출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	⑤	12	④	23	①	23	③	23	⑤
2	③	13	②	24	④	24	④	24	②
3	②	14	⑤	25	②	25	①	25	③
4	②	15	④	26	③	26	②	26	④
5	①	16	7	27	⑤	27	⑤	27	①
6	③	17	4	28	③	28	④	28	④
7	⑤	18	6	29	32	29	85	29	263
8	①	19	21	30	129	30	89	30	48
9	④	20	13						
10	④	21	34						
11	③	22	26						

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

공통과목

1. 정답) ⑤ [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $2^{\frac{4}{3}}\times\sqrt[3]{4}=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}=2^2=4$

2. 정답) ③ [수학Ⅱ 정적분]

해설 : $\int_0^1(3x^2+4x)dx=\left[\ x^3+2x^2\right]_0^1=1+2=3$

3. 정답) ② [수학Ⅰ 삼각함수]

해설 : $\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$,

$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

4. 정답) ② [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x\to-1+}f(x)=-1$이고, $\lim_{x\to 2-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to 2-}f(x)=(-1)+0=-1$이다.

5. 정답) ① [수학Ⅰ 등비수열]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면,

$8\times\left(\frac{1}{2}\times r^2\right)=\left(\frac{1}{2}\times r\right)\times\left(\frac{1}{2}\times r^5\right)$에서

$r^4=16,\ r^2=4$이다.

따라서 $a_3+a_5=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}r^4=2+8=10$이다.

6. 정답) ③ [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{ax+7}-4}=b$에서 $b\neq 0$인데 (분자)$\to 0$이므로

(분모)$\to 0$이다.

$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{ax+7}-4\right)=0$에서 $\sqrt{a+7}-4=0,\ a=9$

$b=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{9x+7}-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{9x+7}+4\right)}{9x+7-16}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{9x+7}+4\right)}{9(x-1)}=\frac{\sqrt{9+7}+4}{9}=\frac{8}{9}$

$a=9,\ b=\frac{8}{9}$이므로 $ab=8$이다.

7. 정답) ⑤ [수학II 도함수의 활용]

해설 : $f(x)=x(x-2)(x-4)$라 하면

$f'(x)=(x-2)(x-4)+x(x-4)+x(x-2)$에서

$f(a)=0,\ f'(a)=-4$이므로 $a=2$이다.

직선 $y=-4x+b$가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=-8+b,\ b=8$이고,

따라서 $a+b=2+8=10$이다.

8. 정답) ① [수학I 수열의 합]

해설 : $\dfrac{2n-1}{2}<k<\dfrac{4n+3}{2},\ n-\dfrac{1}{2}<k<2n+\dfrac{3}{2}$에서

가능한 자연수 k의 값의 범위는 $n \le k \le 2n+1$이므로

$a_n=(2n+1)-n+1=n+2$이다.

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(n+2)=\frac{10\times 11}{2}+2\times 10=55+20=75$$

9. 정답) ④ [수학II 함수의 극한]

해설 : $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^2}{x}=4$에서 함수 $f(x)-2x^2$은

최고차항의 계수가 4인 일차함수이므로

$f(x)-2x^2=4x+b$라 할 수 있다.

따라서 $f(x)=2x^2+4x+b$이고,

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-4}{x-a}=4$에서 (분모)→0이므로, (분자)→0이다.

$f(a)=4,$

$2a^2+4a+b=4,$

$b=-2a^2-4a+4$

이므로 $f(x)=2x^2+4x-2a^2-4a+4$이다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-4}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2x^2+4x-2a^2-4a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2(x+a)(x-a)+4(x-a)}{x-a}=4a+4$$

에서 $4a+4=4$이므로 $a=0$이다.

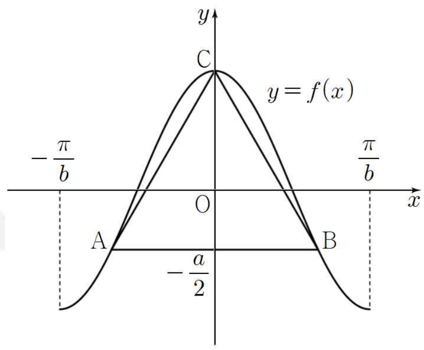
따라서 $f(x)=2x^2+4x+4$이고, $f(a+2)=f(2)=20$이다.

10. 정답) ④ [수학I 삼각함수의 그래프]

해설 : 함수 $a\cos bx$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{b}$이고,

주어진 상황을 그래프를 그려 나타내면 아래와 같다.

(점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다고 하자.)



두 점 A, B의 x좌표는 각각

방정식 $a\cos bx=-\dfrac{a}{2}\left(-\dfrac{\pi}{b}<x<\dfrac{\pi}{b}\right)$의 실근이므로

$\cos bx=-\dfrac{1}{2}$에서 $x=-\dfrac{2\pi}{3b}$ 또는 $x=\dfrac{2\pi}{3b}$이다.

$\mathrm{A}\left(-\dfrac{2\pi}{3b},\ -\dfrac{a}{2}\right),\ \mathrm{B}\left(\dfrac{2\pi}{3b},\ -\dfrac{a}{2}\right)$인데

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$2\times\dfrac{2\pi}{3b}=4,\ b=\dfrac{\pi}{3}$이다.

선분 AB가 y축과 만나는 점의 좌표를 D라 하면

선분 CD의 길이는 정삼각형 ABC의 높이와 같으므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{3}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4,\ a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 $ab=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{9}$이다.

11. 정답) ③ [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : $f(x)=a^{x-1}$, $g(x)=\log_a(x+1)$이라 하자.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 선분 AB와 만나므로

$2\le f(3)\le 8$이고 $2\le g(3)\le 8$이다.

$2\le f(3)=a^2\le 8$에서

$\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

이고,

$2\le g(3)=\log_a 4\le 8$에서 $1\le \log_a 2\le 4$이고

로그의 밑의 변환에 의해

$$1\le \frac{1}{\log_2 a}\le 4,$$

$$\frac{1}{4}\le \log_2 a\le 1$$

$$2^{\frac{1}{4}}\le a\le 2 \ \cdots \ ㉡$$

이다. ㉠, ㉡에서 실수 a의 값의 범위는

$$\sqrt{2}\le a\le 2$$

이므로 $M=2$, $m=\sqrt{2}$, $Mm=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$이다.

