 5\int_{-1}^1 ax^2+\cancel{x}\,dx = 5\times 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{10}{3}a$

$2a+2 = \frac{10}{3}a$, $a=\frac{3}{2}$ $\therefore f(x)=\frac{3}{2}x+1$

$f(4)=7$ $\boxed{7}$

#Comment

① (가) 조건을 사다리꼴 넓이로 해석하기

② (사다리꼴 넓이) VS (정적분) 대소 비교 → 위/아래 볼록성

2022예시12

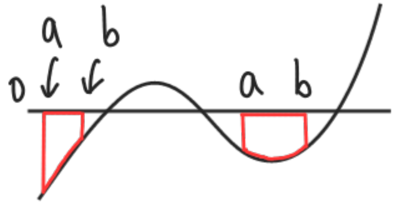
12. $0 < a < b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3 - 3x + k)\,dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

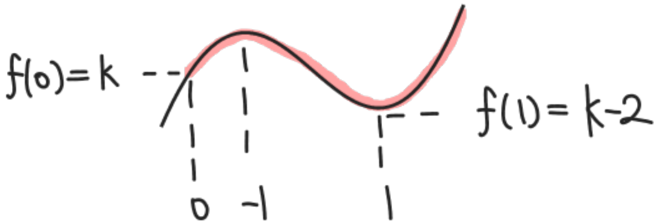
$f(x) = x^3 - 3x + k$

$f(x) < 0$ 인 x $(x \geq 0)$ 있으면 $\int_a^b f(x)\,dx < 0$ 인 a, b 존재



$x \geq 0$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$



$f(0) = k \geq 0$, $f(1) = k - 2 \geq 0$

$\therefore\ k \geq 2$ $\boxed{2}$

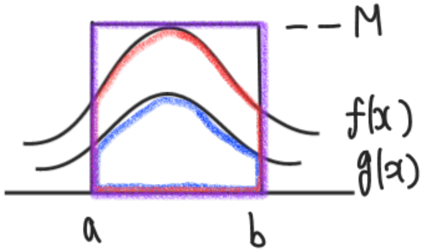
#Comment

① $f(x) \geq 0$이면 $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

② $f(x) \geq g(x)$이면 $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

③ $m \leq f(x)$이면 $\int_a^b f(x)\,dx \geq m(b-a)$

④ $f(x) \leq M$이면 $\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$



$0 \leq g(x) \leq f(x) \leq M$

$0 \leq \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

20210918(가)

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ \underline{\{\ln(1+x^4)\}^{10}} & (x>0)\end{cases}$$

$\{\log_e(1+x^4)\}^{10}$ $(e=2.71\times\times\times)$

미적 미선택자는 밑이 2.7인 로그로 이해

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x \underbrace{f(t)f(1-t)}_{=h(t)}\,dt$$

☆ 보자마자 $h(x)$는 $x=\frac{1}{2}$ 대칭!

$(h(1-x)=f(1-x)f(x)=h(x))$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a)\ge 1$인 실수 a가 존재한다.

ㄱ $x\le 0$ 이면 $x\le t\le 0$ 에서 $\underline{f(t)=0}$

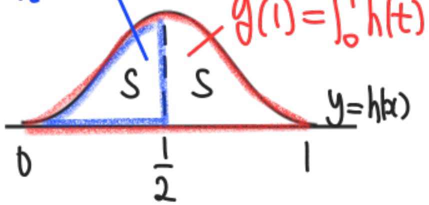
$$g(x)=\int_0^x \underbrace{f(t)}_{=0}f(1-t)\,dt=\int_0^x 0\,dt=0$$

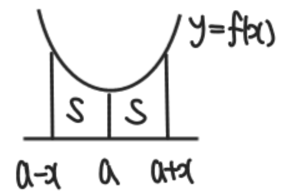
ㄴ 대칭성 있는 함수의 정적분 → 넓이로 생각해보자.

