제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-2x, \quad f(1)=1$$

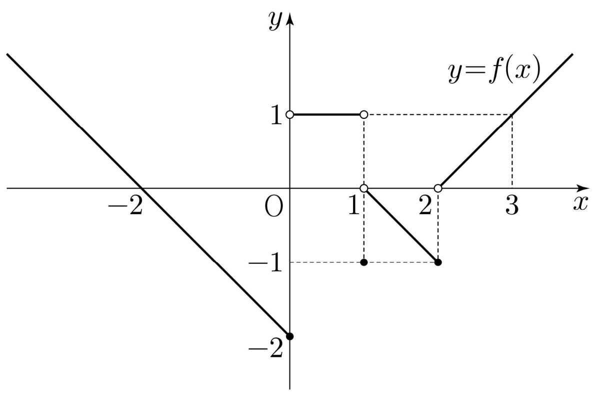
을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 인 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left(x^2+3\right)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2\left(S_3-S_2\right)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

10. $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1) \end{cases}$

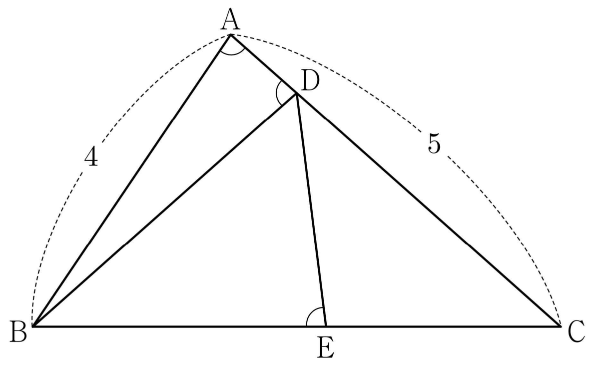
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다. (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

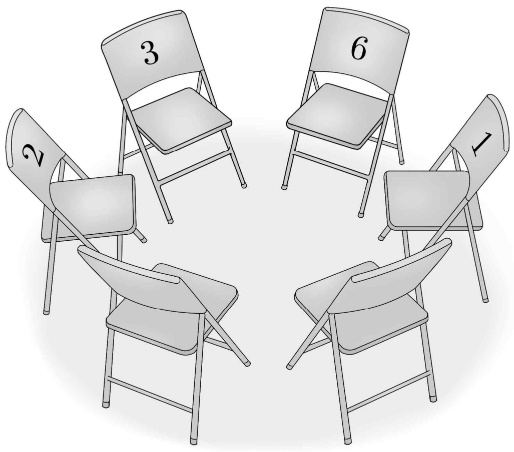
① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

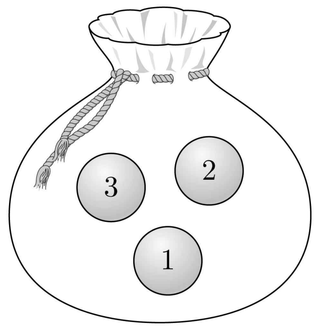
① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2. 함수 $f(x) = 2x^3 + 4x + 5$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 2, \quad a_2 a_4 = 36$$

일 때, $\dfrac{a_7}{a_3}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x \le -1) \\ x^2 - 5x - a & (x > -1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

8. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

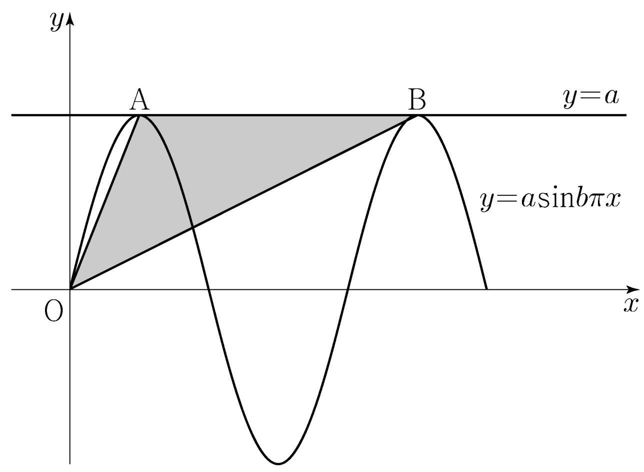
$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le\frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

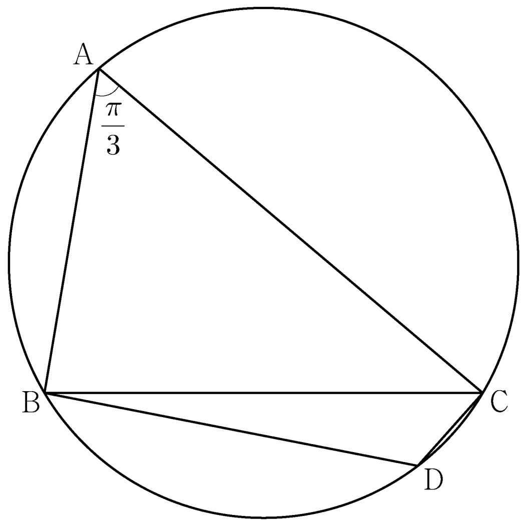
$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$일 때, $a+f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle\mathrm{BCD})=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]

① $\frac{19}{2}$　② 10　③ $\frac{21}{2}$　④ 11　⑤ $\frac{23}{2}$



13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

> (가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> <보 기>
>
> ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1) = 0$이다.
>
> ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.
>
> ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

단답형

16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45, \quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

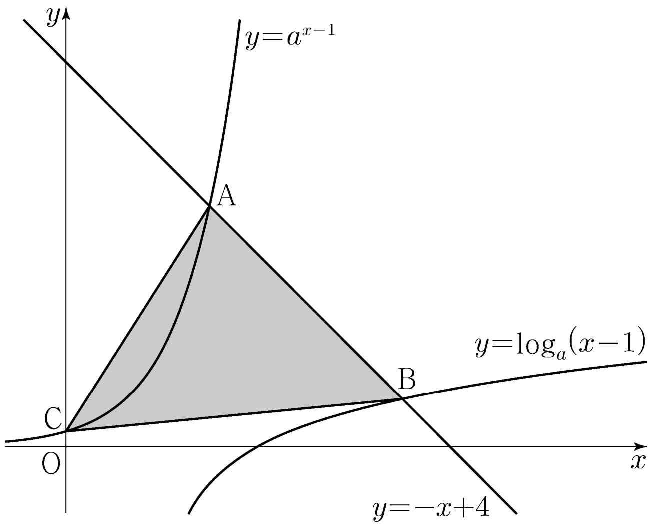
$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(60,\ \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

24. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 2, 4, 6, 8 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $a \times b > 31$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

25. $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수가 같을 때, 양수 a의 값은? [3점]

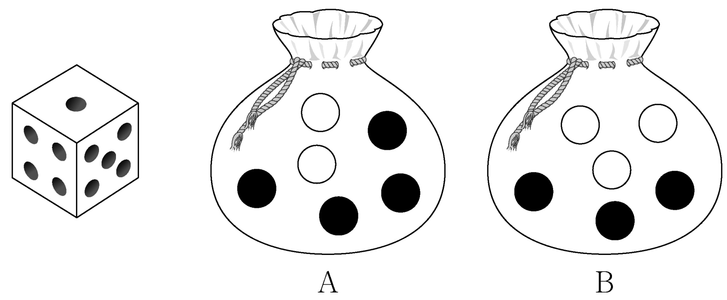
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고, 나온 눈의 수가 4 이하이면 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰색일 때, 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은? [3점]

① $\dfrac{1}{7}$ ② $\dfrac{3}{14}$ ③ $\dfrac{2}{7}$ ④ $\dfrac{5}{14}$ ⑤ $\dfrac{3}{7}$



27. 지역 A에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 X, 지역 B에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 Y라 하자. 두 확률변수 X, Y는 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 확률변수 X, Y의 평균은 각각 220과 240이다.
(나) 확률변수 Y의 표준편차는 확률변수 X의 표준편차의 1.5배이다.

지역 A에 살고 있는 성인 중 임의추출한 n명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{X}$, 지역 B에 살고 있는 성인 중 임의추출한 $9n$명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le 215) = 0.1587$일 때, $\mathrm{P}(\overline{Y} \ge 235)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 물 사용량의 단위는 L이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8413 ⑤ 0.9772

28. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(3) + f(4)$는 5의 배수이다.
(나) $f(1) < f(3)$이고 $f(2) < f(3)$이다.
(다) $f(4) < f(5)$이고 $f(4) < f(6)$이다.

① 384 ② 394 ③ 404 ④ 414 ⑤ 424

단답형

29. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$일 때, $10\times\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

by 심상범 in Orbi

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = \boxed{4}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int f'(x)\,dx = x^3 - x^2 + C = f(x)$

$f(1) = 1 - 1 + C = 1$

$C = 1$

그러므로

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$\boxed{f(2) = 8 - 4 + 1 = 5}$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

주어진 각은 제 3사분면에

$\cos\theta$와 $\sin\theta$의 비율이 $5:12$이다.

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

tan의 값을 준다는 것을 보고 주어진 각을 그려봐도 되고

다르게 보면 cos 과 sin 의 비율이 5 : 12 라는 것이다.

각이 같으므로 cos 과 sin 값을 제곱해서 더하면 1이 되어야 한다.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos\theta = 5k$

$\sin\theta = 12k$

5:12이므로

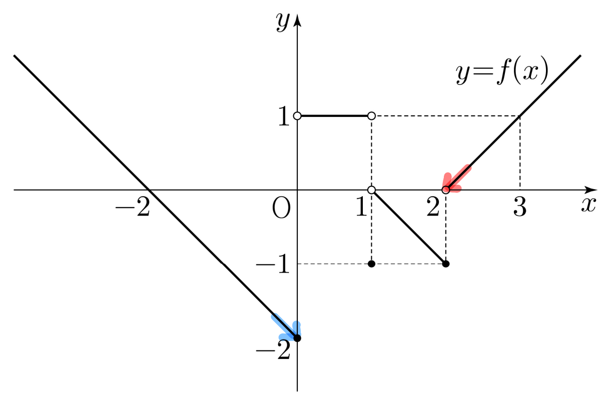
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 25k^2 + 144k^2 = 1$ $\quad k = \pm\frac{1}{13}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로 $k = -\frac{1}{13}$이다.

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

$\boxed{\sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

-2 $\quad 0$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$

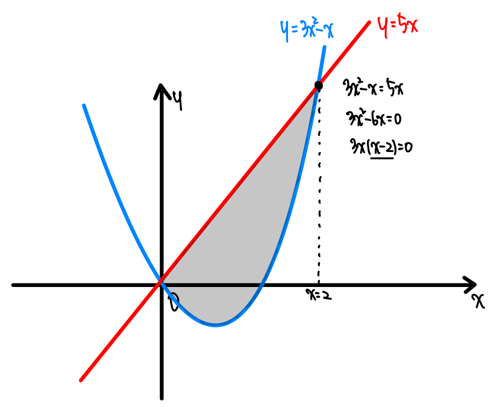
$=4+4=\boxed{8}$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

$y=x(3x-1)$

$x=0,\ \frac{1}{3}$에서 x축과 만남

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$\int_0^2 5x-(3x^2-x)\,dx=\int_0^2 -3x^2+6x\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2$

$=-8+12=\boxed{4}$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

공차만 알면 된다.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

$(a_1+a_2+a_3)-(a_1+a_2)=a_3$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_6=2a_3$

$(2+5d)=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$

$d=2$

수열 a_n은 공차가 2이고 첫항은 2이다.

$a_n=2n$

$S_{10}=\frac{2+20}{2}\cdot 10=11\cdot 10=\boxed{110}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+6 & (x<a)\\ 2x-a & (x\ge a)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

써보자.