12. 정답) ④ [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : 조건 (가)에서 $f(1)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x^2+px+q)$이라 하면,

$f'(x)=x^2+px+q+(x-1)(2x+p)$이므로 $x>1$에서

$g(x)=f(x)-(x-1)f'(x)$

$=(x-1)(x^2+px+q)-(x-1)\{x^2+px+q+(x-1)(2x+p)\}$

$=(x-1)^2(2x+p)$

이다. 조건 (나)에서 $1<x<4$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)>0$이고 $g(4)=0$이므로

$8+p=0$,

$p=-8$

이다. $f'(x)=x^2-8x+q+2(x-1)(x-4)$에서

$f'(2)=4-16+q+2\times1\times(-2)=3$

이므로 $q=19$이다. 따라서

$f(x)=(x-1)(x^2-8x+19)$

이므로 $f(4)=3\times(16-32+19)=3\times3=9$이다.

13. 정답) ② [수학Ⅰ 삼각함수의 활용]

해설 : $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하면 사각형 ACED는 한 원에 내접하고 있으므로

$\angle\mathrm{CED}=\pi-\theta$이다.

$\overline{\mathrm{CE}}=a$라 하고 삼각형 CDE에서 코사인법칙을 이용하면

$16=9+a^2-2\times3\times a\times\cos(\pi-\theta)$,

$2a^2+3a-14=0$,

$(2a+7)(a-2)=0$

에서 $\overline{\mathrm{CE}}=a=2$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=6-2=4$이다.

삼각형 BDE에서 코사인법칙을 이용하면 $\angle\mathrm{BED}=\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=9+16-2\times3\times4\times\frac{1}{4}$$

에서 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{19}$이다.

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BED}$, $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{EBD}$에서

두 삼각형 ABC와 EBD는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{BD}}$,

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{BE}}}=\dfrac{6\times3}{\sqrt{19}}=\dfrac{18}{19}\sqrt{19}$이다.

14. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 정적분의 활용]

해설 : 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$F(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 사차함수이고,

$g(x)=F(x)-F(a)$이다.

따라서 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

방정식 $F(x)=F(a)$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) 함수 $F(x)$가 극댓값을 가지지 않을 때,

방정식 $F(x)=F(a)$가 서로 다른 세 실근을 가지는

실수 a의 값이 존재하지 않는다.

(ⅱ) 함수 $F(x)$가 한 개의 극댓값과 두 극솟값을 가지면서

(ⅱ-1) 두 극솟값이 다를 때,

방정식 $F(x)=F(a)$이 서로 다른 세 실근을 가지는

실수 a의 개수가 3보다 크다.

(ⅱ-2) 두 극솟값이 같을 때,

방정식 $F(x)=F(a)$이 서로 다른 세 실근을 가지는 실수

a는 $F(a)$의 값이 함수 $F(x)$의 극댓값과 같은 경우이다.

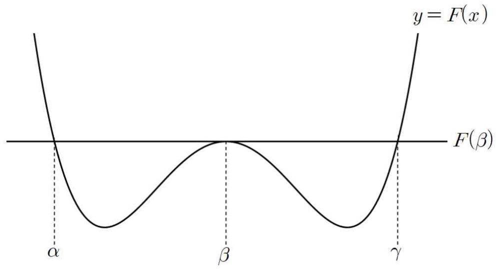
경우 (ⅱ-2)에서

함수 $F(x)$가 $x=\beta$에서 극댓값을 가질 때,

방정식 $F(x)=F(\beta)$의 서로 다른 세 실근을 각각

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$

라 하고 함수 $y=F(x)$의 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.



ㄱ. (참)

함수 $F(x)$의 두 극솟값이 같으므로

$y=F(x)$의 그래프는 직선 $x=\beta$에 대하여 대칭인 그래프이다.

따라서 $k>2$이면 $\alpha=0,\ \beta=2$이고 $k=\gamma=4$이다.

ㄴ. (참)

$0<k<2$이면 $\alpha=0,\ \gamma=2$이고 $k=\beta=1$이므로

함수 $y=F(x)$의 그래프는

직선 $x=1$에 대하여 대칭인 그래프이고

$F'(x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

점 $(1,\ f(1))$에 대하여 대칭인 그래프이다.

또, 함수 $F(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$F'(1)=f(1)=0$

이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(2-x)$가 성립한다.

따라서 $f(-1)=-f(3)$이므로 $f(-1)+f(3)=0$이다.

ㄷ. (참)

$k<0$이면 $k=\alpha=-2,\ \beta=0,\ \gamma=2$이므로

$$F(x)=\frac{1}{4}x^2(x+2)(x-2)+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4-x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이다. 또, $g(x)=F(x)-F(a)$에서

$$\int_{-a}^{a}g(x)dx=\int_{-a}^{a}\left\{\left(\frac{1}{4}x^4-x^2\right)-\left(\frac{1}{4}a^4-a^2\right)\right\}dx$$

$$=2\times\int_{0}^{a}\left\{\left(\frac{1}{4}x^4-x^2\right)-\left(\frac{1}{4}a^4-a^2\right)\right\}dx$$

$$=2\times\left[\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a-2\times\left(\frac{1}{4}a^4-a^2\right)\times a$$

$$=\frac{1}{10}a^5-\frac{2}{3}a^3-\frac{1}{2}a^5+2a^3$$

$$=-\frac{4}{10}a^5+\frac{4}{3}a^3=-\frac{4}{30}a^3(3a^2-10)$$

이고, $\int_{-a}^{a}g(x)dx=-\frac{4}{30}a^3(3a^2-10)\le 0$에서

① $a>0$이면 $-\frac{4}{30}a^3<0$이므로

$a^2\ge\frac{10}{3}$인 모든 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a}g(x)dx\le 0$이다.

② $a=0$이면 $\int_{-a}^{a}g(x)dx=0$이다.

③ $a<0$이면 $-\frac{4}{30}a^3>0$이므로

$a^2\le\frac{10}{3}$인 모든 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a}g(x)dx\le 0$이다.

따라서 부등식 $\int_{-a}^{a}g(x)dx\le 0$을 만족시키는 실수 a의 최솟값

m에 대하여

$m<0,\ m^2=\frac{10}{3}$

이다. 이때, $F'(x)=f(x)=x^3-2x$이고,

$f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(m)=3\times\frac{10}{3}-2=8$이다.