$g(1)=\int_0^1 h(t)\,dt,\quad g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\,dt$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\,dt=S$

$g(1)=\int_0^1 h(t)\,dt=2S$





$f(a-x)=f(a+x)$

$\int_{a-p}^{a+p} f(x)\,dx=2\int_a^{a+p} f(x)\,dx$

$\ln 2<1$ (미적분)

~~ㄷ~~ $0\le x\le 1$ 에서 $1+x^4\le 2$, $f(x)=\{\ln(1+x^4)\}^{10}\le(\ln 2)^{10}<1$

$0\le x\le 1$ 에서 $0\le 1-x\le 1$ 이므로 $0\le f(1-x)<1$

따라서 $0\le x\le 1$ 에서 $h(x)=f(x)f(1-x)<1$

$a=1$ 일때 최댓값 $g(1)=\int_0^1 h(t)\,dt<1\cdot(1-0)=1$

$\boxed{ㄱ, ㄴ}$

#Comment

① $f(a-x)=f(a+x)$이면 $x=a$ 선대칭

② $f(x)=f(2a-x)$이면 $x=a$ 선대칭

③ $x=a$ 선대칭이면 $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2\int_a^{a+p} f(x)dx$

④ $f(x)\le M$이면 $\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

20220914

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x\le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0)\end{cases}$$

(0, 0) 지나

② $-p$이동

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

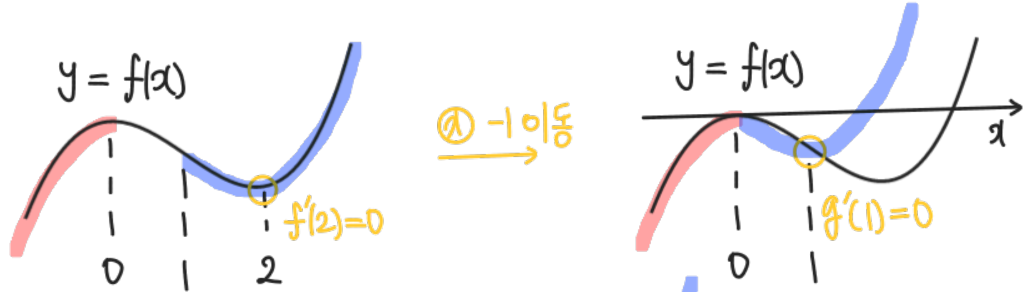
ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

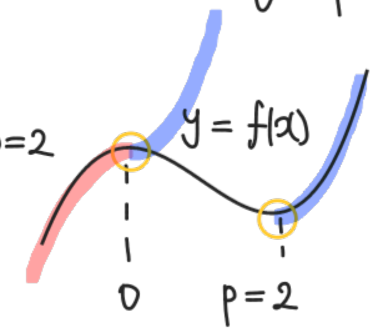
ㄷ. $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx\ge 0$이다.

$\boxed{ㄱ, ㄴ, ㄷ}$

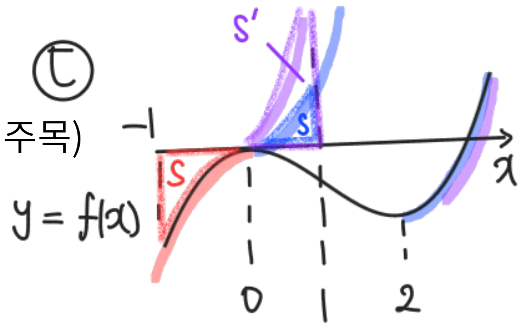
ㄱ



ㄴ $g'(0-)=f'(0)=0$,
$g'(0+)=f'(p)$ //, $f'(p)=0$. $p=2$

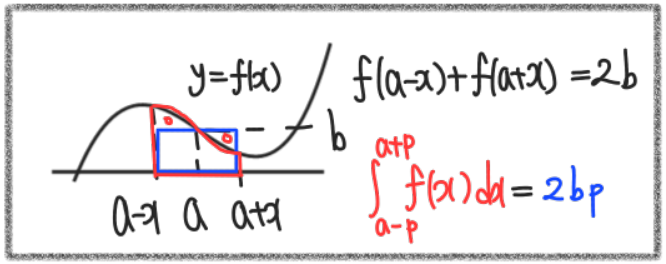


ㄷ



p=2 일때 대칭 S=S, $\int_{-1}^{1} g(x)dx=0$

p>2 일때 S'>S, $\int_{-1}^{1} g(x)dx>0$



#Comment

① $y=f(x-a)+b$그래프 그리는 방법(경계점에 주목)

② 삼차함수는 점대칭(변곡점)

