F I N A L

Not the senses I have
but what I do with them is my kingdom.

2022학년도 대학수학능력시험

수학영역 파이널 우주설 파이널

우주설

1

※ 6월 모의평가 변형문항

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$(x^n - 64)f(x) \geq 0$$

이 성립한다.

(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

※ 자작문항

자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$의 n제곱근의 개수

로 정의할 때, $\sum_{n=2}^{m} a_n = 16$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은?

① 37　② 39　③ 41　④ 43　⑤ 45

※ 6월 모의평가 변형문항

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\underline{(x^n-64)f(x)\geq 0}_{(1)}$$

이 성립한다.

(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.(2)

〔Algorism. $f(x)\times g(x)\geq 0$ 유형〕

$\Rightarrow$ $f(x)$의 값이 양(+) → 음(−) 으로 바뀌는 순간

$g(x)$의 값이 양(+) → 음(−) 으로 바뀌어야 한다.

$\Rightarrow$ $f(x)$, $g(x)$중 부호변화 관찰이 용이한 함수를 먼저 분석하자.

$f(x)$가 $x=\alpha, \beta$에서 부호가 변한다면 $g(x)$도 $x=\alpha, \beta$에서 변해야 한다.

이 문제의 경우 (1)에서

i) $(x^n-64)f(x)\geq 0$ **에서 n이 홀수일 경우**

64의 n제곱근의 개수가 1개이기 때문에 (x^n-64)는 부호가 1곳에서 변한다.
그렇다면 이차함수 $f(x)$도 부호가 1곳에서 변해야 하는데
그러한 이차함수는 존재하지 않으므로 모순

ii) $(x^n-64)f(x)\geq 0$ **에서 n이 짝수일 경우**

(x^n-64)는 부호가 $x=2^{\frac{6}{n}}$, $-2^{\frac{6}{n}}$에서 변한다. (64의 n제곱근)

그렇다면 이차함수 $f(x)$도 부호가 $x=2^{\frac{6}{n}}$, $-2^{\frac{6}{n}}$에서 변해야 하므로

$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$이다. 최솟값은 $f(0)=-2^{\frac{12}{n}}$이다.

(2): 조건을 만족시키는 $n=2, 4, 6, 12$이다. **답**: 24

※ 자작문항

자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$의 n제곱근의 개수

로 정의할 때, $\sum_{n=2}^{m} a_n = 16$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은?

① 37 ② 39 ③ 41 ④ 43 ⑤ 45

$\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$의 값은 주기가 6이고 n의 짝/홀은 주기가 2이다.

2와 6의 최소공배수는 6이므로 수열 $\{a_n\}$의 값은 주기가 6이고 다음과 같다.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	0	1	0	1	2	1	0	1

그러므로 조건을 만족시키는 m의 값은 21또는 22이다. $21+22=43$

Tip

m의 n제곱근 중 실수의 개수는 m의 부호와 상관없이 n이 홀수이면 1개로 일정하다.

※ 수능완성

10보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|3^x-a|+b$$

라 하자. x에 대한 방정식 $4^{f(x)}-5\times2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

※ 자작문항

양의 상수 k에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=2^{x+k}$이라 하자.

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 부등식

$$f\left(\frac{f^{-1}(x)-x}{3}\right)\geq x$$

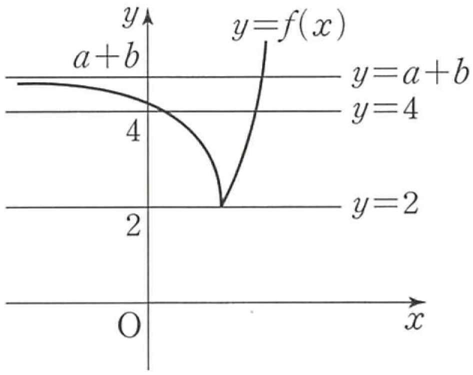
를 만족시키는 자연수 x의 개수가 16개이기 위한 k의 최솟값은?

$(2^{f(x)})^2-20\times 2^{f(x)}+64=0$, $(2^{f(x)}-4)(2^{f(x)}-16)=0$

$2^{f(x)}=4$ 또는 $2^{f(x)}=16 \Rightarrow f(x)=2$ 또는 $f(x)=4$

(i) $b=2$일 때

직선 $y=2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 한 점에서만 만난다.



방정식 $4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

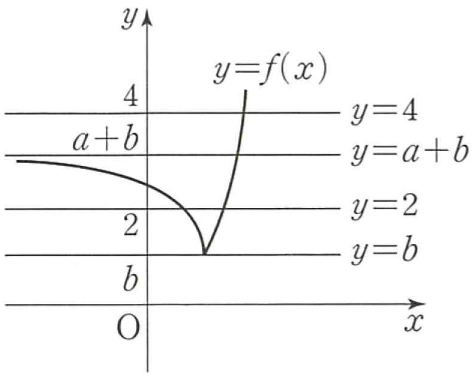
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$a+b>4$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$, $\cdots$, $(9, 2)$의 7개다.

(ii) $b\neq 2$일 때

조건을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



방정식 $4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하고,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$는 한 점에서 만나야 하므로

$b<2$, $2<a+b\leq 4$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(3, 1)$의 2개다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $7+2=9$ **답: 9**

※ 자작문항

양의 상수 k에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=2^{x+k}$이라 하자.

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 부등식

$$\underline{f\left(\frac{f^{-1}(x)-x}{3}\right)\geq x_{(1)}}$$

를 <u>만족시키는 자연수 x의 개수가 16개이기 위한$_{(2)}$</u> k의 최솟값은?

〔Algorism. 지수로그 부등식의 핵심〕

$\log_a x_1 \leq \log_a x_2$, $a^{x_1} \leq a^{x_2}$와 같은 지수/로그 함수의 치역간의 비교를

$x_1 \leq x_2$와 같은 정의역의 비교로 등치시켜서 해석할 수 있다. (단, $a>1$인 상수)

(1)의 부등식을 살펴보고 알고리즘을 적용하자.

$$f\left(\frac{f^{-1}(x)-x}{3}\right)\geq x \Rightarrow f\left(\frac{f^{-1}(x)-x}{3}\right)\geq f\left(f^{-1}(x)\right)$$

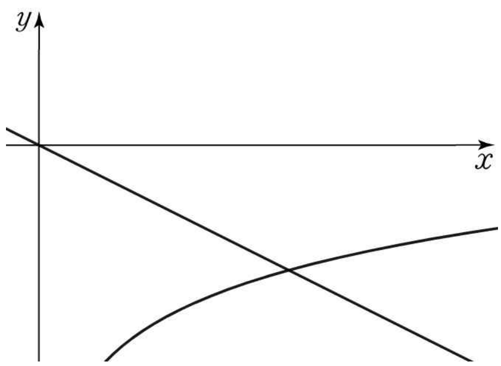
$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(x)-x}{3}\geq f^{-1}(x)$$ (함수 $f(x)$의 밑수가 1보다 크기 때문)

$$\Rightarrow -\frac{x}{2}\geq f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{2}\geq \log_2 x-k$$ 여기서부터 그래프를 통해 접근할 수 있다.

(2)의 조건을 만족시키기 위해서는 $x=16$일 때 부등식이 성립해야 한다. k값을 증가시키면서 $x=16$이 어느 시점에 $-\frac{x}{2}\geq \log_2 x-k$를 만족하기 시작하는지를 관찰하자. $-\frac{x}{2}=\log_2 x-k$를 만족하는 순간이다.

k의 최솟값은 12이다.



한편 $-\frac{x}{2}\geq f^{-1}(x)$에서 $x=f(t)$를 대입하여

$-\frac{x}{2}\geq f^{-1}(x) \Rightarrow f(t)\leq -2t$ 로 관찰하는 것도 방법이다.

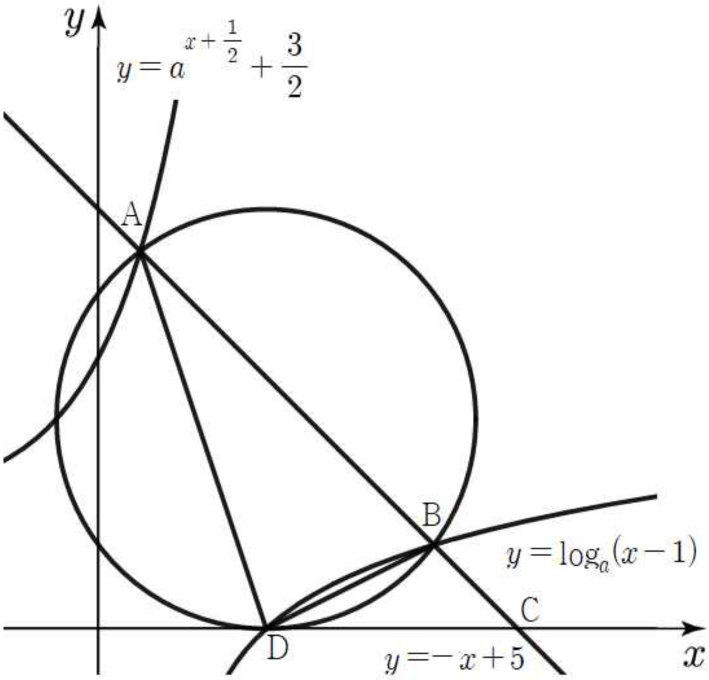
답: 12

※ 9월 모의평가 변형문항

$a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+5$가 두 곡선

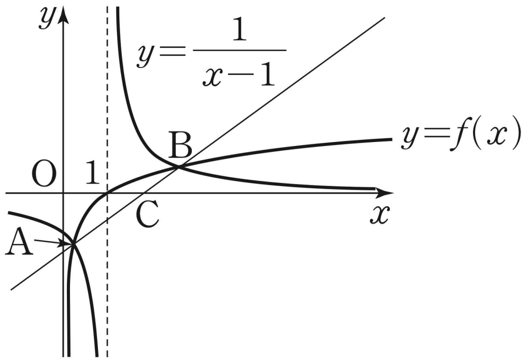
$$y=a^{x+\frac{1}{2}}+\frac{3}{2},\qquad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 C라 하자. 점 A, B를 지나는 원이 점 D$(2,\ 0)$에서 x축에 접할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 k이다. $12k$의 값을 구하시오.