15. 정답) ④ [수학Ⅰ 삼각함수의 그래프]

해설 : 양수 k에 대하여 방정식 $\sin kx=\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값을

작은 수부터 크기순으로 나열하면 아래와 같다.

$$x=\frac{\pi}{6k},\ \frac{5\pi}{6k},\ \frac{13\pi}{6k},\ \frac{17\pi}{6k},\ \cdots$$

따라서 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 방정식 $\sin kx=\frac{1}{2}$의 실근의 개수를

$f(k)$라 할 때, 함수 $f(k)$는 위에 나열한 x의 값이 각각

2π가 될 때 불연속이다. 따라서

$$\frac{\pi}{6a_1}=2\pi,\ \frac{5\pi}{6a_2}=2\pi,\ \frac{13\pi}{6a_3}=2\pi,\ \frac{17\pi}{6a_4}=2\pi,\ \cdots$$

이고,

$$a_1=\frac{1}{12},\ a_2=\frac{5}{12},\ a_3=\frac{13}{12},\ a_4=\frac{17}{12},\ \cdots$$

이다.

임의의 자연수 l에 대하여

$$a_{2l-1}=l-\frac{11}{12},\ a_{2l}=l-\frac{7}{12}$$

이므로 $a_{2l-1}+a_{2l}=2l-\frac{3}{2}$이다.

임의의 자연수 p에 대하여

(ⅰ) $m=2p-1$이면

$$\sum_{n=1}^{m}a_n=\sum_{n=1}^{2p-1}a_n$$
$$=\left(\sum_{l=1}^{p-1}a_{2l-1}+\sum_{l=1}^{p-1}a_{2l}\right)+a_{2p-1}$$
$$=\sum_{l=1}^{p-1}\left(2l-\frac{3}{2}\right)+a_{2p-1}$$
$$=p(p-1)-\frac{3(p-1)}{2}+p-\frac{11}{12}$$
$$=p^2-\frac{3}{2}p+\frac{7}{12}$$

(ⅱ) $m=2p$이면

$$\sum_{n=1}^{m}a_n=\sum_{n=1}^{2p}a_n$$
$$=\sum_{l=1}^{p}a_{2l-1}+\sum_{l=1}^{p}a_{2l}$$
$$=\sum_{l=1}^{p}\left(2l-\frac{3}{2}\right)$$
$$=p(p+1)-\frac{3}{2}p=p^2-\frac{1}{2}p$$

모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이므로 $\sum_{n=1}^{m+1}a_n>\sum_{n=1}^{m}a_n$이고

(ⅱ)에서 $p=8$이면 $\sum_{n=1}^{16}a_n=64-\frac{1}{2}\times 8=60$이므로

$\sum_{n=1}^{m}a_n>60$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 17이다.

16. 정답) 7 [수학Ⅱ 부정적분]

해설 : $f(x)=\int f'(x)dx$

$$=\int(6x^2+3)dx=2x^3+3x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

에서 $f(0)=2$이므로 $C=2$,

$$f(x)=2x^3+3x+2$$

이므로 $f(1)=2+3+2=7$이다.

17. 정답) 4 [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : $g(1)=4$이므로 $f(4)=1$이다.

$f(4)=\log_2(4-3)+a=1$이므로 $a=1$,

$$f(x)=\log_2(x-3)+1$$

에서 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 $x=3$이므로

곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $y=3$이다. 따라서 $b=3$이고,

$a+b=1+3=4$이다.

18. 정답) 6 [수학Ⅱ 정적분의 활용]

해설 : 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)=3t^2+2at$$

이다. 점 P가 시각 $t=2$에서 운동방향을 바꾸므로

$$v(2)=0,\ 12+4a=0,\ a=-3$$

이다. 따라서 $v(t)=3t^2-6t$이고, 시각 $t=1$에서 $t=3$까지

점 P의 이동거리를 구하면

$$\int_1^3|v(t)|dt=\int_1^3|3t^2-6t|dt$$
$$=\int_1^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$
$$=\Big[-t^3+3t^2\Big]_1^2+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^3$$
$$=\{(-8+12)-(-1+3)\}+\{(27-27)-(8-12)\}$$
$$=(4-2)+(0+4)=6$$

※별해

$$x(1)=-1\ \rightarrow\ x(2)=-3\ \rightarrow\ x(3)=1$$

에서

시각 $t=1$에서 $t=2$까지 이동거리는 2,

시각 $t=2$에서 $t=3$까지 이동거리는 4

이므로

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 이동거리는 $2+4=6$

이다.

19. **정답)** 21 **[수학Ⅰ 지수와 로그]**

해설 : 10 이하의 자연수 n에 대하여

$(11-n)\times\log_3 a_n=\log_3 9^n=2n$이므로

$$f(n)=\log_3 a_n=\frac{2n}{11-n}$$

이다. $f(4)=\frac{8}{7}$이므로

$f(4)\times f(m)<4$,

$f(m)<\frac{7}{2}$,

$\frac{2m}{11-m}<\frac{3}{2}$,

$4m<7(11-m)$,

$11m<77$,

$m<7$

에서 가능한 자연수 m은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로

모든 자연수 m의 값의 합은 21이다.

20. **정답)** 13 **[수학Ⅱ 도함수의 활용]**

해설 : 함수 $f(x)$가 극솟값을 가지므로 $f'(x)=3x^2-8px+q$에서

방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2-8px+q=0$에서 판별식을 이용하면

$16p^2-3q>0$ ⋯ ㉠

이때, 이차방정식 $3x^2-8px+q=0$의 두 근을 직접 구하면

$$x=\frac{4p\pm\sqrt{16p^2-3q}}{3}$$

인데, ㉠을 만족하는 모든 자연수 p, q에 대하여

$4p=\sqrt{16p^2}>\sqrt{16p^2-3q}$

이므로 ㉠을 만족하는 함수 $f(x)$는

모든 극값을 $x>0$에서 갖는다.

$f(x)=x(x^2-4px+q)$에서 $f(x)$의 극솟값이 0 이상이므로

이차방정식 $x^2-4px+q=0$은 서로 다른 두 허근 또는

중근인 실근을 가져야 한다.