좌극한 = 우극한 = 함숫값

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\{f(x)\}^2=\begin{cases}(-2x+6)^2=4x^2-24x+36 & (x<a)\\ (2x-a)^2=4x^2-4ax+a^2 & (x\ge a)\end{cases}$$

$\lim_{x\to a^-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a^-}4x^2-24x+36=4a^2-24a+36$

$\lim_{x\to a^+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a^+}4x^2-4ax+a^2=4a^2-4a^2+a^2$

= 함숫값

$4a^2-24a+36=a^2$

$3a^2-24a+36=0$

$3(a^2-8a+12)=0$

$3(a-6)(a-2)=0$

$a=6$ or $a=2$

$\boxed{6+2=8}$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

홀수항 → 짝수항 : 역수

짝수항 → 홀수항 : 8배

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

우리가 익히 아는 수열이 아니므로 천천히 '해보자'

$a_{12}=\frac{1}{2}\longrightarrow a_{11}=2\longrightarrow a_{10}=\frac{1}{4}\longrightarrow a_9=4$

4단계마다 반복

$\longrightarrow a_8=\frac{1}{2}\longrightarrow a_7=2$

$a_{12}=a_8=a_4=\frac{1}{2}$

$a_1=a_5=a_9=4$

$\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$

10. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$

$\log_n x+\log_n(x+3)=1$

$x(x+3)=n$

$1<x<2$이므로

$1\times4<n<2\times5$

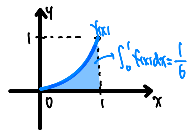
$4<n<10$

$n=5,6,7,8,9$ $\boxed{5+6+7+8+9=35}$

11. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

가정 →

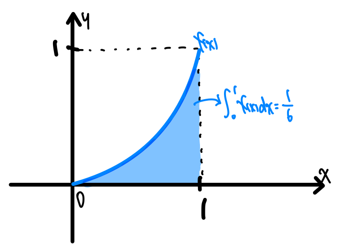


을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

> (가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$
>
> f(x)를 x축 대칭시키고 x축 방향으로 -1, y축 방향으로 1이동
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.
>
> g(x)의 주기가 2이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

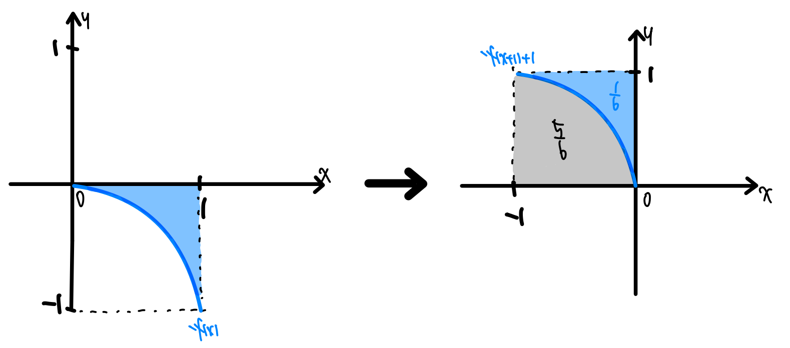
닫힌 구간 [0,1] 에서 연속인 함수 f(x) 에 대한 정보들을 종합하여 그래프를 가정해보자.



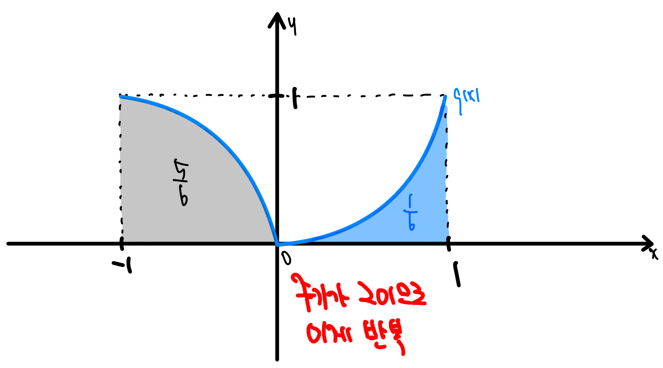
f(x) 로 이루어진 함수 g(x) 에서 -1< x <0 에서의 함수를 최대한 그래프에서 표현해보자.

g(x) = -f(x+1)+1

평행이동시키면 된다.



그렇다면 g(x) 의 그래프는 아래와 같다.



$$\int_{-3}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$$

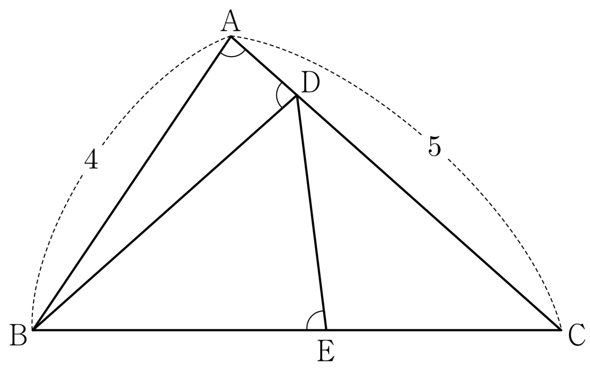
$$=1+1+\frac{5}{6}=\boxed{\frac{17}{6}}$$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

cos(∠BDA) = cos(∠BED) = $\frac{1}{8}$

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

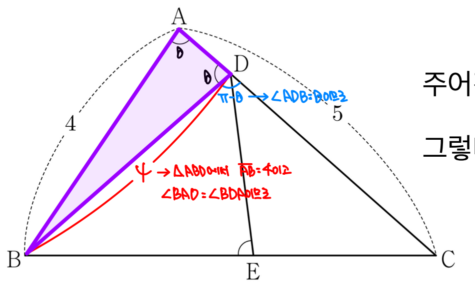
일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

주어진 도형 안에 있는 각 중 3개가 같고 이 각의 cos값을 주었으므로 이 각을 미지수로 잡고 문제를 시작해보자.

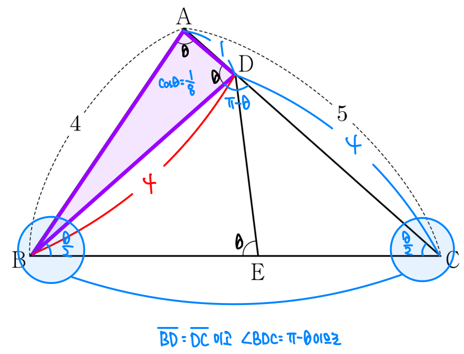
∠BAC=∠BDA=∠BED=θ라고 하자. → $\cos\theta=\frac{1}{8}$



주어진 각을 미지수로 두면 변 BD가 4라는 것도 알 수 있다.

그렇다면 삼각형 ABD에서 cos법칙을 쓸 준비가 끝났다.

$\overline{AB}=\overline{BD}=4$이고 $\cos\theta=\frac{1}{8}$이므로 $\overline{AD}$를 구할 수 있다.