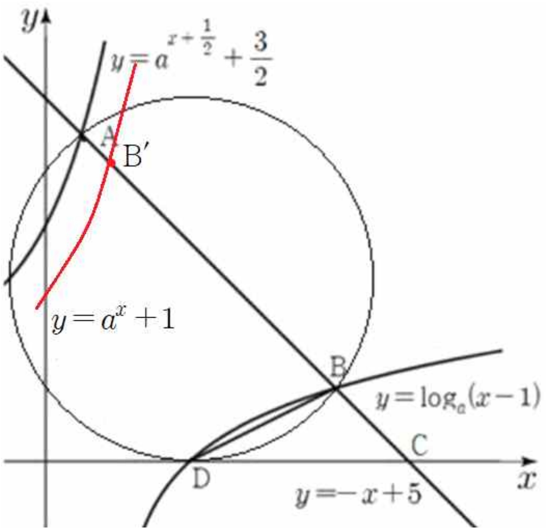
※ 수능완성

그림과 같이 좌표평면에서 함수 $f(x)=\log_p x\ (p>1)$의 그래프와 곡선 $y=\dfrac{1}{x-1}$이 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))\ (a<b)$라 하고, 직선 AB가 x축과 만나는 점을 C라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=2$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]



① $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-1+\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

관점1. 평행이동의 이해



점 B의 좌표를 $B(t, 5-t)$라고 하자.

이때, 함수 $y=\log_a(x-1)$의 역함수인 $y=a^x+1$의 그래프를 그려

직선 $y=-x+5$와 만나는 점을 B′이라 하면, 점 B′의 좌표는 $(5-t, t)$이다.

곡선 $y=a^{x+\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}$은 곡선 $y=a^x+1$을 x축 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 y축 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행 이동한 관계이므로 점 A의 좌표는 $A\left(\frac{9}{2}-t, t+\frac{1}{2}\right)$이다.

이때, 삼각형 ACD와 삼각형 DCB가 닮음 관계이므로 $\overline{CD}:\overline{CB}=\overline{CA}:\overline{CD}$이다.

(할선정리) $\overline{CB}\times\overline{CA}=(\overline{CD})^2 \Rightarrow (5-t)\sqrt{2}\times\left(t+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}=3^2$

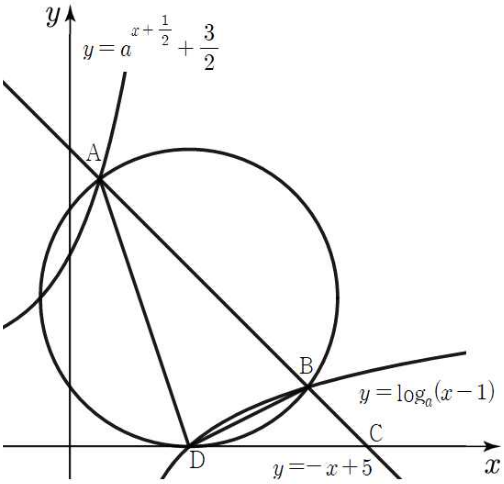
$\Rightarrow t=4$

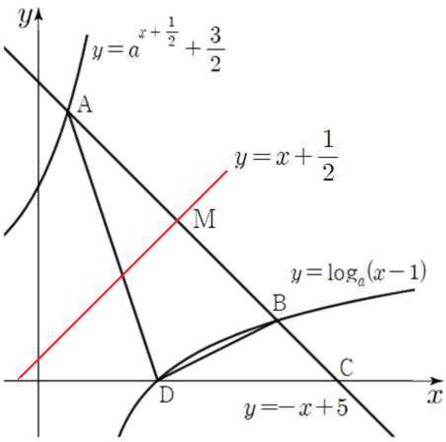
그러므로 B의 좌표는 $B(4, 1)$이고, $a=3$을 얻는다. 한편,

삼각형 ABD의 넓이는 (삼각형 ACD의 넓이) − (삼각형 DCB의 넓이)를 통해

$k=\frac{21}{4}$을 얻는다. 답: 63

관점2. 대칭축 작도





$y=a^x$ 와 $y=\log_a x$는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$y=a^{x+\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}$의 그래프는 a값의 관계없이 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나고,

$y=\log_a(x-1)$의 그래프는 a값에 관계없이 점 $(2, 0)$을 지난다. 이 두점 사이의 평균 기울기가 -1이고 중점의 좌표k $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$이므로 두 곡선이 $y=x+\frac{1}{2}$에 대하여 대칭 관계임을 알 수 있다.

이때, 삼각형 ACD와 삼각형 DCB가 닮음 관계이므로 $\overline{CD}:\overline{CB}=\overline{CA}:\overline{CD}$이다.

$\overline{CB}\times\overline{CA}=(\overline{CD})^2$에서 선분 AB의 중점을 M이라 하면,

점 M은 $y=x+\frac{1}{2}$과 $y=-x+5$의 교점이므로 $M\left(\frac{9}{4}, \frac{11}{4}\right)$이다.

$$(\overline{CM}+\overline{MA})\times(\overline{CM}-\overline{MB})=(\overline{CD})^2 \Rightarrow (\overline{CM})^2-(\overline{MB})^2=(\overline{CD})^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{11}{4}\sqrt{2}\right)^2-(\overline{MB})^2=(3)^2$$

$$\Rightarrow \overline{MB}=\frac{7}{4}\sqrt{2}\text{이다.}$$

그러므로 B의 좌표는 $B(4, 1)$이고, $a=3$을 얻는다. 한편,

삼각형 ABD의 넓이는 (삼각형 ACD의 넓이) − (삼각형 DCB의 넓이)를 통해

$k=\frac{21}{4}$을 얻는다. **답: 63**

※ 자작문항

좌표평면에서 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\dfrac{x}{x-1}$가 만나는 두 점을

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=2^x$, $y=\dfrac{x}{x-1}$가

만나는 제 1사분면 위의 점을 R이라 할 때, 〈보기〉에서

옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x_2+y_1<2$

ㄴ. $\angle \mathrm{PQR}>\dfrac{\pi}{2}$

ㄷ. 직선 PR의 기울기는 4보다 작다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

※ 자작문항

곡선 $y=a^x$과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(a_1,a_1)$, $\mathrm{Q}(a_2,a_2)$라 하고

곡선 $y=b^x$과 직선 $y=2x$가 만나는 두 점을 $\mathrm{R}(b_1,2b_1)$, $\mathrm{S}(b_2,2b_2)$라 하자.

<보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? (단, $a_1<a_2$, $b_1<b_2$)

<보 기>

ㄱ. $a=b$이면, $a_1>b_1$이다.

ㄴ. $b=a^2$일 때, $a_1b_2=a_2b_1$이다.

ㄷ. 원점 O에 대하여 $b>a^2$일 때 $\angle\mathrm{OPR}>\frac{\pi}{4}$이다.

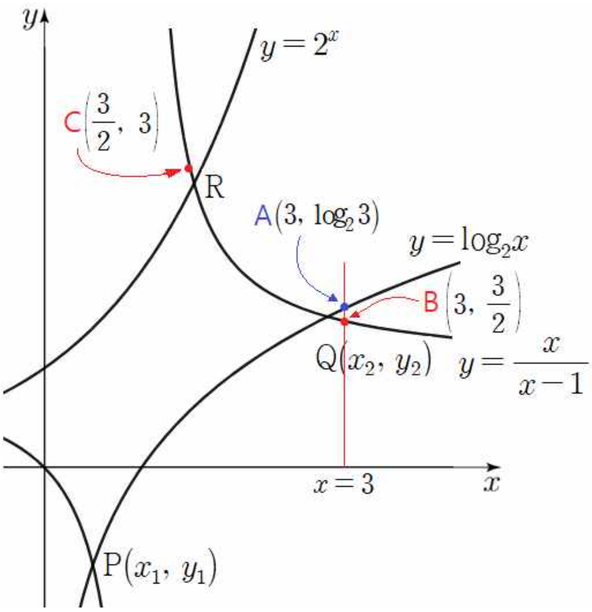
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

<보 기>

ㄱ. $x_2 + y_1 < 2$

ㄴ. $\angle \mathrm{PQR} > \frac{\pi}{2}$

ㄷ. 직선 PR의 기울기는 4보다 작다.