$4p^2-q\le 0$ ⋯ ㉡

두 부등식 ㉠, ㉡에 의하여 주어진 조건을 만족시키는

두 자연수 p, q는 아래의 부등식을 만족시켜야 한다.

$$4p^2\le q<\frac{16}{3}p^2$$

(ⅰ) $p=1$이면

$4\le q<\frac{16}{3}$에서 q가 자연수이므로 $4\le q\le 5$이고,

조건을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 2이다.

(ⅱ) $p=2$이면

$16\le q<\frac{64}{3}$에서 q가 자연수이므로 $16\le q\le 21$이고,

조건을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 6이다.

(ⅲ) $p=3$이면

$36\le q<48$에서 q가 40 이하의 자연수이므로 $36\le q\le 40$

이고, 조건을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 5이다.

(ⅳ) $p\ge 4$이면

$q\ge 4p^2\ge 64$이므로 40 이하의 자연수 q는 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 주어진 함수 $f(x)$가 0 이상인 극솟값을

가지도록 하는 40 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍의

개수는 $2+6+5=13$이다.

21. **정답)** 34 **[수학Ⅰ 수학적 귀납법]**

해설 : $a_5>0$이면 $a_6=2-a_5$인데 $a_6=-a_5$이므로 모순이다.

따라서 $a_5\le 0$이고, $a_6=a_5+4$이므로 $a_5=-2$이다.

$a_4>0$이면 $a_5=2-a_4$이므로 $a_4=4$이고,

$a_4\le 0$이면 $a_5=a_4+4$이므로 $a_4=-6$이다.

같은 방법으로 수열 $\{a_n\}$의 각 항으로 가능한 값들을

5항부터 1항까지의 순서로 나열하면 아래와 같다.

<table>
<tr><td>a_5</td><td colspan="7">-2</td></tr>
<tr><td>a_4</td><td colspan="3">4</td><td colspan="4">-6</td></tr>
<tr><td>a_3</td><td colspan="3">0</td><td>8</td><td colspan="3">-10</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>2</td><td colspan="2">-4</td><td rowspan="2">×</td><td>12</td><td colspan="2">-14</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>-2</td><td>6</td><td>-8</td><td>×</td><td>16</td><td>-18</td></tr>
</table>

따라서 $M=16$, $m=-18$이므로 $M-m=16-(-18)=34$이다.

* $a_3=8$일 때,

$a_2>0$이면 $a_3=2-a_2$에서 $a_2=-6$이므로 모순이고,

$a_2\le 0$이면 $a_3=a_2+4$에서 $a_2=4$이므로 모순이다.

* $a_2=12$일 때,

$a_1>0$이면 $a_2=2-a_1$에서 $a_2=-10$이므로 모순이고,

$a_1\le 0$이면 $a_2=a_1+4$에서 $a_2=8$이므로 모순이다.

22. **정답)** 26 **[수학Ⅱ 도함수의 활용]**

해설 : 함수 $f'(x)$는 일차항의 계수가 양수인 일차함수이고,

함수 $xf'(x)$는 이차항의 계수가 양수인 이차함수이므로

$g(x)=\int_a^x tf'(t)dt$는 삼차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.

$g(a)=0$이므로 양수 m에 대하여

$g(x)=m(x-a)(x^2+qx+r)$

이라 할 수 있고,

함수 $|(x-a)g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

함수 $|x^2+qx+r|$이 미분가능해야하고,

방정식 $x^2+qx+r=0$은 중근 또는 허근을 가져야 한다.

따라서 방정식 $g(x)=g(a)=0$의 근이

① $x=a$로 유일하거나

② $x=a$와 $x=b$ $(a\neq b)$인 중근

일 때, 함수 $|(x-a)g(x)|$가 미분가능하므로

주어진 조건을 만족하려면

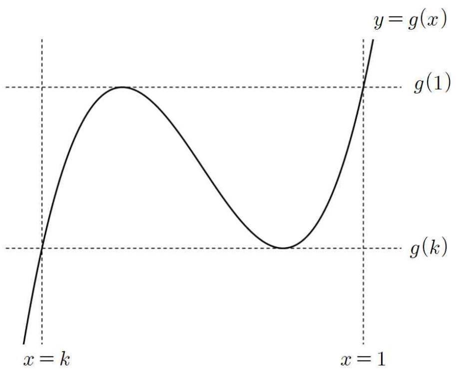
함수 $g(x)$는 $x=k$에서 극값을 가지지 않고,

$g(k)$는 함수 $g(x)$의 극솟값과 같아야 하고,

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지지 않고,

$g(1)$은 함수 $g(x)$의 극댓값과 같아야 한다.

위의 결과를 그래프를 그려 나타내면 아래와 같다.



이때, $g(x)=\int_a^x tf'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=xf'(x)$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가지고 $f'(0)\neq 0$이다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가질 때,

$g(x)=mx^2(x-1)=mx^3-mx^2$이므로

$g'(x)=3mx^2-2mx$에서 $f'(x)=3mx-2m$이다.

$f(x)=\frac{3}{2}mx^2-2mx+C_1$ (C_1은 적분상수)라 하면

$f(1)=1$이므로 $C_1=\frac{m}{2}+1$이다.

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}mx^2-2mx+\frac{m}{2}+1$이고

방정식 $f(x)=g'(x)$가 중근을 가지므로

이차방정식 $f(x)-xf'(x)=0$이 중근을 가진다.

$$f(x)-xf'(x)=\left(\frac{3}{2}mx^2-2mx+\frac{m}{2}+1\right)-(3mx^2-2mx)$$

$$=-\frac{3}{2}mx^2+\frac{m}{2}+1$$

에서 $\frac{m}{2}+1=0$, $m=-2$인데 m는 양수이므로 모순이다.

(ⅱ) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가질 때,

$g(x)=mx^2(x-k)=mx^3-mkx^2$이므로

$g'(x)=3mx^2-2mkx$에서 $f'(x)=3mx-2mk$이다.

$f'\left(\frac{2}{3}k\right)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\frac{2}{3}k$에서 극댓값을 가지고,

$g\left(\frac{2}{3}k\right)=g(1)$이므로 $-\frac{4}{27}k^3=1-k$에서 $k=-3$이다.

$f(x)=\frac{3}{2}mx^2+6mx+C_2$ (C_2는 적분상수)라 하면

$f(1)=1$이므로 $C_2=-\frac{15}{2}m+1$이다.