③ $f(a-x)+f(a+x)=2b$이면 (a, b) 점대칭

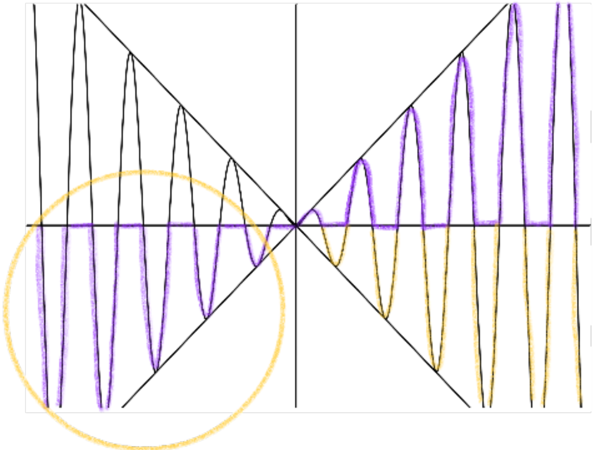
④ $f(2a-x)+f(x)=2b$이면 (a, b) 점대칭

⑤ (a, b) 점대칭이면 $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2bp$

20211120(가)

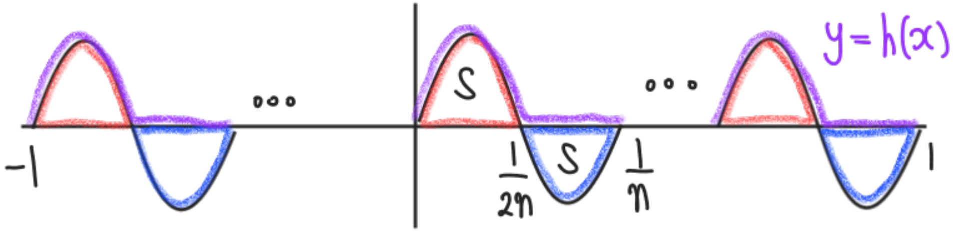
20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx=2,\quad \int_{-1}^{1} x\,h(x)\,dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.



[-1, 1] 에서 2n개

$y=f(nx)=\pi\sin(2n\pi x)$: 기함수

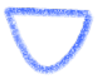


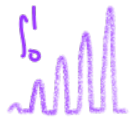
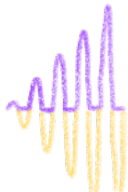
$$S=\int_0^{\frac{1}{2n}}\pi\sin(2n\pi x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2n}}=\frac{1}{n}$$ 미적

$$\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(nx)\times(0\text{ 또는 }1)\,dx=2$$

 → (윗부분 적분) $=\frac{1}{n}\times 2n=2$

 → (아랫부분 적분) $=-2$

$\int_{-1}^{1}xh(x)\,dx=$ $\int_{-1}^{0}$  $+$ $\int_{0}^{1}$  $=$  $\int_0^1$ $\int_0^1$ $=\int_0^1 x f(nx)\,dx$

$$\int_{-1}^{1}xh(x)\,dx=\int_0^1 x f(nx)\,dx=\int_0^1 \pi x\sin(2n\pi x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_0^1-\int_0^1 -\frac{1}{2n}\cos(2n\pi x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2n}+\left[\frac{1}{4n^2}\sin(2n\pi x)\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{2n}$$
$$=-\frac{1}{32}\qquad n=16\qquad \boxed{16}$$

미적분

#Comment

① (기함수)×(기함수)=(우함수)

② (일차함수)×(삼각함수) 꼴 정적분

곱함수의 연속성과 미분가능성

#세 줄 요약

$x=a$에서

① $f(x)$ 불연속, $g(x)$ 연속, $f(x)g(x)$ 연속이면 $g(a)=0$

② $f(x)$ 불연속(좌극한, 우극한, 함숫값 존재)이면
$(x-a)f(x)$ 연속, $(x-a)^2f(x)$ 미분가능
(주의 : 극한값 존재 시 $(x-a)f(x)$ 미분가능)