ㄱ. $x_2 + y_1 < 2$를 위해 x_2와 y_1의 대략적인 값을 구해보자.

$y=-1$을 그어서 관찰하면 점 P의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$임을 얻는다.

그렇다면, 선지를 $x_2 < 3$으로 등치시킬 수 있는데 직선 $x=3$을 그어서

점 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$과 점 $\mathrm{A}(3,\ \log_2 3)$의 위치관계를 비교, $x_2 < 3$을 알 수 있다. (참)

ㄴ. 직선 QR의 기울기: -1 (역함수관계), 직선 PB의 기울기: 1를 통해

두 직선이 $\frac{\pi}{2}$의 각을 이루고 있음을 알 수 있다. 그렇다면 ㄴ에서 묻는 것은

직선 PQ의 기울기가 1(직선 PB의 기울기)보다 큰지를 묻는 것이다. (참)

ㄷ. 역함수 관계의 두 곡선을 이용. 점 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$를 $y=x$에 대칭시킨 점 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$를

표시하자. 직선 PR의 기울기는 직선 PC의 기울기보다 작다. (참)

답: 5번

※ 자작문항

곡선 $y=a^x$과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(a_1,a_1)$, $\mathrm{Q}(a_2,a_2)$라 하고
곡선 $y=b^x$과 직선 $y=2x$가 만나는 두 점을 $\mathrm{R}(b_1,2b_1)$, $\mathrm{S}(b_2,2b_2)$라 하자.
<보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? (단, $a_1<a_2$, $b_1<b_2$)

<보 기>

ㄱ. $a=b$이면, $a_1>b_1$이다.

ㄴ. $b=a^2$일 때, $a_1b_2=a_2b_1$이다.

ㄷ. 원점 O에 대하여 $b>a^2$일 때 $\angle\mathrm{OPR}>\dfrac{\pi}{4}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

※ 해설

ㄱ 그래프를 그려서 관찰하면 쉽게 알 수 있다. (참)

ㄴ. 방정식 $a^x=x$의 실근 $x=a_1, a_2$ $(a_1<a_2)$
방정식 $a^{2x}=2x$의 실근 $x=b_1, b_2$ $b_1<b_2$에 대하여
$2x=X$라 하면, 방정식 $a^X=X$의 실근이 $X=2b_1, 2b_2$인데 이것을
해석하면 각각 $2b_1=a_1$, $2b_2=a_2$를 의미함을 알 수 있다. (참)

ㄷ. $b=a^2$일 경우, ㄴ의 참/거짓을 판단하는 상황으로서 P와 R의
y좌표가 같아 직선 PR은 x축과 평행하고, $\angle\mathrm{OPR}=\dfrac{\pi}{4}$이다. (엇각)
$b>a^2$이면 $b=a^2$일 때의 상황에서 곡선 $y=b^x$가 더 가파르게
올라가게 되므로 점 R이 기존 $b=a^2$일 때의 상황보다 좀 더 위쪽에
형성되고 $\angle\mathrm{OPR}>\dfrac{\pi}{4}$가 성립함을 알 수 있다. (참)

답: 5번

※ 수능완성

양수 θ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin\theta\tan\theta < 0$, $\cos\theta\tan\theta > 0$
(나) 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 3θ를 나타내는 동경이 서로 y축에 대하여 대칭이다.

θ의 최솟값을 α라 할 때, $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\tan\alpha}$의 값은?(단, 좌표평면에서 시초선은 원점에서 x축의 양의 방향으로 정한다.)

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

※ 자작문항

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$에 대하여 선분 AB가 곡선 $y=\sin(a\pi x)$와 만나는 점의 개수를 $f(a)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0$)

〈보 기〉

ㄱ. $\frac{1}{4}\le a\le\frac{1}{2}$일 때, $f(a)=1$이다.

ㄴ. $\lim_{a\to k-}f(a)<f(k)$를 만족시키는 8이하의 양수 k값의 합은 30이다.

ㄷ. $\lim_{a\to k}f(a)\ne f(k)$를 만족시키는 양수 k값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

※ 수능완성

양수 θ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin\theta\tan\theta<0$, $\cos\theta\tan\theta>0$
(나) 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 3θ를 나타내는 동경이 서로 y축에 대하여 대칭이다.

θ의 최솟값을 α라 할 때, $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha}$의 값은?(단, 좌표평면에서 시초선은 원점에서 x축의 양의 방향으로 정한다.)

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

※ 자작문항

좌표평면 위의 점 A(1, 1), B(2, 1)에 대하여 선분 AB가 곡선 $y=\sin(a\pi x)$와 만나는 점의 개수를 $f(a)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0$)

〈보 기〉

ㄱ. $\frac{1}{4} \le a \le \frac{1}{2}$일 때, $f(a)=1$이다.

ㄴ. $\lim_{a \to k-} f(a) < f(k)$를 만족시키는 8이하의 양수 k값의 합은 30이다.

ㄷ. $\lim_{a \to k} f(a) \ne f(k)$를 만족시키는 양수 k값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

※ 해설

$\sin\theta\tan\theta < 0$ …… ㉠

$\cos\theta\tan\theta > 0$ …… ㉡

㉡에서 $\cos\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} > 0$이므로 $\sin\theta > 0$…… ㉢

㉠, ㉢에서 $\tan\theta < 0$

$\sin\theta > 0$, $\tan\theta < 0$이므로 각 θ는 제2사분면의 각이다.

또한 θ를 나타내는 동경과 3θ를 나타내는 동경이 서로 y축에 대하여

대칭이므로 $\theta+3\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)에서 $\theta=\dfrac{2n+1}{4}\pi$

그런데 θ는 제2사분면의 각이므로 양수 θ의 최솟값은

$n=1$일 때 $\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$

따라서 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\alpha=-1$이므로

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-1}=-\sqrt{2}$$

답: 2번

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,1), \mathrm{B}(2,1)$에 대하여 선분 AB가 곡선 $y=\sin(a\pi x)$와 만나는 점의 개수를 $f(a)$라 할 때(1), 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0$)

〈보 기〉

ㄱ. $\frac{1}{4} \le a \le \frac{1}{2}$일 때, $f(a)=1$이다.

ㄴ. $\lim_{a \to k-} f(a) < f(k)$를 만족시키는 8이하의 양수 k값의 합은 30이다.

ㄷ. $\lim_{a \to k} f(a) \ne f(k)$를 만족시키는 양수 k값이 존재한다.

※ 교과서 개념

곡선 $y=\sin(a\pi x)$는 주기가 $\frac{2}{a}$인 삼각함수이다. a값이 증가할수록

곡선 $y=\sin(a\pi x)$의 좌우 간격이 좁아지는 것을 관찰할 수 있다.

(1): '$1 \le x \le 2$에서 $\sin(a\pi x)=1$이 되는 x값의 개수를 $f(a)$라 하자.' 로 해석

$\Rightarrow$ $a\pi x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

$\Rightarrow$ $a\pi \le 2n\pi + \frac{\pi}{2} \le 2a\pi$ (단, n은 정수)를 만족시키는 n의 개수가 $f(a)$이다.

ㄱ. $\frac{1}{4} \le a \le \frac{1}{2}$에서 $a\pi \le 2n\pi + \frac{\pi}{2} \le 2a\pi$를 만족시키는 정수 n은 0뿐이다. (참)

ㄴ. 그래프를 그려서 관찰하면, 곡선 $y=\sin(a\pi x)$가 점 $\mathrm{B}(2,1)$를 지날 때, 조건을 만족시키는 것을 알 수 있다.

$\sin(2a\pi)=1$ $\Rightarrow$ $2a\pi = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

$\Rightarrow$ $a = n + \frac{1}{4}$ (단, n은 정수) 이므로 $k = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{29}{4}$이다 (참)

ㄷ. $\lim_{a \to k} f(a) \ne f(k)$에서 좌극한과 우극한이 같음이 전제되어 있다. 그것에 유의하여 그래프에서의 상황을 관찰하면, 곡선 $y=\sin(a\pi x)$가 점 $\mathrm{A}(1,1), \mathrm{B}(2,1)$를 동시에 지나는지 묻는 것이다. 점 $\mathrm{A}(1,1)$를 지날 경우 $\sin(a\pi)=1$이므로

$a\pi = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 이고, $2a\pi = (4n+1)\pi$ 이므로 곡선 $y=\sin(a\pi x)$는 항상 점 $(2,0)$을 지난다.

어떤 경우에도 점 $\mathrm{B}(2,1)$를 지날 수 없다. (거짓)

답: 2번

※ 자작문항

$0 < \alpha < \beta < \frac{3}{2}\pi$인 α, β에 대하여

$\sin\alpha : \cos\alpha : \tan\beta = 4 : 3 : 5$

를 만족시킬 때, $\cos\beta$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

※ 자작문항

수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \cos(bn+c) \ (0<b<\pi,\ 0<c<\pi)$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 상수 b, c의 순서쌍 (b, c)를 $(b_1, c_1), (b_2, c_2), \cdots, (b_n, c_n)$이라 하자. $\sum_{k=1}^{n}(b_k+c_k)$의 값은?