$\overline{BD}=\overline{DC}$이고 ∠BDC=π-θ이므로

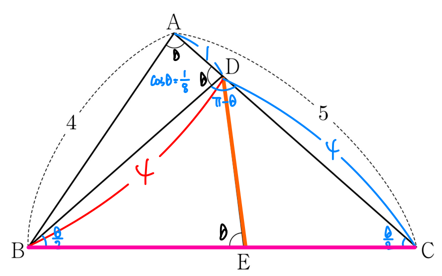
$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\theta=\overline{BD}^2$$

$$16+\overline{AD}^2-8\cdot\overline{AD}\cdot\frac{1}{8}=16$$

$$\overline{AD}^2-\overline{AD}=0$$

$\overline{AD}=1$

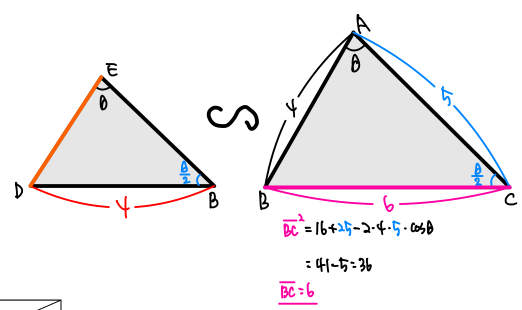
그렇다면 $\overline{DC}=5-1=4$이다.



주황색으로 표시한 변 DE의 길이를 알기 위해서는 그 변을 포함한 삼각형을 유심히 볼 필요가 있다.

우리가 구해놓은 것들을 모두 그려본 뒤 살펴보면 삼각형 ABC와 삼각형 EDB가 닮음이다.

AA닮음 : ∠DEB=∠BAC, ∠EBD=∠ACB



$\overline{BC}^2=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\theta$

$=41-5=36$

$\overline{BC}=6$

닮음비가 4:6=2:3이므로

$$\boxed{\overline{DE}=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}}$$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

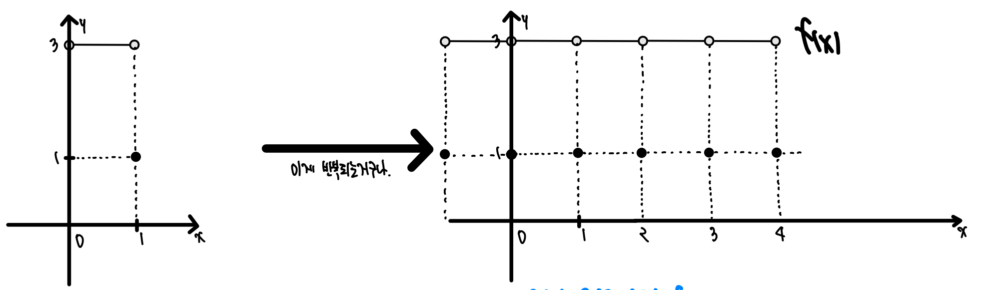
$$f(x)=\begin{cases}3 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.
주기가 1인 함수다.

$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

구해야하는 것이 함숫값을 기반으로 한 수이므로 주어진 함수를 한 번 그려보도록 하자.



(x가 정수라면 $f(x)=1$이고
x가 정수가 아니라면 $f(x)=3$이다.

함수의 그래프는 그렸고 이제는 수열에 대한 파악을 해야한다.

우리에게 익숙한 수열은 아니므로 천천히 해보자.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=\frac{1}{3}\{1\times f(1)+2\times f(\sqrt{2})+\cdots+20\times f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}\{f(1)+4f(\sqrt{4})+9f(\sqrt{9})+16f(\sqrt{16})\}+\frac{1}{3}\{2f(\sqrt{2})+3f(\sqrt{3})+\cdots+20f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}(1+4+9+16)+\frac{1}{3}(2\cdot3+3\cdot3+\cdots+20\cdot3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot30+(2+3+5+6+7+8+10+11+12+13+14+15+17+18+19+20)$$

$$=10+\left\{\frac{1+20}{2}\cdot20-(1+4+9+16)\right\}$$

$$=10+(210-30)=\boxed{190}$$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]
$g(x)=\cdots$의 형태로 만든다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

한 개만 나오는지

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제에서 중심으로 잡는 것이 $g(x)$이므로 정리해보면 아래와 같다..

$$g(x)=\frac{|x|\cdot|f(x-p)+q|}{x}$$

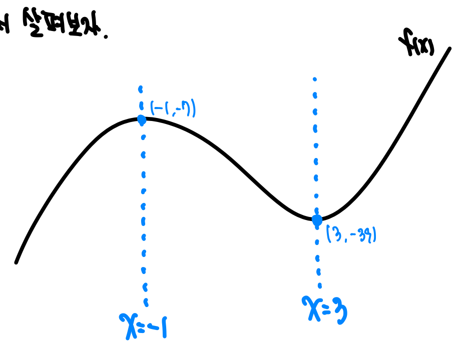
조건 (나)에 의하면 우리는 위의 식에서 미분가능하지 않은 점에 대해 생각해봐야한다.

식으로 보았을 때는 절댓값이 쳐져 있는 $f(x-p)+q$와 x가 0이 될 때를 눈여겨보자.

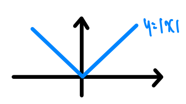
∘ $f(x-p)+q$

$f(x-p)+q$는 $f(x)$를 이동시킨 그래프이므로 $f(x)$를 먼저 살펴보자.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x+1)(x-3)$$



$g(x)$의 식에서 $|x|$은 x=0에서 미분불가능한 점을 하나 만들게 된다.



$f(x-p)+q$은 3차식이므로 실근을 1~3개를 가질 수 있다.

실근을 가지는 지점이 미분불가능한 점의 후보이므로 개수별로 경우의 수를 따져보자.