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}mx^2+6mx-\frac{15}{2}m+1$이고

방정식 $f(x)=g'(x)$가 중근을 가지므로

이차방정식 $f(x)-xf'(x)=0$이 중근을 가진다.

$$f(x)-xf'(x)=\left(\frac{3}{2}mx^2+6mx-\frac{15}{2}m+1\right)-(3mx^2+6mx)$$

$$=-\frac{3}{2}mx^2-\frac{15}{2}m+1$$

에서 $-\frac{15}{2}m+1=0$, $m=\frac{2}{15}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x$이므로

$f(3)=\frac{21}{5}$이고, $p+q=21+5=26$이다.

확률과 통계

23. 정답) ① [확률과 통계 경우의 수 | 이항정리]

해설 : ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_6+{}_7C_7=2^7$이므로

$$\sum_{n=1}^{6}{}_7C_n=({}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_6+{}_7C_7)-({}_7C_0+{}_7C_7)$$

$$=2^7-2=128-2=126$$

24. 정답) ④ [확률과 통계 확률분포 | 이항분포]

해설 : $E(X)+V(X)=36p+36p(1-p)$에서

$-36p^2+72p=32,\ 9p^2-16p+8=0,\ (3p-2)(3p-4)=0$

이므로 $p=\frac{2}{3}$이다. $(\because\ p\le 1)$

25. 정답) ② [확률과 통계 조건부확률 | 사건의 독립]

해설 : 두 사건 A와 B가 서로 독립이면

두 사건 A와 B^C도 서로 독립이므로

$P(A\cap B^C)=P(A)\times P(B^C)$

$=P(A)\times(1-P(B))$

$=P(A)-P(A)\times P(B)$

$=P(A)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}\ \cdots$ ㉠

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{8}\ \cdots$ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $P(B)=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$이다.

26. 정답) ③ [확률과 통계 경우의 수 | 중복순열]

해설 : $f(3)$의 값으로 경우를 분류하여 함수 f의 개수를 세자.

(ⅰ) $f(3)=1$일 때

순서쌍 $(f(1),f(2))$가 $(1,1)$인 경우를 제외하고

항상 성립하므로 ${}_3\Pi_2-1=8$

(ⅱ) $f(3)=2$일 때

순서쌍 $(f(1),f(2))$가 $(1,1),\ (1,2),\ (2,1)$인 경우를

제외하고 항상 성립하므로 ${}_3\Pi_2-3=6$

(ⅲ) $f(3)=3$일 때

순서쌍 $(f(1),f(2))$가 $(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3),\ (3,1)$인

경우를 제외하고 항상 성립하므로 ${}_3\Pi_2-5=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 가능한 함수 f의 개수는

$8+6+4=18$이다.

27. 정답) ⑤ [확률과 통계 확률분포 | 정규분포]

해설 : $P(X\le 2)=P(X\ge 5)$에서

$P\left(Z\le\frac{2-m}{\sigma}\right)=P\left(Z\ge\frac{5-m}{\sigma}\right)$이므로

$2-m=-(5-m),\ m=\frac{7}{2}$이다.

$P(X\ge 5)=P\left(Z\ge\frac{5-\frac{7}{2}}{\sigma}\right)=0.1587=0.5-0.3413$에서

$\frac{3}{2\sigma}=1,\ \sigma=\frac{3}{2}$이다.

$P(m\le X\le m+3)=P\left(\frac{m-m}{\sigma}\le Z\le\frac{m+3-m}{\sigma}\right)$

$=P(0\le Z\le 2)=0.4772$

28. 정답) ③ [확률과 통계 조건부확률]

해설 : 두 주머니에서 공을 한 개씩 꺼내는 시행을 두 번 할 때

가능한 전체 경우의 수는 $3\times3\times2\times2=36$이다.

첫 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자가 서로소인 사건을 A, 두 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자의 합이 8 이상인 사건을 B라 하자.

첫 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자의 순서쌍으로 가능한 것 중 두 수가 서로소인 순서쌍은 아래와 같다.

$(1,4),\ (1,5),\ (1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (3,5)$

각각의 경우에서 두 번째 시행의 경우의 수는 $2\times2=4$이므로

$P(A)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$이다.

위의 각각의 경우에서 두 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에

적혀있는 숫자의 합이 8 이상이 되는 순서쌍을 나열해보자.

시행 1	시행 2
$(1,4)$	$(2,6),\ (3,5),\ (3,6)$
$(1,5)$	$(2,6),\ (3,6)$
$(1,6)$	$(3,5)$
$(2,5)$	$(3,6)$
$(3,4)$	$(2,6)$
$(3,5)$	$(2,6)$

위의 표에 의해 두 사건 A와 B가

모두 일어나는 경우의 수는 9이므로 $P(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$이다.

따라서 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$이다.

29. 정답) 32 [확률과 통계 통계적 추정 | 표본평균]

해설 : 한 번의 시행에서 나오는 흰 공의 개수를 X라 할 때, 확률변수 X의 값으로 가능한 것은 0, 1, 2이다.

따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\mathrm{P}(X=2)\times\mathrm{P}(X=2)$이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{5}$이다. ($\because$ $\mathrm{P}(X=2)\geq 0$)

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{5}$$

$(n+3)(n+2)=20$,

$n^2+5n-14=0$,

$(n+7)(n-2)=0$

이므로 $n=2$이다. ($\because$ $n\geq 1$)

이때, $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1}+\frac{2}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

위의 표를 이용하여 $\mathrm{P}(\overline{X}<1)$을 계산하자.

확률변수 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2이므로

$\overline{X}<1$은 $\overline{X}=0$ 또는 $\overline{X}=\frac{1}{2}$과 같다. 따라서

$$\mathrm{P}(\overline{X}<1)=\mathrm{P}(\overline{X}=0)+\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{25}$$

이므로 $p+q=25+7=32$이다.

30. 정답) 129 [확률과 통계 경우의 수 | 중복조합]

해설 : 조건 (가)에 의해 모든 상자에는 반드시 흰 공의 개수 이상의 검은 공을 담아야 하므로

(흰 공 1개+검은 공 1개)의 묶음을 x,

검은 공 1개의 묶음을 y

라 할 때 조건 (가)를 3개의 x와 4개의 y를

세 상자 A, B, C에 나누어 담는다고 생각할 수 있다.

따라서 조건 (가)를 만족하는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_3\times{}_3\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_4=150\ \cdots\ ㉠$$

이다.