집합 $A=\{a_n \mid n$은 모든 자연수$\}$의 원소의 개수는 2개이다.

① $\frac{11}{3}\pi$ ② $\frac{23}{6}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{25}{6}\pi$ ⑤ $\frac{13}{3}\pi$

※ 자작문항

$0<\alpha<\beta<\frac{3}{2}\pi$인 α, β에 대하여

$\sin\alpha : \cos\alpha : \tan\beta = 4:3:5$

를 만족시킬 때, $\cos\beta$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

※ 동경의 범위에 유의하는가?

해설

$\sin\alpha=4k,\ \cos\alpha=3k,\ \tan\beta=5k$라 하면,

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$에 의해, $k=\frac{1}{5}$ 또는 $-\frac{1}{5}$

$k=-\frac{1}{5}$일 경우

$0<\alpha<\beta<\frac{3}{2}\pi$를

만족시키는 α, β는 존재하지 않는다.

$k=\frac{1}{5}$일 경우

$\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5},\ \tan\beta=1$에서 α는

제 1사분면에 존재하는 점에 대한 동경인데

$\tan\alpha=\frac{4}{3}>\tan\beta=1$이므로

β가 제 1사분면에 존재하는 점에 대한

동경이라면 $\alpha>\beta$이므로 조건 불만족한다.

$0<\alpha<\beta<\frac{3}{2}\pi$를 만족시키려면

β는 제3 사분면에 존재하는 $\frac{5}{4}\pi$임을 알 수 있다.

따라서 $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

※ 자작문항

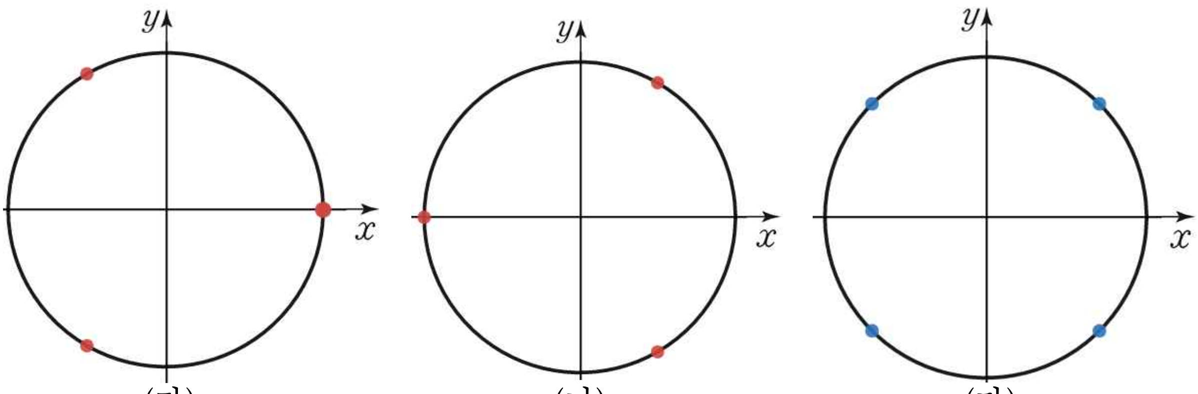
수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \cos(bn+c) \ (0<b<\pi,\ 0<c<\pi)$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 상수 b, c의 순서쌍 (b, c)를

(b_1, c_1), (b_2, c_2), $\cdots$, (b_n, c_n)이라 하자. $\sum_{k=1}^{n}(b_k+c_k)$의 값은?

집합 $A=\{a_n \mid n$은 모든 자연수$\}$의 원소의 개수는 2개이다.



※ 해설

조건을 해석하자. 자연수 n이 1씩 증가함에 따라 cos의 동경이 b씩 증가하여도 cos의 값은 오직 두 종류만 존재한다. 그런데, $0<b<\pi$이므로 점대칭을 통한 cos값의 반복은 불가하다. 그렇다면 가능한 cos값의 반복은 3종류 이상의 점이 표시되지만 cos값은 2개인 상황이다.

(가)~(다)에 해당하는 3가지 케이스가 가능한 것을 알 수 있다.

(가)의 경우: $b=\frac{2}{3}\pi,\ c=\frac{2}{3}\pi$

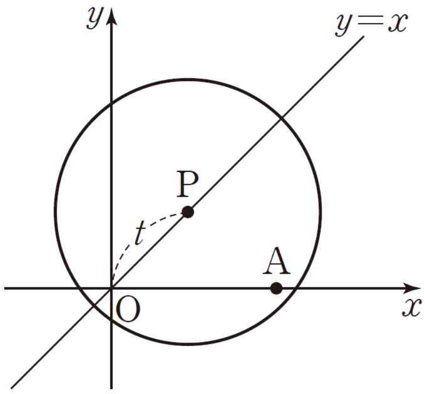
(나)의 경우: $b=\frac{2}{3}\pi,\ c=\frac{1}{3}\pi$

(다)의 경우: $b=\frac{1}{2}\pi,\ c=\frac{1}{4}\pi$ 또는 $b=\frac{1}{2}\pi,\ c=\frac{3}{4}\pi$ 이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{n}(b_k+c_k)=\frac{13}{3}\pi$이다. 답: 5번

※ 수능특강

그림과 같이 좌표평면에 점 A$(5,\ 0)$과 제1사분면에서 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 원점 O와 점 P 사이의 거리가 t일 때, 점 A가 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 내부에 있도록 하는 모든 양수 t의 값의 범위가 $\alpha<t<\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은?

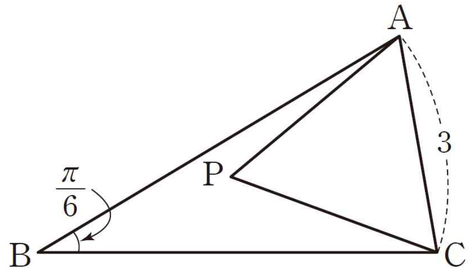


① $\sqrt{11}$　② $2\sqrt{3}$　③ $\sqrt{13}$　④ $\sqrt{14}$　⑤ $\sqrt{15}$

※ 수능특강

그림과 같이 $\overline{AC}=3$, $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$ 인 삼각형 ABC의 내부에 점 P가 있다.

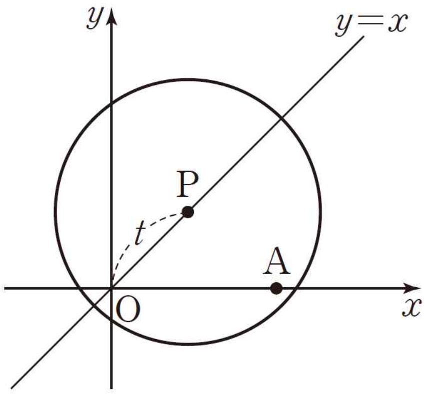
삼각형 APC가 정삼각형이고 $\sin(\angle PCB)=\frac{\sqrt{29}}{15}$ 일 때, 선분 BC의 길이는?



① 5 ② $\frac{26}{5}$ ③ $\frac{27}{5}$ ④ $\frac{28}{5}$ ⑤ $\frac{29}{5}$

※ 수능특강

그림과 같이 좌표평면에 점 A(5, 0)과 제1사분면에서 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 원점 O와 점 P 사이의 거리가 t일 때, 점 A가 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 내부에 있도록 하는 모든 양수 t의 값의 범위가 $\alpha<t<\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은?



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

※ 해설

$\angle POA=\frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 POA에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PA}^2=\overline{OP}^2+\overline{OA}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{OA}\times\cos\frac{\pi}{4}$

$=t^2+5^2-2\times t\times 5\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=t^2-5\sqrt{2}t+25$

이때 점 A가 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 내부에 있으려면 $\overline{PA}^2<16$이어야 하므로

$t^2-5\sqrt{2}t+25<16 \quad\Rightarrow\quad t^2-5\sqrt{2}+9<0$

$\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{50-36}}{2}<t<\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{50-36}}{2}$

$\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}<t<\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$

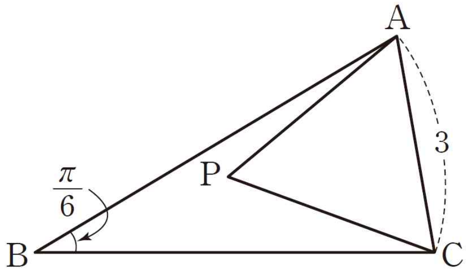
따라서 $\beta-\alpha=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}-\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$

답: 4번

※ 수능특강

그림과 같이 $\overline{AC}=3$, $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$ 인 삼각형 ABC 의 내부에 점 P 가 있다.

삼각형 APC 가 정삼각형이고 $\sin(\angle PCB)=\frac{\sqrt{29}}{15}$ 일 때, 선분 BC 의 길이는?