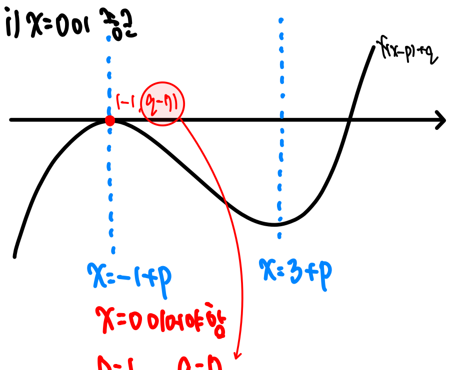
실근 1개: 실근이 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 2개라 X
x=0이 실근이라면 x=0에서 미분가능해지므로 미분불가능한 점이 0개->X

실근 2개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 2개라 X
하나의 중근을 가진다.
실근 중 하나는 x=0이고 나머지는 아니라면 x=0에서는 미분가능해지므로->O

실근 3개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 4개라 X
실근 중 x=0이 하나라면 x=0에서는 미분가능하고 미분불가능한 점이 3개->X

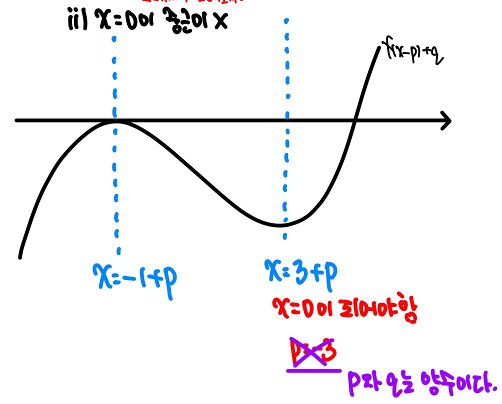
그렇다면 $f(x-p)+q=0$은 실근을 2개 가져야하고 x=0이 중근인지는 알 수 없다.
그래서 체크해보자.

i) $x=0$이 중근



$\boxed{p+q=8}$

ii) $x=0$이 중근이 X



15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

$\sin\frac{\pi x}{2} = t$ or $\cos\frac{\pi x}{2} = t$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

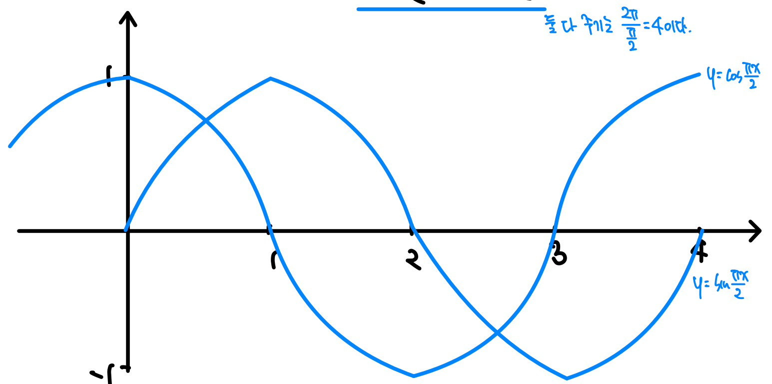
ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

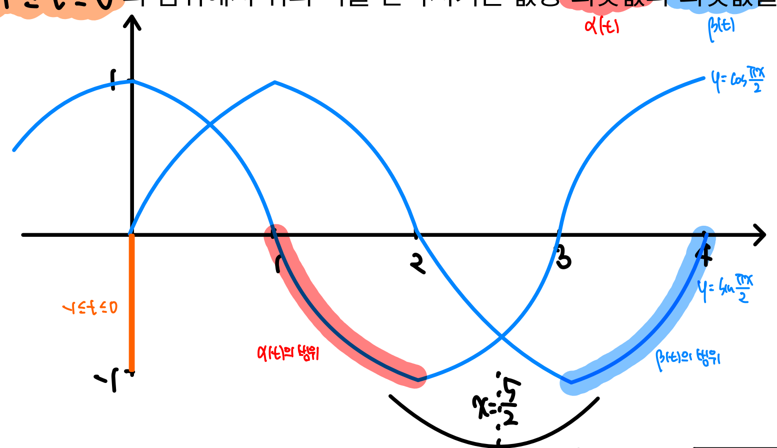
문제의 식에서 가장 중요한 것은 $\sin\frac{\pi x}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{2}$ 으로 보이므로 그래프를 그려보자.

둘 다 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$이다.



ㄱ. $-1 \le t \le 0$의 범위에서 위의 식을 만족시키는 값중 최솟값과 최댓값을 그래프에서 보자.

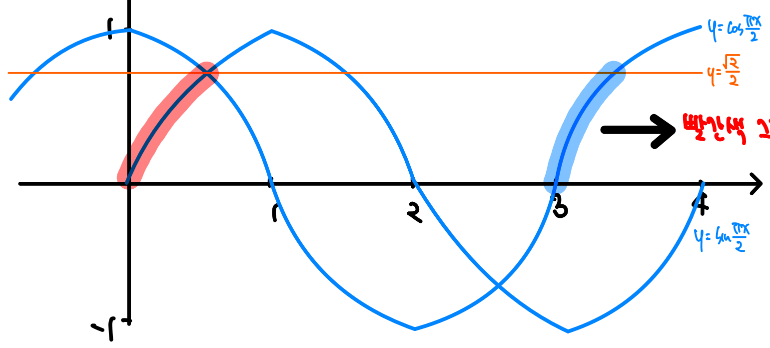
$\alpha(t)$ $\beta(t)$



$\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 $x = \frac{5}{2}$ 대칭이므로 $\boxed{\alpha(t) + \beta(t) = 5 \ (O)}$

ㄴ. $\beta(t) - \alpha(t) = \underset{3}{\beta(0)} - \underset{0}{\alpha(0)} = 3$를 만족시키는 t 의 범위에 대한 질문이다.

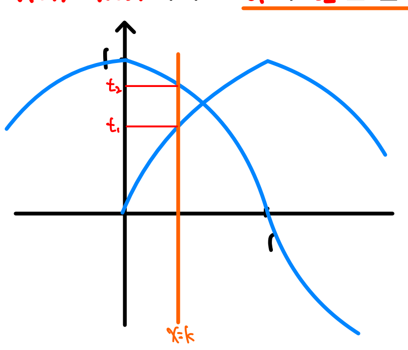
→ 두 값간의 거리가 3이다. $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$



→ 빨간색 그래프와 파란색 그래프의 개형이 같고 $\boxed{\text{거리가 3이므로 맞다 (O)}}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ 이려면 t_1 과 t_2 는 같은 x좌표를 가져야 한다.

$x = k$라고 하자.



$t_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right)$ $t_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right)$

$t_2 - t_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right) = \frac{1}{2}$ 가정

$t_1 \cdot t_2 = \frac{t_1^2 + t_2^2 - (t_1 - t_2)^2}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \boxed{\frac{3}{8} \ (X)}$

단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

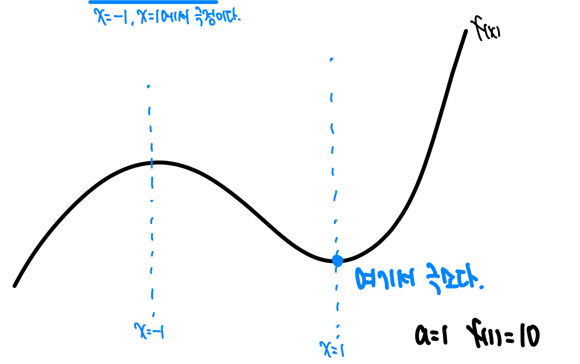
$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 = \log_4 16 = \boxed{2}$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(a) = 0$이고 도함수가 음→양

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$x = -1, x = 1$에서 극점이다.