③ $f(x)$ 불연속(좌극한, 우극한, 함숫값 중 적어도 하나 존재X)이면
연속성, 미분가능성 정의대로 따져보기

① 증명

연속 연속

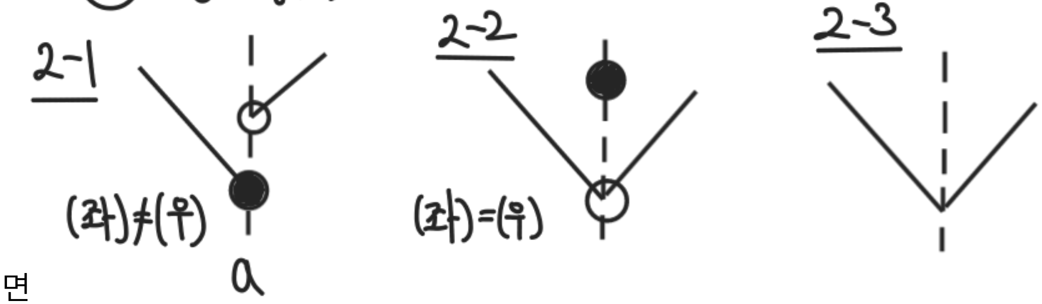
$g(a)\neq 0 \Rightarrow \underline{f(x)g(x)} \div \underline{g(x)} = \underline{f(x)}$

① 직관적 이해 (좌, 우극한 존재 시)

	$f(x)$	$\times$	$g(x)$	서로 다른 값에
$x\to a+$	α	$\times$	$g(a)$	같은 $g(a)$ 곱해서
$x\to a-$	β	$\times$	$g(a)$	같아지려면
$x=a$	γ	$\times$	$g(a)$	$\therefore g(a)=0$

좌,우극한, 함숫값 존재하지만
같지 않을 때 $(x-a)$ 곱해주면
모두 0으로 같아져 연속 되는구나 → ②-1

② $y=f(x)$



	2-1	2-2	2-3
$(x-a)f(x)$	연속 O, 미분 X	연속 O, 미분 O	미분 O
$(x-a)^2f(x)$	연속 O, 미분 O	〃	

$\boxed{\text{증명}}$

좌, 우 달라도 0이랑 곱해짐

$(x-a)f(x)$ 연속 $\Leftrightarrow 0=\lim_{x\to a}\underbrace{(x-a)}_{\to 0}f(x)$

$(x-a)f(x)$ 미·가 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)f(x)-0\cdot f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}f(x)$ 존재

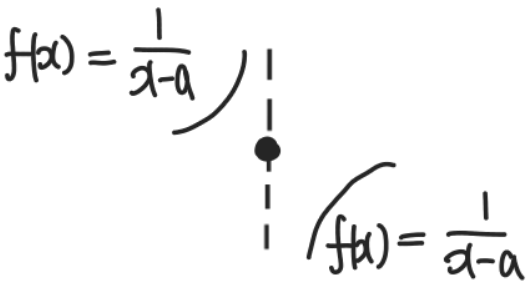
2-1 X
2-2 O
2-3 O

$(x-a)^2f(x)$ 미·가 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)^2f(x)-0\cdot f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x-a)f(x)$ 존재

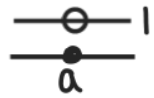
③ $(x-a)f(x)$는 $x=a$에서 연속 OR 미분가능 ? (거짓)

→ 좌극한, 우극한 존재하지 않을 때 ($\pm\infty$, 2의 발산)는 부정형 가능하므로 직접 "정의대로" 확인하기

3-1

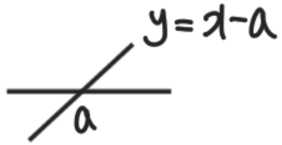


$(x-a)f(x)$



연속 X

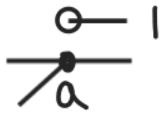
$(x-a)^2 f(x)$



연속 O 미분 O

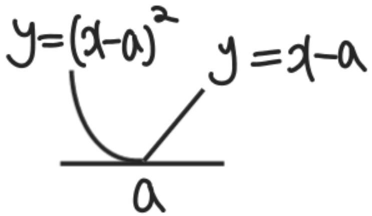
3-2

$(x-a)f(x)$



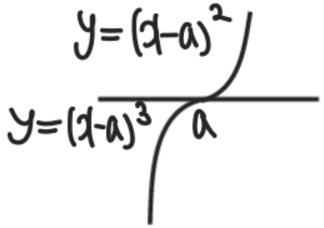
연속 X

$(x-a)^2 f(x)$



연속 O 미분 X

$(x-a)^3 f(x)$



연속 O 미분 O

20201120(나)

20. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x\le 0) \\ x-1 & (0<x\le 2) \\ 2x-3 & (x>2) \end{cases}$$