① 5 ② $\frac{26}{5}$ ③ $\frac{27}{5}$ ④ $\frac{28}{5}$ ⑤ $\frac{29}{5}$

※ 해설

$\angle PCB=\theta$라 하면 $\angle ACP=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\angle ABC+\angle ACB=\frac{\pi}{6}+\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}+\theta$$

즉, $\angle BAC=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{BC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)},\ \overline{BC}=6\cos\theta$$

이때 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{29}{225}}=\sqrt{\frac{196}{225}}=\frac{14}{15}$

따라서 $\overline{BC}=6\times\frac{14}{15}=\frac{28}{5}$

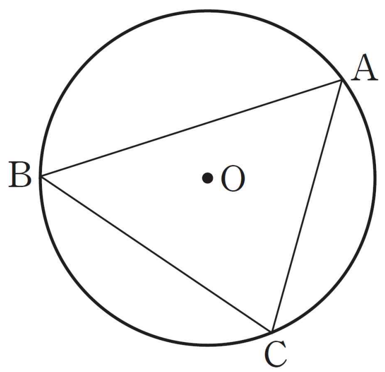
답: 4번

※ 수능완성

그림과 같이 중심이 O인 원 위에 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 놓여 있고, 점 O와 변 AB 사이의 거리와 점 O와 변 AC 사이의 거리의 비는 1 : 2이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=8\sqrt{2}$, $\sin C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$일 때, $\sin^2 B=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, 점 O는 삼각형 ABC의 내부에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



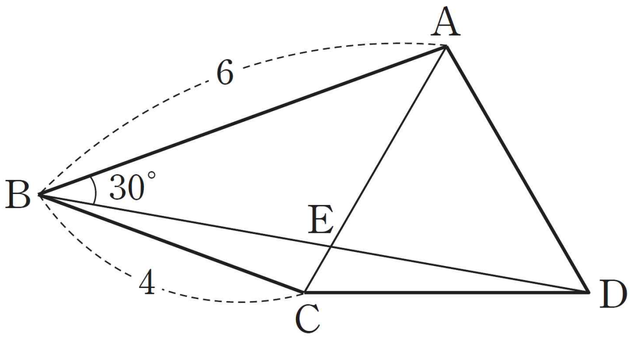
※ **수능완성**

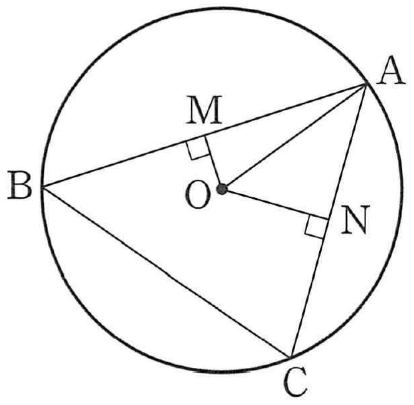
그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선이 만나는 점을 E라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\angle\mathrm{ABE}=30^\circ$이고 삼각형 ACD가 정삼각형일 때,

삼각형 AED의 외접원의 지름의 길이는 $\dfrac{q\left(\sqrt{21}-3\right)}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)





※ 해설

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$,

$R=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin C}=\dfrac{8\sqrt{2}}{2\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=6$ 원의 중심 O에서 두 현 AB, AC에 내린

수선의 발을 각각 M, N이라 하자. 직각삼각형 OAM에서

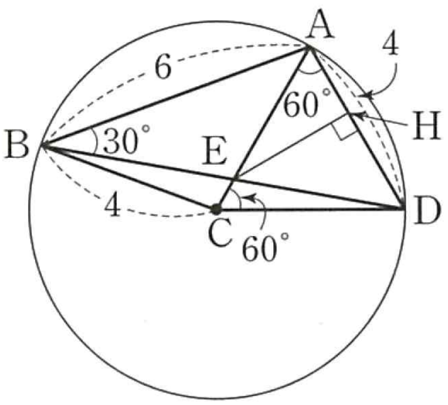
$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}=2$ $\overline{OM}:\overline{ON}=1:2$이므로 $\overline{ON}=4$

직각삼각형 OAN에서 $\overline{AN}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{ON}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AC}=2\overline{AN}=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에서

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R, \sin B=\dfrac{\overline{AC}}{2R}=\dfrac{4\sqrt{5}}{12}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin^2 B=\dfrac{5}{9}$

답: 14



※ 해설

삼각형 ABD에서 $\angle ABE = 30°$이고 정삼각형 ACD에서 $\angle ACD = 60°$이므로
원주각과 중심각의 관계에 의하여 점 C는 삼각형 ABD의 외접원의 중심이다.
그러므로 $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 4$이고 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 30°} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)},\quad \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\sin(\angle ADB)},\quad \sin(\angle ADB) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$\overline{AE} = k$ $(k > 0)$이라 하고 꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면
직각삼각형 AEH에서 $\overline{AH} = k\cos 60° = \frac{k}{2}$, $\overline{DH} = \overline{AD} - \overline{AH} = 4 - \frac{k}{2}$

$\sin(\angle ADE) = \frac{3}{4}$이므로 $\cos(\angle ADE) = \sqrt{1 - \sin^2(\angle ADE)} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan(\angle ADE) = \frac{\sin(\angle ADE)}{\cos(\angle ADE)} = \frac{3}{\sqrt{7}}$ …… ㉠ 한편, 직각삼각형 EHA에서

$\overline{EH} = \sin 60° \times \overline{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2}k$, 직각삼각형 EDH에서 $\tan(\angle EDH) = \frac{\overline{EH}}{\overline{DH}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4 - \frac{k}{2}}$ …… ㉡

$\angle ADE = \angle EDH$이므로 ㉠과 ㉡에서 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4 - \frac{k}{2}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$, 즉 $k = \frac{24}{\sqrt{21} + 3} = 2\left(\sqrt{21} - 3\right) = \overline{AE}$

삼각형 AED의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 AED에서

$\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)} = 2R$에서 $\frac{2\left(\sqrt{21} - 3\right)}{\frac{3}{4}} = 2R$ 따라서 $2R = \frac{8\left(\sqrt{21} - 3\right)}{3}$에서

답: 11

※ 수능완성

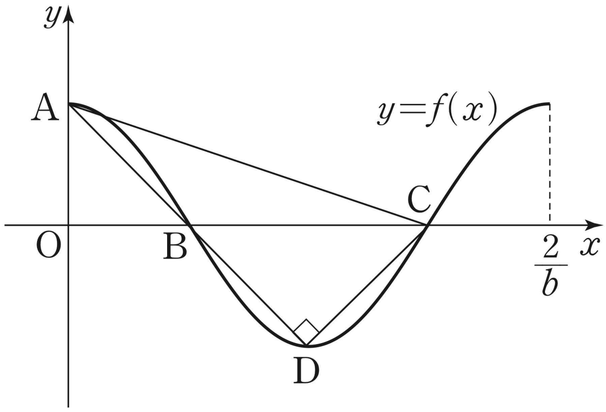
그림과 같이 두 상수 a, b $(a>0,\ b>0)$에 대하여 함수

$f(x)=a\cos b\pi x$ $\left(0\le x\le \dfrac{2}{b}\right)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A,

x축과 만나는 점 중 x좌표가 작은 점부터 차례로 B, C, 직선 AB와

만나는 점 중 두 점 A, B가 아닌 점을 D라 하자. $\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$이고,

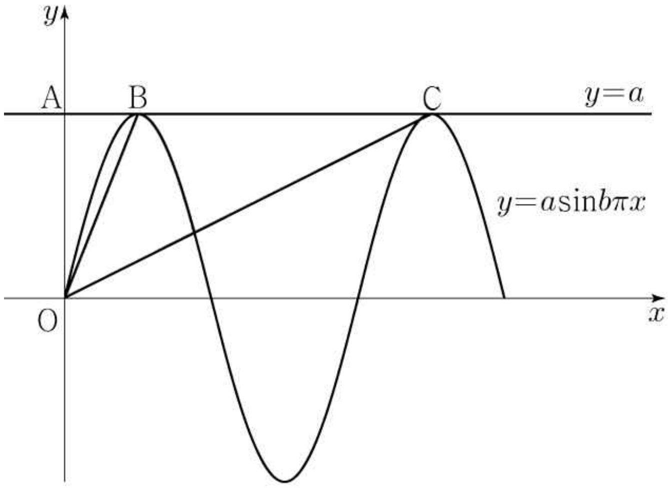
삼각형 ADC의 넓이가 18일 때, $a+b$의 값은?



① $\dfrac{8}{3}$　② $\dfrac{17}{6}$　③ 3　④ $\dfrac{19}{6}$　⑤ $\dfrac{10}{3}$

※ 9월 모의평가 변형문항

두 양수 a, b에 대하여 y축과 직선 $y=a$가 만나는 점을 A라 하고, 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0 \le x \le \dfrac{3}{b}\right)$가 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 B, C라 하자. $\angle\mathrm{ABO}=\angle\mathrm{AOC}$일 때, ab의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② 1　③ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　④ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

※ 해설

함수 $f(x)=a\cos b\pi x$의 그래프는 주기가 $\frac{2}{b}$이다.