$a = 1$ $f(1) = 10$

$\boxed{a + f(a) = 1 + 10 = 11}$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

공비가 양수네

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

2단계를 거치면 $\frac{1}{3}$이 된다. → 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이네

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$a_6 = a_2 \cdot r^4 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 36 \times \frac{1}{9} = \boxed{4}$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

위치는 속도를 적분

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

위치는 속도를 적분하면 된다.

$\int v(t)dt = t^3 - 2t^2 + kt + C = x(t)$

$x(0) = C = 0$

$x(1) = 1 - 2 + k = -3$

$k = -2$

$x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$

$t=1 \sim t=3$에서는 운동 방향의 변화가 없으므로

$x(3) - x(1) = (27 - 18 - 6) - (1 - 2 - 2)$

$= 3 + 3 = \boxed{6}$

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

t에 대한 적분인데 x가 같이 있으니 분리해두자.

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

도함수를 구해서 보자.

$g(x) = \int_a^x f(x) \cdot \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x f(t)\{f(t)\}^4 dt$

$= f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$

$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \cancel{f(x) \cdot \{f(x)\}^4} - \cancel{\{f(x)\}^5}$

$= f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$

$x = a$ 말고는 부호변화 X

$\{f(t)\}^4 \geq 0$이므로

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$

$= 3(x^2 - 8x + 15)$

$= 3(x-3)(x-5)$

$x=3,\ x=5$에서 부호변화 O

$a=3$ or $a=5$이어야 $g'(x)$의 부호변화가 1번

$\boxed{3+5=8}$

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$로 쓸 수 있다.

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> 근 4개 중에 2개씩 중복
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

조건 (가)에서 주어진 새로운 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면서 각각 중근이라면

실근이 2개씩 겹쳐야 하므로 모든 실근의 개수는 짝수여야 한다.

n 이 홀수라면 $x^n-64=0$ 에서 생기는 근의 개수가 1개이다.

그렇다면 $f(x)$이 이차식이므로 $(x^n-64)f(x)=0$ 의 모든 실근의 개수는 홀수가 된다.

실근이 최대 2개이다.

그렇다면 n 이 짝수가 될때도 체크해보자.

$\underbrace{(x^n-64)}_{\text{n이 짝수라면 여기서 근 2개}}\underbrace{f(x)}_{\text{이차식이므로 최대 2개}}=0 \longrightarrow$ 가능

위의 조건을 모두 만족시키기 위해서는 $f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$ 이 되어야 한다.

그렇다면 x=0일때 f(x)가 최소이고 $f(0)=-64^{\frac{2}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$ 이다.

그렇다면 n 은 12의 약수 중 짝수가 되어야 한다.

$n=\cancel{1},2,\cancel{3},4,6,12$

$\boxed{2+4+6+12=24}$

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

최고차항의 계수에 대한 언급 x

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> 실근 1개 + 중근 1(α, β로 두자)
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> $x-f(x)=\alpha$ or β

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

조건 (가)에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2개라는 것은

3차식인 $f(x)$ 와 x=0의 교점이 두 개라는 것이므로 하나의 교점과 하나의 접점을 가질 것이다.

조건 (나)에서 $f(x-f(x))=0$ 을 만족시키려면 $x-f(x)=\alpha$ or β를 만족시켜야 한다.

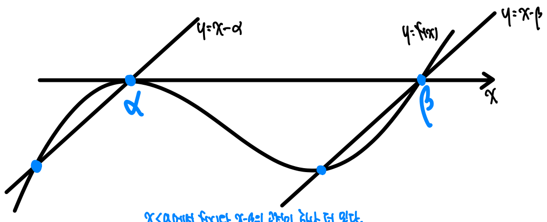
α와 β라고 하자.

식을 다시 정리하면 $f(x)=x-\alpha$ or $f(x)=x-\beta$ 을 만족시켜야 한다.

이를 확인하기 위해서는 그래프 간의 교점으로 체크해볼 필요가 있다.

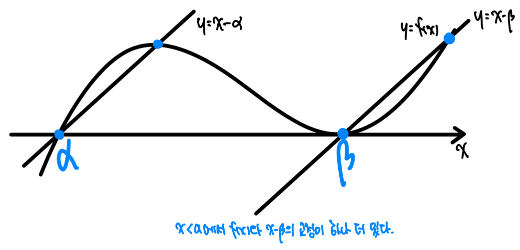
최고차항의 계수의 부호에 대한 언급이 없으므로 경우의 수를 모두 생각해보자.

i) 최고차항의 계수가 양수



$x<\alpha$에서 $f(x)$와 $x-\beta$의 교점이 하나 더 있다.

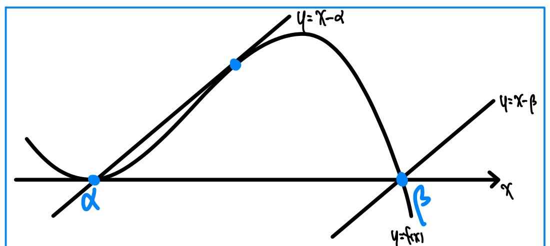
서로 다른 실근의 개수가 5개



$x<\alpha$에서 $f(x)$와 $x-\beta$의 교점이 하나 더 있다.

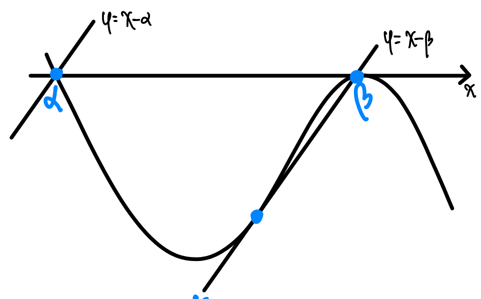
서로 다른 실근의 개수가 5개

ii) 최고차항의 계수가 음수



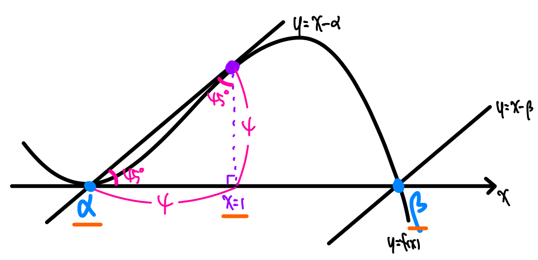
서로 다른 실근의 개수가 3개

이게 맞다.