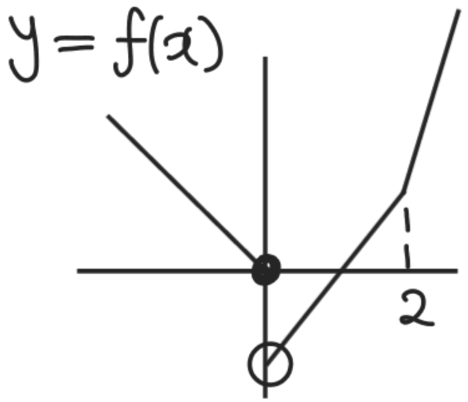
와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.



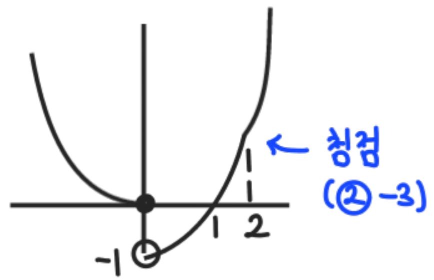
ㄱ $f(x)$ 가 $x=0$ 불연속이므로 $p(0)=0$ (∵ ①)

ㄴ $x=0$ (좌)≠(우) 이므로 $p(x)=x^2Q_1(x)$ (∵ ②-1)

$x=2$ (좌)=(우) 이므로 $p(x)=(x-2)Q_2(x)$ (∵ ②-3)

따라서 $p(x)=x^2(x-2)Q(x)$

ㄷ $\{f(x)\}^2=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ (x-1)^2 & 0<x\le 2 \\ (2x-3)^2 & x>2 \end{cases}$



$x=0$ (좌)≠(우) 이므로 $p(x)=x^2Q_1(x)$ (∵ ②-1)

$x=2$ (좌)=(우) 이므로 $p(x)=(x-2)Q_2(x)$ (∵ ②-3)

따라서 $p(x)=x^2(x-2)^1Q(x)$

$\boxed{ㄱ, ㄴ}$

20171030(나)

30. 함수 $f(x)=|3x-9|$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}f(x+k) & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$$

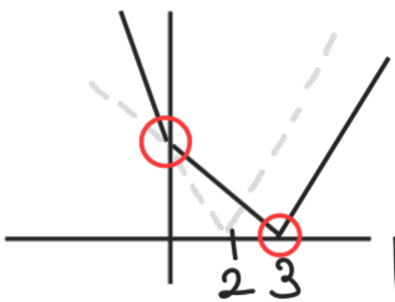
이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $h(k)$ 의 값의 합을 구하시오. (단, $k>0$) [4점]

(가) 함수 $g(x)h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=15$

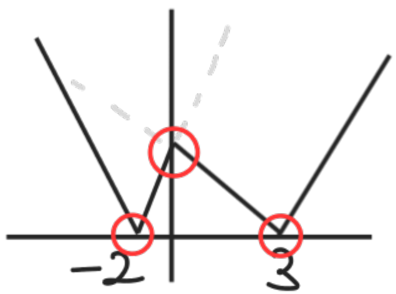
Case 1. $g(x)$ 가 $x=0$ 연속(②-3)

$g(0-)=\frac{3}{2}f(k)=\frac{9}{2}|k-3|$

$g(0+)=f(0)=9$ // $k=1$ 또는 $k=5$



$k=1$



$k=5$

$k=1$ 인 경우, $x=0,\ 3$ 첨점, ②-3 이용

$h(x)=x\cdot(x-3)\cdot(x-a)=x^3-(a+3)x^2+3ax$

$h'(x)=3x^2-2(a+3)x+3a$, $h'(3)=-3a+9=15$, $a=-2$

$h(x)=x(x-3)(x+2)$, $h(k)=h(1)=-6$

$k=5$ 인 경우, $x=-2,\ 0,\ 3$ 첨점. ②-3 이용

$h(x)=x(x+2)(x-3)$, $h'(3)=15$ 성립.

$h(k)=h(5)=70$

Case 2. $g(x)$ 가 $x=0$ 불연속 (②-1)

$x=0$ 불연속 x^2 인수, $x=3$ 첨점 $(x-3)$ 인수

$h(x)=x^2(x-3)$, $h'(3)=15$ 성립 X

$70+(-6)=64$ $\boxed{64}$