$f(0)=a$이므로 네 점 A, B, C, D의 좌표는

$A(0,\ a)$, $B\left(\frac{1}{2b},\ 0\right)$, $C\left(\frac{3}{2b},\ 0\right)$, $D\left(\frac{1}{b},\ -a\right)$

$\overline{BD}=\overline{DC}$이고 $\angle BDC=90°$이므로 삼각형 BDC는 직각이등변삼각형이다.
이때 원점 O에 대하여 $\angle ABO=\angle DBC=\angle BAO$이므로
삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.

그러므로 $a=\frac{1}{2b}$ ...... ㉠

$\overline{AB}=\overline{BD}$에서 두 삼각형 ABC, BDC의 넓이는 같다.
즉, (삼각형 ADC의 넓이)
=(삼각형 ABC의 넓이)+(삼각형 BDC의 넓이)
$=2\times$(삼각형 ABC의 넓이)

$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{b}\times a$

$=\frac{a}{b}=18$

㉠에서 $\frac{1}{2b^2}=18$, $b^2=\frac{1}{36}$

$b>0$이므로 $b=\frac{1}{6}$

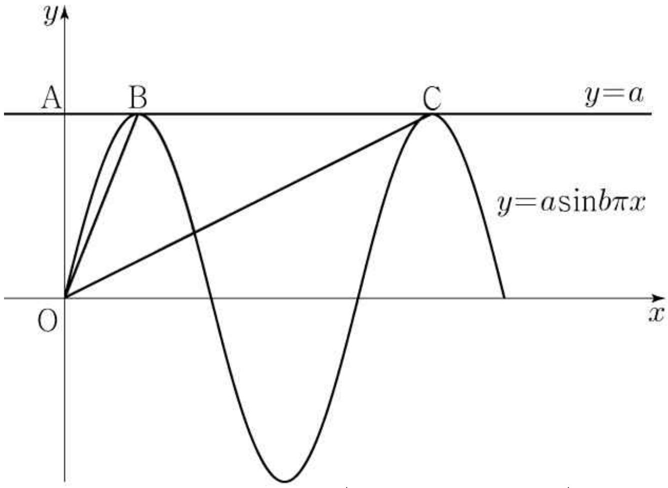
$b=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 $a+b=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$

답: 4번

※ 9월 모의평가 변형문항

두 양수 a, b에 대하여 y축과 직선 $y=a$가 만나는 점을 A라 하고, 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le \frac{3}{b}\right)$ (1)가 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 B, C라 하자. $\angle ABO=\angle AOC$ (2)일 때, ab의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

※ 해설

(1) : $\overline{AO}=a$, $\overline{AB}=\frac{1}{2b}$, $\overline{AC}=\frac{5}{2b}$

(2) : $\angle ABO=\angle AOC$이므로 삼각형 ABO와 삼각형 AOC는 닮음이다.

$\Rightarrow (\overline{AO})^2=\overline{AB}\times\overline{AC}$

$\Rightarrow a^2=\frac{5}{4b^2}$

$\Rightarrow 4a^2b^2=5$

$\Rightarrow ab=\frac{\sqrt{5}}{2}$

답: 3번

※ 9월 모의평가 문항

수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

※ 9월 모의평가 변형문항

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-a_n & (a_n \geq 0)\\ 2a_n+2 & (a_n < 0)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값을 크기가 작은 것부터 나열하면

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$이다. $m+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k$의 값은?

집합 $A=\{a_n \mid n$은 모든 자연수$\}$의 원소의 개수는 2개이다.

① $\frac{13}{3}$　② 5　③ $\frac{17}{3}$　④ $\frac{19}{3}$　⑤ 7

※ 9월 모의평가 문항

수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \leq 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는

모든 a_1의 값의 합은?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

해설생략. 정답은 1번

$$a_{n+1}=\begin{cases}-a_n & (a_n \geq 0) \\ 2a_n+2 & (a_n<0)\end{cases}$$

집합 $A=\{a_n \mid n$은 모든 자연수$\}$의 원소의 개수는 2개이다.

위 조건을 만족시키기 위해서는 수열 $\{a_n\}$의 구조가

$a_1, a_2, a_2, a_2, \cdots$ 꼴의 구조 이거나 $a_1, a_2, a_1, a_2, \cdots$ 꼴의 구조여야 한다.

i) $a_1, a_2, a_2, a_2, \cdots$ 구조일 경우

방정식 $a_n=a_{n+1}$을 풀자. $a_n=a_{n+1} \Rightarrow a_n=-a_n$ 또는 $a_n=2a_n+2$

$\Rightarrow a_n=0$ 또는 $a_n=-2$ ($a_n \geq 0$, $a_n<0$ 정의역 조건 주의)

$a_2=0$, $a_2=-2$가 되는 a_1을 찾아보자 (단, $a_1 \neq a_2$) $a_1=-1$ 또는 $a_1=2$ 를 얻는다.

ii) $a_1, a_2, a_1, a_2, \cdots$ 구조일 경우

방정식 $a_n=a_{n+2}$를 풀자. (단, $a_n \neq a_{n+1}$)

$a_n=a_{n+2} \Rightarrow a_n=-a_{n+1}$ 또는 $a_n=2a_{n+1}+2$에서

$a_n=-a_{n+1}$의 경우

$a_n=-a_{n+1} \Rightarrow a_n=a_n$ 또는 $a_n=-2a_n-2$인데 $a_n=a_n$는 정의역 조건에 위배되는 경우이고

$a_n=-2a_n-2$를 통해 $a_n=-\frac{2}{3}$이므로, $a_1=-\frac{2}{3}$를 얻는다.

$a_n=2a_{n+1}+2$의 경우

$a_n=2a_{n+1}+2 \Rightarrow a_n=-2a_n+2$또는 $a_n=4a_n+6$이므로

$a_n=\frac{2}{3}$ 또는 $a_n=-2$에서 $a_n=-2$는 가정($a_n \neq a_{n+1}$)을 위배하므로 불가. $a_1=\frac{2}{3}$를 얻는다.

(i), (ii)에 의해 $m+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k=4+1$ 이다. **답: 2번**

※ 수능완성

다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 자연수 p의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

(가) $a_1 = 1$, $a_{18} = 32$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n \le p) \\ \log_2 a_n & (a_n > p) \end{cases}$$

이다.

※ **변형문항**

$a_1=1$ 인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n \le p) \\ \log_2 a_n & (a_n > p) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 모든 자연수 p의 개수를 구하시오.

$\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값은 짝수이다.

※ 해설

$a_{18}=32$이므로 $a_{17}=16$ 또는 $a_{17}=2^{32}$이다.

그런데 $a_1=1$이므로 a_n의 정의에 의하여 $a_{17}=2^{32}$은 성립할 수 없다.

따라서 $a_{17}=16$이므로 $p \geq 16$이다.

$p=16$이면 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	1	2	4	8	16	32	5	10	20	$\log_2 20$	$\cdots$

이때 $a_{10}=\log_2 20$이 되어 그 값이 무리수이므로 $a_{18}=32$가 될 수 없다.

따라서 a_{18}의 값이 $32=2^5$이 되려면 p의 최솟값 m이 2^k (k는 자연수) 꼴이 되어야 하고 우선 다음 조건을 모두 만족시켜야 한다.

(i) $m=2^k>16$

(ii) $\log_2 2m=\log_2 2^{k+1}=k+1$이므로 $a_{18}=32$가 되려면 $k+1$의 값은 2의 거듭제곱꼴이어야 한다.

(i), (ii)를 모두 만족시키는 k의 값은 7, 15, 31, 63, $\cdots$

그런데 $k=15$, 즉 $m=2^{15}$이면 $a_{17}=2^{16}$, $a_{18}=16$이므로 만족시키지 않는다.

또한 $k=31$, 63, $\cdots$ 이면 $a_{18}>32$이므로 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 p의 최솟값은 $k=7$일 때이므로 $m=2^7=128$이고 그때의 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	8

n	11	12	13	14	15	16	17	18	$\cdots$
a_n	16	32	64	128	256	8	16	32	$\cdots$

따라서 조건을 만족시키는 p의 값의 범위는 $2^7 \leq p < 2^8$이다.

자연수 p의 최댓값 $M=255$이므로

$M+m=255+128=383$

답: 383

$1 \le n \le 6$ 에서 $a_{n+1} = 2a_n$ 이면
$a_1 = 1$이고, a_2부터 a_7까지 모두 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 $1 \le n \le 6$ 에서 $a_{n+1} = \log_2 a_n$ 을 만족시키는 n이 적어도 하나 존재한다.
이때, p는 자연수 이므로 $a_2 = 2a_1$ 는 확정적이다.

$a_3 = \log_2 a_2 = 1$일 경우
$a_4 = 2$, $a_5 = 1$, $\cdots$
$\sum_{n=1}^{7} a_n = 10$이므로 조건을 만족시킨다.
$a_3 = \log_2 a_2 = 1$를 만족시키는 $p = 1$ 이다.

$a_4 = \log_2 a_3 = 2$일 경우
$$\sum_{n=1}^{7} a_n = (1+2+4+2+4+2+4)$$
$$= 19$$
이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_5 = \log_2 a_4 = 3$일 경우
$a_4 = 8$, $a_5 = 3$, $a_6 = 6$이 결정된다.
$a_7 = 12$ 이면 조건을 만족시킬 수 있다.
$a_n = 8$ 일 경우 $a_{n+1} = \log_2 a_n$ 이고
$a_n = 6$ 일 경우 $a_{n+1} = 2a_n$ 이므로
$p = 6, 7$ 일 때 조건을 만족시킨다.