서로 다른 실근의 개수가 3개

그러나 $f(1)=4$와 $f'(1)=1$을 동시에 만족시킬 수 없다.



① $f'(1)=1$이므로 $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 접점의 좌표가 (1,4)이다.

② $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 교점에서 $y=x-\alpha$와 x축이 이루는 각이 45°이므로 $\alpha=1-4=-3$이다.

③ 3차함수와 일차함수의 교점의 x좌표들의 합은 일정하므로 $-3+1+1=-3+(-3)+\beta$ $\quad \beta=5$

$f(x)=k(x+3)^2(x-5)$

$f(1)=k\cdot 16\cdot -4=4$

$k=-\frac{1}{16}$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$f(0)=-\frac{1}{16}\cdot 9^2\cdot -5=\frac{45}{16}$

$\boxed{p+q=61}$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

3번 2번

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

$_5C_3 \cdot (2x)^3 \cdot 1^2 = 10 \cdot 8x^3 = \boxed{80}x^3$

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

9명 그 중 5명

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

우선 숫자 4개를 골라서 4자리 수를 만드는 것이므로 우선 판을 깔아보자.

$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

이 수가 3500보다 클 때의 경우의 수를 구해보자.

천의 자리의 수에 따라 경우의 수를 나눠보자.

가장 큰 단위이므로

i) 천의 자리 수가 3

$\underline{3}\ \underline{5}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}}$

여기에 5가 들어가야 3500보다 클 수 있다.

1~5중 선택이므로 아무나 들어가도 된다.

경우의 수: $1 \times 5 \times 5 = 25$가지

ii) 천의 자리의 수가 4

$\underline{4}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}$

1~5중 아무거나 들어가도 된다.

경우의 수: $5 \times 5 \times 5 = 125$가지

iii) 천의 자리의 수가 5

$\underline{5}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}$

1~5중 아무거나 들어가도 된다.

경우의 수: $5 \times 5 \times 5 = 125$가지

전체 경우의 수: 5^4

$$\frac{25+125+125}{5^4} = \frac{1+5+5}{25} = \boxed{\frac{11}{25}}$$

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

1장?

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

우선 상황이 복잡하므로 표로 정리해보도록 하자.

	학생1	학생2	학생3	
빨간색	x_1	x_2	x_3	4
파란색	y_1	y_2	y_3	2
노란색	z_1	z_2	z_3	1

그려보면서 생각이 나는 것은 노란색 공이 하나밖에 없기에 노란색 공을 가져가는 학생은 나머지 공을 꼭 가져갈 필요없다는 것이다.

$$3 \times {}_3H_1 \times {}_3H_3 = 3 \times {}_3C_1 \times {}_5C_2 = \boxed{90\text{가지}}$$

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

1~6 앞, 뒤

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

동전의 개수가 4개이므로 앞면이 나오는 동전의 개수도 최대 4개이다.

4부터 1까지 천천히 경우의 수를 나눠보자.

i) 곱=동전의 앞면 개수=4

주사위 눈의 수 곱=4 $\frac{3}{36}\times(\frac{1}{2})^4$

→ (1,4), (2,2), (4,1)

3가지

ii) 곱=동전의 앞면 개수=3

주사위 눈의 수 곱=3 $\frac{2}{36}\times{}_4C_3\cdot(\frac{1}{2})^4$

→ (1,3), (3,1)

2가지

iii) 곱=동전의 앞면 개수=2

주사위 눈의 수 곱=2 $\frac{2}{36}\times{}_4C_2\times(\frac{1}{2})^4$

→ (1,2), (2,1)

2가지

xi) 곱=동전의 앞면 개수=1

주사위 눈의 수 곱=1 $\frac{1}{36}\times{}_4C_1\times(\frac{1}{2})^4$

→ (1,1)

1가지

$$(\frac{1}{2})^4\cdot(\frac{3}{36}+\frac{8}{36}+\frac{12}{36}+\frac{4}{36})=\frac{1}{16}\times\frac{\cancel{27}^{\,3}}{\cancel{36}_{\,4}}=\boxed{\frac{3}{64}}$$

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

3이하이면 그대로 가고
4이상이면 버린다.

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

이 문제에서의 조건은

주사위의 눈이 3 이하이면 그 숫자를 가져가고

4 이상이면 그 시행은 0점이 된다.

문제를 풀기 위해 정리해보면

4번을 시행의 값을 더하여 4가 되어야 하는데 조건에 의해 4 이상의 수가 나오면 0이므로

우리가 각 시행에서 더할 수 있는 수는 1~3 이다.

자연수가 아닌 0도 있다.

그렇다면 0~4 중 중복을 포함하여 4개 골라 합이 4가 되도록 하는 것이다.

가능한 경우의 수를 한 번 써보자.

i) 3+1+0+0

$\frac{4!}{2!}\times3^2=\boxed{108가지}$

→ 0을 더하는것은 4,5,6중 하나이므로

ii) 2+1+1+0

$\frac{4!}{2!}\times3=\boxed{36가지}$

→ 0을 더하는것은 4,5,6중 하나이므로

iii) 2+2+0+0

$\frac{4!}{2!2!}\times3^2=\boxed{54가지}$

→ 0을 더하는것은 4,5,6중 하나이므로

xi) 1+1+1+1

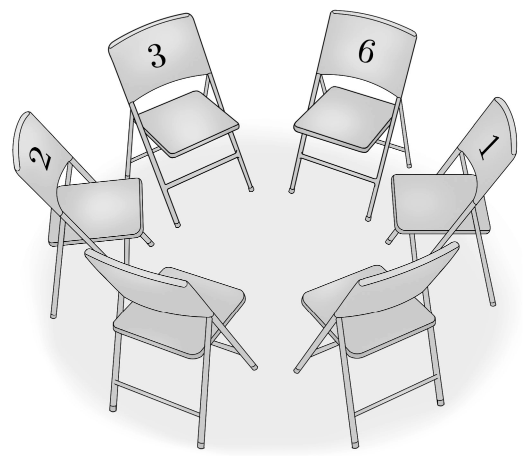
$1\times1=\boxed{1가지}$

108+36+54+1

$=\boxed{199가지}$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
$12=2\times6=3\times4$
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



이 문제의 배열의 가장 중요한 점은 '이웃한 2개의 곱이 12가 되지 않도록' 이다.