세 상자에 담는 공의 개수의 순서쌍 중에서

조건 (가)는 만족하고,

조건 (나)를 만족하지 않는 경우의 수를 구하자.

각각의 상자에 담긴 공의 개수의 최댓값과 최솟값의 차가 7보다 큰 순서쌍은

$(0,0,10)$, $(0,1,9)$, $(0,2,8)$

이다.

(ⅰ) 세 상자에 담는 공의 개수의 순서쌍이 $(0,0,10)$일 때,

조건 (가)를 만족하고 (ⅰ)인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$이다.

(ⅱ) 세 상자에 담는 공의 개수의 순서쌍이 $(0,1,9)$일 때,

상자 안에 담은 공의 개수가 1인 경우는 $y\times 1$ 뿐이므로

조건 (가)를 만족하고 (ⅱ)인 경우의 수는 $3!=6$이다.

(ⅲ) 세 상자에 담는 공의 개수의 순서쌍이 $(0,2,8)$일 때,

상자 안에 담은 공의 개수가 2인 경우는

① $x\times 1$ 또는 ② $y\times 2$

에서 조건 (가)를 만족하고 (ⅲ)인 경우의 수는 $3!\times 2=12$이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 조건 (가)는 만족하고,

조건 (나)를 만족하지 않는 경우의 수는

$3+6+12=21\ \cdots\ ㉡$

이다.

따라서 ㉠, ㉡에 의해 주어진 조건을 만족하며 세 상자 안에 공을 담는 경우의 수는 $150-21=129$이다.

미적분

23. 정답) ③ [미적분 수열의 극한]

해설 : $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+3}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}$

24. 정답) ④ [미적분 정적분]

해설 : $\int_{-\pi}^{\pi} x(\sin x+1)dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx+\int_{-\pi}^{\pi} x dx$

$=2\times\int_{0}^{\pi} x\sin x dx+0$

$=2\times\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^{\pi}$

$=2\times\{(\pi+0)-(0+0)\}=2\pi$

25. 정답) ① [미적분 도함수의 활용]

해설 : $\frac{dx}{dt}=\frac{3\sqrt{t}}{2}$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{8}{t\sqrt{t}}$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{3\sqrt{t}}{2}, -\frac{8}{t\sqrt{t}}\right)$

이다. 따라서 시각 $t=4$에서의 점 P의 속도는 $(3, -1)$이고

시각 $t=4$에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$이다.

26. 정답) ② [미적분 급수]

해설 : $\angle D_1A_1E_1=\angle B_1A_1D_1-\angle B_1A_1C_1=\frac{\pi}{6}$이고,

삼각형 $A_1B_1D_1$은 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_1D_1}=\sqrt{3}:1$, $\angle B_1A_1D_1=\frac{\pi}{2}$인

직각삼각형이므로 $\angle A_1D_1B_1=\frac{\pi}{3}$이다.

따라서 삼각형 $A_1D_1E_1$에서

$\angle A_1E_1D_1=\pi-\angle D_1A_1E_1-\angle A_1D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고,

삼각형 $A_1B_1C_1$은 정삼각형이므로 $\overline{A_1E_1}=\overline{C_1E_1}$이다.

$\overline{A_1E_1}=\overline{A_1D_1}\times\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$, $\overline{B_1E_1}=\overline{A_1B_1}\times\cos\frac{\pi}{6}=3$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{A_1E_1}\times\overline{A_1D_1}\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times\overline{B_1E_1}\times\overline{C_1E_1}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\overline{A_1A_2}=k$라 하면,

$\overline{A_2D_2}=\overline{A_1A_2}\times\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}k$, $\overline{A_2B_2}=\overline{A_2D_2}\times\tan\frac{\pi}{3}=3k$이고

삼각형 $A_2B_2C_2$는 정삼각형이므로 $\overline{A_2C_2}=3k$에서

$\overline{A_2C_2}=\overline{A_2B_1}\times\cos\frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{A_2B_1}=6k$이다.

따라서 $\overline{A_1B_1}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2B_1}=7k$이므로 $k=\frac{2\sqrt{3}}{7}$이다.

$\overline{A_2D_2}=\frac{6}{7}$이므로 그림 R_1에서 색칠한 부분의 넓이와

그림 R_2에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비는

$2^2:\left(\frac{6}{7}\right)^2=1:\frac{9}{49}$

이고, 따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{9}{49}}=\frac{49\sqrt{3}}{20}$이다.

27. 정답) ⑤ [미적분 부정적분+정적분]

해설 : (나)의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=a$이다.

(나)의 양변을 미분하면,

$-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=e^{-2x}f(x)$,

$e^{-2x}f'(x)=3e^{-2x}f(x)$,

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=3$ ($\because$ $f(x)>0$) ⋯ ㉠

이고, ㉠을 부정적분하면,

$\ln f(x)=3x+C$ (C는 적분상수)

에서

$f(x)=e^{3x+C}$

인데, $f(1)=1$이므로 $f(1)=e^{3+C}=1$에서 $C=-3$이다.

따라서 $f(x)=e^{3x-3}$이고,

$a\times f(4)=f(0)\times f(4)=e^{-3}\times e^{9}=e^{6}$

이다.

28. 정답) ④ [미적분 여러 가지 함수의 미분]

해설 : $\angle \mathrm{OAB}=\angle \mathrm{ADC}=\theta$ (엇각),

$\dfrac{1}{2}\times\angle \mathrm{AOB}=\angle \mathrm{ADC}=\theta$이므로

원주각과 중심각의 관계에 의해

점 D는 점 O를 중심으로하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA}}$인

원 위의 점이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OA}}=1$이므로 삼각형 OAD는 이등변삼각형이고

$\angle \mathrm{ODA}=\angle \mathrm{OAD}=\theta$이다.

삼각형 OAB에서 사인법칙을 이용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin(\angle \mathrm{OAB})}=\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin(\angle \mathrm{OBA})}$,

$\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$

이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$이다.