$a_6 = \log_2 a_5 = 4$일 경우
$$\sum_{n=1}^{7} a_n = (1+2+4+8+16+4+8)$$
$$= 43$$
이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_7 = \log_2 a_6 = 5$일 경우
조건을 만족시킬 수 있다.
$a_n = 32$ 일 경우 $a_{n+1} = \log_2 a_n$ 이고
$a_n = 16$ 일 경우 $a_{n+1} = 2a_n$ 이므로
$p = 16, 17, \cdots, 31$ 일 때 조건을 만족시킨다.

그러므로 만족시키는 $p = 1, 6, 7, 16, 17, \cdots, 31$ 이다. **답: 19**

※ 기출변형

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n-1} = a_4 \times a_n - 12$
(나) $a_{2n} = a_1 \times a_n + (-1)^n$

$\sum_{n=1}^{5} a_n$의 최댓값을 구하시오.

※ **기출변형**

$a_1 > 1$ 인 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_1 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자.

(가) $a_3 = a_6$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n - 1 & (a_n \le 5) \\ a_n - 3 & (a_n > 5) \end{cases}$$

이다.

① 10 ② $\frac{43}{4}$ ③ $\frac{23}{2}$ ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ 13

※ 기출변형

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n-1} = a_4 \times a_n - 12$
(나) $a_{2n} = a_1 \times a_n + (-1)^n$

$\sum_{n=1}^{5} a_n$의 최댓값을 구하시오.

※ 해설

(가)에 $n=1$을 대입하여 $a_1 = a_4 a_1 - 12$를 얻는다. ⋯ (ㄱ)

(나)에 $n=1$을 대입하여 $a_2 = (a_1)^2 - 1$, $n=2$를 대입하여 $a_4 = a_1 a_2 + 1$

$= (a_1)^3 - a_1 + 1$

이것을 (ㄱ)에 대입하면, $a_1 = (a_1)^4 - (a_1)^2 + a_1 - 12 \Rightarrow (a_1)^4 - (a_1)^2 - 12 = 0$

$\{(a_1)^2 - 4\}\{(a_1)^2 + 3\} = 0$, $a_1 = -2$ 또는 2를 얻는다.

i) $a_1 = -2$인 경우

$a_1 = -2$, $a_2 = 3$, $a_3 = -27$, $a_4 = -5$, $a_5 = 123$를 얻어

$\sum_{n=1}^{5} a_n = 92$

ii) $a_1 = 2$인 경우

$a_1 = -2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 7$, $a_5 = 51$를 얻어

$\sum_{n=1}^{5} a_n = 72$

답: 92

(가) $a_3 = a_6$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n - 1 & (a_n \le 4) \\ a_n - 3 & (a_n > 4) \end{cases}$$

이다.

※ 해설

$a_3 = a_6$를 만족시키기 위해서는

$a_{n+1} = 2a_n - 1$인 경우와 $a_{n+1} = a_n - 3$인 경우가 각각 1번 이상씩 나와야 한다.

$a_{n+1} = 2a_n - 1$인 경우를 사건 A, $a_{n+1} = 2a_n - 1$인 경우를 사건 B라 하자.

$a_3 = a_6$를 만족시키는 경우는 사건 AAB ABA ABB BAA BAB BBA 가 있다.

$a_3 = k$라 했을 때, 각각

$AAB \Rightarrow k = 4k - 6,\ k = 2$ $\quad$ $ABA \Rightarrow k = 4k - 9,\ k = 3$

$ABB \Rightarrow k = 2k - 7,\ k = 7$ $\quad$ $BAA \Rightarrow k = 4k - 15,\ k = 5$

$BAB \Rightarrow k = 2k - 10,\ k = 10$ $\quad$ $BBA \Rightarrow k = 2k - 13,\ k = 13$

그런데 m번째 항에서 사건 A 발생후 사건 B가 발생하기 위해서는

$a_{m+1} > 4$이어야 하는데 $2a_m - 1 > 4 \Rightarrow \dfrac{5}{2} < a_m \le 4$ 를 얻는다.

m번째 항에서 사건 B 발생 후 사건 A가 발생하기 위해서는

$a_{m+1} \le 4$이어야 하는데 $a_m - 3 \le 4 \Rightarrow 4 < a_m \le 7$ 를 얻는다.

이와 같은 정의역 조건을 적용하면 $k = 2, 3, 5$만 실현 가능함을 알 수 있다.

이제 $a_3 = 2$ 또는 3 또는 5 이기위한 a_2값을 구해보자.

a_2로 가능한 값은 $\dfrac{3}{2}, 5, 2, 6, 3, 8$이다. 마지막으로

a_1으로 가능한 값을 구하면 $\dfrac{5}{4}, \dfrac{9}{2}, 3, 8, \dfrac{3}{2}, 5, \dfrac{7}{2}, 9, 2, 6, 11$이 있다.

$M + m = \dfrac{49}{4}$이다. **답: 4번**

※ **수능특강**

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}(-1)^n\times(2a_n+3) & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\\ a_n-2 & (n\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_3=a_7$일 때, a_1의 값은? [21008-0184]

① $-\frac{6}{5}$ ② -1 ③ $-\frac{4}{5}$ ④ $-\frac{3}{5}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

※ **수능완성**

자연수 n과 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} n^2-2n+2 & (n \le 20) \\ 3n & (n \ge 21) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2} + \sum_{k=7}^{15} k a_{3k}$의 값은?

① -1727 ② -1729 ③ -1731 ④ -1733 ⑤ -1735

※ 수능특강

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}(-1)^n\times(2a_n+3) & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\\ a_n-2 & (n\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_3=a_7$일 때, a_1의 값은? [21008-0184]

① $-\frac{6}{5}$ ② -1 ③ $-\frac{4}{5}$ ④ $-\frac{3}{5}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

※ 해설

주어진 식의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례로 대입하면

$a_2=-(2a_1+3)=-2a-1-3$

$a_3=2a_2+3=2(-2a_1-3)+3=-4a_1-3$

$a_4=a_3-2=(-4a_1-3)-2=-4a_1-5$

$a_5=2a_4+3=2(-4a_1-5)+3=-8a_1-7$

$a_6=-(2a_5+3)=-\{2(-8a_1-7)+3\}=16a_1+11$

$a_7=a_6-2=(16a_1+11)-2=16a_1+9$

$a_3=a_7$이므로 $-4a_1-3=16a_1+9$

$20a_1=-12,\quad a_1=-\frac{3}{5}$

답: 4번

※ 해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 하면 $S_n = \begin{cases} n^2-2n+2 & (n \le 20) \\ 3n & (n \ge 21) \end{cases}$ …… ㉠

$a_n = (n^2-2n+2)-\{(n-1)^2-2(n-1)+2\} = 2n-3$, $n=1$일 때, ㉠에서 $a_1 = S_1 = 1$

$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2n-3 & (2 \le n \le 20) \end{cases}$ …… ㉡

$n=21$일 때, ㉠에서 $S_{21} = 3 \times 21 = 63$이므로

$a_{21} = S_{21} - S_{20} = 63 - (20^2 - 2\times 20 + 2) = -299$ …… ㉢

$n \ge 22$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2n-3 & (2 \le n \le 20) \\ -299 & (n=21) \\ 3 & (n \ge 22) \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2}$에서

(i) $k=1$일 때

$a_1 = 1$

(ii) $2 \le k \le 6$일 때

$a_k = 2k-3$에서

$$\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2} = -1 + \sum_{k=2}^{6} a_{3k-2} - (-1) = \sum_{k=1}^{6}(6k-7) - (-1)$$

$$= 6 \times \left(\frac{6\times 7}{2}\right) - 42 - (-1) = 85$$

$\sum_{k=7}^{15} k a_{3k}$에서

(iii) $k=7$일 때

$7a_{21} = 7 \times (-299) = -2093$

(iv) $8 \le k \le 15$일 때

$a_k = 3$이므로

$$\sum_{k=8}^{15} k a_{3k} = \sum_{k=8}^{15}(k\times 3) = 3\sum_{k=8}^{15} k$$

$$= 3\left(\sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{7} k\right) = 3\left(\frac{15\times 16}{2} - \frac{7\times 8}{2}\right) = 276$$

(i) ~ (iv)에서

$$\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2} + \sum_{k=7}^{15} k a_{3k} = 1 + 85 + (-2093) + 276 = -1731$$

답: 3번

※ **수능완성**

자연수 d에 대하여 모든 항이 정수이고, 공차가 $2d$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $|a_4|>|a_5|$를 만족시킬 때, a_4a_5가 최솟값을 갖도록 하는 a_1의 값을 $f(d)$라 하자. $f(2)+f(3)$의 값은?

① -31　② -33　③ -35　④ -37　⑤ -39

※ **수능특강**

첫째항이 -30이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. d와 S_n은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) d는 $3 < d < 30$인 자연수이다.
> (나) $|S_l| = |S_{l+7}| = |S_m|$을 만족시키는 서로 다른 두 자연수 l, m이 존재한다.