$f(\theta)=$(삼각형 OAD의 넓이)$-$(삼각형 OAB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\sin(\angle \mathrm{AOD})-\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\sin(\angle \mathrm{AOB})$

$=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\sin(\pi-2\theta)-\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\sin 2\theta$

$=\dfrac{\sin 2\theta}{2}-\dfrac{\sin\theta\times\sin 2\theta}{2\sin 3\theta}$

이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}-\frac{\sin\theta\times\sin 2\theta}{2\theta\times\sin 3\theta}\right)$

$=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ ⋯ ㉠

$g(\theta)=$(부채꼴 OAC의 넓이)$-$(삼각형 OAB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta-\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\sin 2\theta$

$=\theta-\dfrac{\sin\theta\times\sin 2\theta}{2\sin 3\theta}$

이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\theta}{\theta}-\frac{\sin\theta\times\sin 2\theta}{2\theta\times\sin 3\theta}\right)$

$=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$이다.

29. 정답) 85 [미적분 도함수의 활용]

해설 : 곡선 $y=\ln(tx-2)$와 직선 $y=x-f(t)$가

$x=\alpha$에서 접한다고 하면

$\ln(t\alpha-2)=\alpha-f(t)$, $\dfrac{t}{t\alpha-2}=1$

에서

$t=t\alpha-2$, $\alpha=1+\dfrac{2}{t}$

이고, $f(t)=\alpha-\ln(t\alpha-2)=\alpha-\ln t=1+\dfrac{2}{t}-\ln t$이다.

$g(t)=3t+f(t)$라 하면

$g(t)=1+\dfrac{2}{t}-\ln t+3t$

이므로

$g'(t)=-\dfrac{2}{t^2}-\dfrac{1}{t}+3=\dfrac{3t^2-t-2}{t^2}=\dfrac{(3t+2)(t-1)}{t^2}$

이고, 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극솟값이자 최솟값을 갖는다.

따라서 실수 a의 최댓값 M은

$M=g(1)=6$

이고, $f'(t)=-\dfrac{2}{t^2}-\dfrac{1}{t}$에서 $f'(6)=-\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{2}{9}$이므로

$\{f'(6)\}^2=\dfrac{4}{81}$, $p+q=81+4=85$

이다.

30. 정답) 89 [미적분 도함수의 활용+정적분의 활용]

해설 : 조건 (나)에서 $\ln e^{f(x)} + \ln f'(x) = \ln x$이므로 $e^{f(x)} f'(x) = x$이다.

따라서 모든 양수 x에 대하여

$$e^{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \ (C\text{는 적분상수}) \cdots ㉠$$

이다.

함수 $g(x) = (x^2-1)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 $x \neq \pm 1$인 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

조건 (나)에 의해 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 미분가능하므로 연속이고

함수 $f(x)$는 $x \neq -1$인 모든 실수 전체에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 조건 (가)에 의해

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0) = -\ln 2$$

이고 ㉠에 의해 $C = \frac{1}{2}$이다. 따라서 구간 $[0, \infty)$에서

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)$$

이다.

$-2 < x < -1$일 때 $x(x^2-1) < 0$,

$-1 < x < 0$일 때 $x(x^2-1) > 0$

이므로 $\int_{-2}^{1} xg(x)dx = \int_{-2}^{1} \{x(x^2-1)f(x)\}dx$가

최솟값을 가지는 경우는

$-2 < x < -1$에서 $f(x) \geq 0$이고 $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$가 최댓값,

$-1 < x < -2$에서 $f(x) \leq 0$이고 $\int_{-1}^{0} f(x)dx$가 최솟값

을 가질 때이다. 이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\ln 2$이고,

함수 $y = f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않고,

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\ln 2$이므로

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ -\ln 2 & (-1 < x \leq 0) \\ \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) & (x > 0) \end{cases}$$

일 때 $\int_{-2}^{1} xg(x)dx$는 최솟값을 가진다.

(*이때, $-\ln 2 \leq f(-1) \leq 0$이다. 함수 $xg(x)$는 $f(-1)$의 값에 관계 없이 연속이고, 구하려는 적분값도 변함이 없다.)

따라서 $\int_{-2}^{1} xg(x)dx$의 최솟값은 위의 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-2}^{1} \{x(x^2-1)f(x)\}dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \{x(x^2-1) \times (-\ln 2)\}dx + \int_{0}^{1} \left\{x(x^2-1) \times \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$= -\ln 2 \int_{-1}^{0} x(x^2-1)dx + \int_{0}^{1} \{x(x^2-1) \times \ln(x^2+1)\}dx$$

$$-\ln 2 \int_{0}^{1} x(x^2-1)dx$$

$$= -\ln 2 \int_{-1}^{1} x(x^2-1)dx + \int_{0}^{1} \{x(x^2-1) \times \ln(x^2+1)\}dx$$

$$= \int_{0}^{1} \{x(x^2-1) \times \ln(x^2+1)\}dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \int_{1}^{2} \{(t-2) \times \ln t\}dt$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 - 2t\ln t + 2t\right]_1^2$$

$$= \frac{5}{8} - \ln 2$$

이다.

따라서 $a = \frac{5}{8}$, $b = -1$이므로 $64(a^2+b^2) = 25 + 64 = 89$이다.

기하

23. 정답) ⑤ [기하 공간좌표]

해설 : 점 $(2,\ a,\ 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은

$(-2,\ a,\ -4)$이므로 $a=3,\ b=-4$이다.

따라서 $a+b=3-4=-1$이다.

24. 정답) ② [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : 점 $(2,\ 4)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{p}=(a,\ a+2)$직선은

$$\frac{x-2}{a}=\frac{y-4}{a+2}$$

인데, y절편이 -2이므로

$$-\frac{2}{a}\times(a+2)+4=-2,\quad \frac{a+2}{a}=3$$

에서 $a=1$이다.

25. 정답) ③ [기하 이차곡선 | 포물선]

해설 : 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$ 위의 점 $(3,\ a)$에서의 접선은

$$ay=2p(x+3)$$

이고, 이 직선의 기울기가 -1이므로

$$a=-2p \ \cdots \ ㉠$$

이다. 또, 점 $(3,\ a)$는 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$ 위의 점이므로

$$a^2=12p \ \cdots \ ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하면 $a=-6,\ p=3$이므로

$p+a=3-6=-3$이다.

26. 정답) ④ [기하 공간도형]

해설 : 점 B'에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{B'H}}=\sqrt{3}$이다.

또, $\angle\mathrm{BB'H}=\angle\mathrm{B'HA}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$$\angle\mathrm{BHA}=\frac{\pi}{2}$$

이고, 두 직선 $\mathrm{AB},\ l$이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이므로

삼각형 ABH는 $\angle\mathrm{BAH}=\dfrac{\pi}{3}$인 직각삼각형이고,

$$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$$

이다. 따라서 직각삼각형 $\mathrm{BB'H}$에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{BB'}}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$$

이다.

27. 정답) ① [기하 이차곡선 | 쌍곡선]

해설 : 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여

$$\frac{a^2}{6}-\frac{b^2}{12}=1 \ \cdots \ ㉠$$

이고, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{12}=1$의 두 점근선은

$$y=\sqrt{2}x \text{ 또는 } y=-\sqrt{2}x$$

이므로 ㉠에 의해

$$m=\frac{|\sqrt{2}a+b|}{\sqrt{3}}\times\frac{|\sqrt{2}a-b|}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2a^2-b^2}{3}=4\times\left(\frac{a^2}{6}-\frac{b^2}{12}\right)=4$$

이다. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{12}=1$에 접하고 기울기가 4인 두 직선은

$$y=4x\pm\sqrt{6\times4^2-12}=4x\pm\sqrt{84}$$

이므로 이 두 직선의 y절편의 곱은 -84이다.

28. 정답) ④ [기하 공간좌표+공간도형]

해설 : 좌표공간에서 두 점 A C는 한 평면 $z=3$ 위에 있다.

점 C를 중심으로 하고 xy평면에 접하는 구의 반지름의 길이는

점 C와 xy평면 사이의 거리와 같으므로 3이다.

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3^2+4^2}=5,\ \overline{\mathrm{CP}}=3 \text{ (구의 반지름의 길이)}$$

이고 삼각형 ACP는 $\angle\mathrm{APC}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

이다. 직선 AP와 xy평면이 이루는 예각을 θ라 할 때,

xy평면과 평면 $z=3$은 서로 평행하므로

직선 AP와 평면 $z=3$이 이루는 각도 θ이다.

이때, $\cos\theta$의 값이 최소가 되는 경우는 삼각형 ACP를

포함한 평면이 평면 $z=3$과 수직인 경우이므로

$$\frac{4}{5}\le\cos\theta\le1$$

이고, 선분 AP의 xy평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{\mathrm{AP}}\times\cos\theta$$

이므로

$$4\times\frac{4}{5}\le\overline{\mathrm{AP}}\times\cos\theta\le4\times1$$

에서 $M=4,\ m=\dfrac{16}{5}$이다. 따라서 $M+m=4+\dfrac{16}{5}=\dfrac{36}{5}$이다.

29. 정답) 263 **[기하 이차곡선 | 타원]**

해설 : $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}=4$이고 $\angle \mathrm{FBF'}=\theta$라 하면

네 점 A, B, F, F′이 한 원 위에 있으므로

$\angle \mathrm{FAF'}=\pi-\theta$

이다.

$\overline{\mathrm{BF}}=b$, $\overline{\mathrm{BF'}}=c\ (b<c)$라 하면 타원의 성질에 의해

$b+c=8 \ \cdots$ ㉠

이다.

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{AF'}}\times\sin(\angle \mathrm{FAF'})=8\sin\theta,$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{BF'}}\times\sin(\angle \mathrm{FBF'})=\frac{bc}{2}\sin\theta$$

에서 $3S_1=4S_2$이므로 $24=2bc$이고

$bc=12 \ \cdots$ ㉡

이다. 따라서 ㉠, ㉡에 의해 $b=2$, $c=6$이다.

두 삼각형 BFF′, AFF′에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{\mathrm{FF'}}^2=6^2+2^2-2\times6\times2\times\cos\theta$$
$$=4^2+4^2-2\times4\times4\times\cos(\pi-\theta)$$

이므로 $\cos\theta=\frac{1}{7}$이고 $\overline{\mathrm{FF'}}^2=\frac{256}{7}$이므로

$p+q=7+256=263$이다.

30. 정답) 48 **[기하 평면벡터의 성분과 내적]**

해설 : $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$, $\mathrm{Q}(q_1,\ q_2)$라 하면 조건 (가)에서

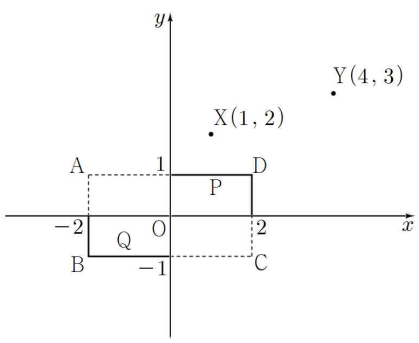
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=p_1+2p_2\ge2,$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=q_1+2q_2\le-2$

이므로 점 P는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$의 점 또는 위쪽의 점이고

점 Q는 직선 $y=-\frac{1}{2}x-1$의 점 또는 아래쪽의 점이다.

두 점 P, Q로 가능한 점들을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



조건 (나)를 만족하는 점 R가 직사각형 ABCD의 둘레 위에 존재하도록 두 점 P, Q를 점 P의 경우를 나누어 나타내자.

(i) P(0, 1)일 때,

$-1\le t\le0$인 t에 대하여 $\mathrm{Q}(-2,\ t)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}=(4,\ 2)\cdot(6,\ 3-t)=30-2t$

(ii) $0<t<2$인 t에 대하여 $\mathrm{P}(t,\ 1)$일 때,

$\mathrm{Q}(-2,\ 0)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}=(4-t,\ 2)\cdot(6,\ 3)=30-6t$

(iii) P(2, 1)일 때,

$\mathrm{Q}(-2,\ 0)$이면 $\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}=(2,\ 2)\cdot(6,\ 3)=18$

$\mathrm{Q}(0,\ -1)$이면 $\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}=(2,\ 2)\cdot(4,\ 4)=16$

(iv) $0<t<1$인 t에 대하여 $\mathrm{P}(2,\ t)$일 때,

$\mathrm{Q}(0,\ -1)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}=(2,\ 3-t)\cdot(4,\ 4)=20-4t$

(v) P(2, 0)이면

$-2\le t\le0$인 t에 대하여 $\mathrm{Q}(t,\ -1)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}=(2,\ 3)\cdot(4-t,\ 4)=20-2t$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}$는 (i)에서 최댓값 $M=32$,

(iii)에서 $\mathrm{Q}(0,\ -1)$일 때 최솟값 $m=16$를 가지므로

$M+m=32+16=48$이다.

(※ 두 점 P, Q의 중점을 M이라 하면

조건 (나)에서 $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$이어야 한다.)