$a_l + a_{l+7} + a_m$의 값을 구하시오. (단, $m > l+7$)

※ 수능완성

자연수 d에 대하여 모든 항이 정수이고, 공차가 $2d$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $|a_4|>|a_5|$를 만족시킬 때, a_4a_5가 최솟값을 갖도록 하는 a_1의 값을 $f(d)$라 하자. $f(2)+f(3)$의 값은?

① -31 ② -33 ③ -35 ④ -37 ⑤ -39

※ 해설

등차수열 $\{a_n\}$에서 공차가 $2d$이고

$|a_4|>|a_5|$이므로, $(a_4)^2>(a_5)^2$

즉, $(a_1+6d)^2>(a_1+8d)^2$

$(a_1)^2+12a_1d+36d^2>(a_1)^2+16a_1d+64d^2$

$4a_1d+28d^2=4d(a_1+7d)<0$

$d>0$이므로 $a_1<-7d$ …… ㉠

$a_4a_5=(a_1+6d)(a_1+8d)$

$=(a_1)^2+14a_1d+48d^2$

$=(a_1+7d)^2-d^2$

㉠에서 $a_1<-7d$이고 a_1은 정수이므로

$a_1=-7d-1$일 때, a_4a_5는 최솟값을 가진다.

따라서 $f(d)=-7d-1$이므로 $f(2)+f(3)=(-15)+(-22)=-37$

※ 별해

모든 항이 정수이고 공차가 $2d>0$(d는 자연수)이므로 $a_4<a_5$

$|a_4|>|a_5|$에서 $a_4<0<a_5$, $a_4+a_5<0$…… ㉠

(i) $d=2$일 때, 공차가 4이므로 ㉠에서

$a_4=-3$, $a_5=1$

이때 $a_1=f(2)=a_4-3\times(\text{공차})=-3-3\times4=-15$

(ii) $d=3$일 때, 공차가 6이므로 ㉠에서

$a_4=-4$, $a_5=2$ 또는 $a_4=-5$, $a_5=1$

그런데 a_4a_5의 값이 최소이려면 $a_4=-4$, $a_5=2$이다.

이때 $a_1=f(3)=a_4-3\times(\text{공차})=-4-3\times6=-22$

(i), (ii)에서

$f(2)+f(3)=-15-22=-37$ **답: 4번**

※ **해설**

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 $d(3<d<30)$이고 첫째항이 -30이므로

$a_1 < a_k < 0 \le a_{k+1} < a_{k+2} < \cdots$을 만족시키는 자연수 $k(k\ge 2)$가 존재하고,

S_n의 최솟값은 S_k이다. 이때 $S_k \le S_{k+1} < 0$ 이고,

$S_{k+1} < 0 \le S_p < S_{p+1} < \cdots$을 만족시키는 자연수 p가 존재하므로

$|S_l| = |S_{l+7}| = |S_m|$을 만족시키는 서로 다른 세 자연수 $l, l+7, m(m>l+7)$이

존재하기 위해서는 $l<k<l+7<p<m$ 즉, $S_l<0$, $S_{l+7}<0$, $S_m>0$이어야 하므로

$S_l = S_{l+7} = -S_m$, $S_l = S_{l+7}$에서

$$\frac{l\{-60+(l-1)d\}}{2} = \frac{(l+7)\{-60+(l+6)d\}}{2} \Rightarrow dl^2 - dl - 60l = dl^2 + 13dl - 60l + 42d - 420$$

$14dl + 42d = 420$, $d(l+3)=30$이므로 d와 $l+3$은 30의 양의 약수이다.

d는 3보다 크고 30보다 작은 자연수이고, $l+3$은 3보다 크므로 $d=5$,

$l+3=6$ 또는 $d=6$, $l+3=5$

(ⅰ) $d=5$, $l+3=6$일 때

$l=3$이므로, $S_3 = \dfrac{3(-60+2\times 5)}{2} = -75$

이때 $S_m = 75$이어야 하므로 $S_m = \dfrac{5m^2-65m}{2} = 75$, $5m^2 - 65m - 150 = 0$

$m=-2$ 또는 $m=15$, m은 자연수이므로 $m=15$

(ⅱ) $d=6$, $l+3=5$일 때

$l=2$이므로, $S_2 = \dfrac{2(-60+1\times 6)}{2} = -54$

이때 $S_m = 54$이어야 하므로 $S_m = \dfrac{6m^2-66m}{2} = 54$, $6m^2 - 66m - 108 = 0$

$m^2 - 11m - 18 = 0$ …… ㉠, 방정식 ㉠을 만족시키는 자연수 m은 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $d=5$, $l=3$, $l+7=10$, $m=15$이므로

$a_l = a_3 = -30 + (3-1)\times 5 = -20$

$a_{l+7} = a_{10} = -30 + (10-1)\times 5 = 15$

$a_m = a_{15} = -30 + (15-1)\times 5 = 40$

따라서, $a_l + a_{l+7} + a_m = -20 + 15 + 40 = 35$

답: 35

※ **수능특강**

모든 항이 0이 아닌 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = {a_n}^2 - 2a_n$$

을 만족시킨다. $a_2 \neq a_3$, $a_4 = a_5$일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하시오.

※ **자작문항**

첫째항과 공비가 0이 아닌 정수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{3}(a_n - a_{5-n}) = 126$$

일 때, a_2의 최댓값은 M, 최솟값은 m이다. $M-m$의 값을 구하시오.

※ **수능특강**

첫째항이 정수이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_4 a_5 < 0$이고 $\dfrac{a_1}{a_4}$의 값이 자연수일 때, a_{10}의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$a_{n+1}=a_n^{\ 2}-2a_n$ …… ㉠
㉠의 양변에 $n=4$를 대입하면 $a_5=a_4^{\ 2}-2a_4$
$a_4=a_5$이므로 $a_4=a_4^{\ 2}-2a_4$, $a_4^{\ 2}-3a_4=0$
$a_4(a_4-3)=0$, $a_4=0$ 또는 $a_4=3$
그런데 수열 $\{a_n\}$이 모든 항의 0이 아닌 정수이므로 $a_4=3$
㉠의 양변에 $n=3$을 대입하면
$a_4=a_3^{\ 2}-2a_3$이므로 $a_3^{\ 2}-2a_3-3=0$
$(a_3+1)(a_3-3)=0$ $a_3=-1$또는 $a_3=3$

㉠의 양변에 $n=2$를 대입하면 $a_3=a_2^{\ 2}-2a_2$ ……㉡
(i) $a_3=-1$이면 ㉡에서
$a_2^{\ 2}-2a_2=-1$, $a_2^{\ 2}-2a_2+1=0(a_2-1)^2=0$, $a_2=1$
㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면
$a_2=a_1^{\ 2}-2a_1$ …… ㉢
$a_2=1$을 ㉢에 대입하면 $a_1^{\ 2}-2a_1=1$, $a_1^{\ 2}-2a_1-1=0$
그런데 이를 만족시키는 정수 a_1는 없다.
(ii) $a_3=3$이면 ㉡에서
$a_2^{\ 2}-2a_2=3$, $a_2^{\ 2}-2a_2-3=0$. $(a_2+1)(a_2-3)=0$. $a_2=-1$또는 $a_2=3$
$a_2\neq a_3$이므로 $a_2=-1$
㉢에서 $a_1^{\ 2}-2a_1=-1$, $a_1^{\ 2}-2a_1+1=0$
$(a_1-1)^2=0$ $a_1=1$
(i), (ii)에서 $a_1=1$, $a_2=-1$, $a_3=a_4=a_5=3$이므로
$\sum^{5}_{k=1} a_k=1+(-1)+3+3+3=9$

답:9

$$\sum_{n=1}^{3}(a_n - a_{5-n}) = a_1 - a_4$$

$$= a_1(1-r^3)$$

$$= 126 \text{ 에서}$$

가능한 정수 a_1과 r의 순서쌍을 모두 구하여 보자.

오른쪽과 같이 6가지의 순서쌍을 얻을 수 있다.

가능한 a_2의 값의 최댓값은 -5, 최솟값은 -63이다.

a_1	r
-18	2
-2	4
63	-1
14	-2
2	-4
1	-5

답:58

〔해설〕

첫째항이 정수이고 공차가 3이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

$a_5 = a_4 + 3$, $a_4 a_5 < 0$이므로

$a_4(a_4+3) < 0$

$-3 < a_4 < 0$

따라서 $a_4 = -2$ 또는 $a_4 = -1$

(i) $a_4 = -2$, $a_5 = 1$인 경우

$a_4 = a_1 + 3 \times 3 = -2$, $a_1 = -11$

이때 $\dfrac{a_1}{a_4} = \dfrac{-11}{-2} = \dfrac{11}{2}$이므로 $\dfrac{a_1}{a_4}$의 값은 자연수가 아니다.

(ii) $a_4 = -1$, $a_5 = 2$인 경우

$a_4 = a_1 + 3 \times 3 = -1$, $a_1 = -10$

이므로 $\dfrac{a_1}{a_4} = \dfrac{-10}{-1} = 10$

이때 $a_{10} = -10 + 9 \times 3 = 17$

답:5번

Yes, You can