이것을 보고 12가 되지 않는 경우의 수를 모두 생각하기에는 무리가 있어보인다.

그렇다면 여사건을 사용하여

(전체의 배열 수)-(이웃한 수의 곱이 12가 되는 배열의 수)로 접근해보자.

전체 배열의 수: $\frac{6!}{6}=5!=120$가지

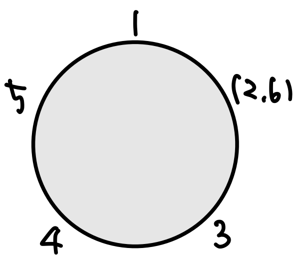
이웃한 수의 곱이 12가 되는 배열의 수

이웃한 두 수의 곱이 12가 되는 수의 조합을 우선 생각해보자 -> (2,6), (3,4)

이 두 가지로 경우의 수를 나눠보자.
(2,6)가 이웃 + (3,4)가 이웃 - (2,6),(3,4)가 동시에 이웃

i) 2와 6이 이웃

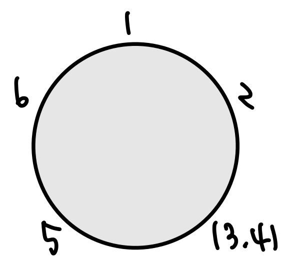
1, (2,6), 3, 4, 5를 원에 배열하면
이웃하므로 하나로 묶어서 보자.



$\frac{5!}{5}\times \underbrace{2}_{\text{2와 6이 바뀌는 경우}}=4!\times2=\boxed{48\text{가지}}$

ii) 3과 4가 이웃

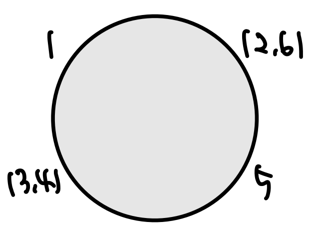
1, 2, (3,4), 5, 6을 원에 배열하면
이웃하므로 하나로 묶어서 보자.



$\frac{5!}{5}\times \underbrace{2}_{\text{3과 4가 바뀌는 경우}}=4!\times2=\boxed{48\text{가지}}$

iii) (2,6), (3,4)가 동시에 이웃

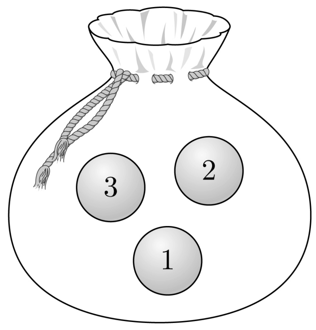
1, (2,6), (3,4), 5을 원에 배열하면



$\frac{4!}{4}\times \underbrace{2}_{\text{2와 6이 바뀌는 경우}}\times \underbrace{2}_{\text{3과 4가 바뀌는 경우}}=\boxed{24\text{가지}}$

$120-(48+48-24)=120-72=\boxed{48\text{가지}}$

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다.
복원추출
이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일
이거로 경우의 수를 나눌까?
확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1~3의 공 중 복원추출로 5번을 뽑아서 수의 곱이 6의 배수가 되어야 한다.

6의 배수가 되기 위해서는 6을 인수로 가지고 있어야 하고

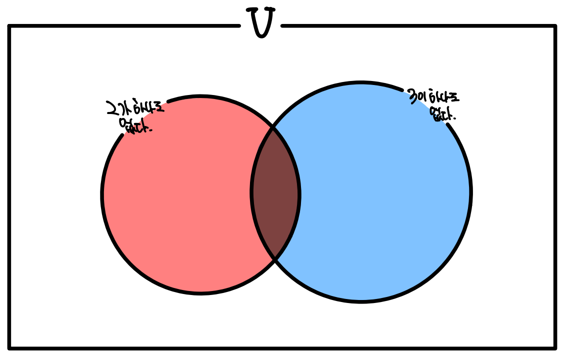
6의 인수인 2 와 3 을 가지고 있어야 한다.
이게 KEY POINT다.

단순히 바로 확률을 구하기 보다는 여사건을 활용하여 2 와 3 중 하나라도 빠진 경우의 수를
할 수 있다면 해도 좋다.
전체에서 빼도록 하자.

∘ 전체 확률 = 1

i) 2가 하나도 없을 확률

$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$



ii) 3이 하나도 없을 확률

$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

iii) 2와 3이 모두 없는 확률 = 1만 나온다.

$\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

$1-\left(\frac{32}{243}+\frac{32}{243}-\frac{1}{243}\right)$

$=1-\frac{63}{243}=\frac{180}{243}=\frac{60}{81}=\frac{20}{27}$

$p=27,\ q=20$

$\boxed{p+q=47}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

by 심상범 in Orbi

5지선다형

1. $\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}}_{=3^{-\frac{1}{4}}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}} = 3^{-2} = \boxed{\frac{1}{9}}$

2. 함수 $f(x) = 2x^3 + 4x + 5$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 6x^2 + 4$ $\boxed{f'(1) = 10}$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

첫항을 a, 공비를 r 이라고 하자.

$\underbrace{a_1 = 2}_{a=2}$, $\underbrace{a_2 a_4}_{ar \times ar^3 = 36} = 36$

$a^2 r^4 = 36$

일 때, $\dfrac{a_7}{a_3}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$a^2 r^4 = 36$

$a_1 = 2$

$4 \cdot r^4 = 36$

$r^4 = 9$

$\dfrac{a_7}{a_3} = \dfrac{\cancel{a} \cdot \cancel{r^6}}{\cancel{a} \cdot \cancel{r^2}} = \boxed{r^4 = 9}$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x \le -1) \\ x^2 - 5x - a & (x > -1) \end{cases}$$

다항함수는 모두 연속

그렇다면 경계가 의심스러움

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

좌극한=우극한=함숫값

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

실수 전체의 집합에서 불연속이 의심되는 점은 단 하나이다.-> x=-1

나머지는 모두 다항함수이므로

그렇다면 x=-1에서의 좌극한, 우극한, 함숫값을 따져보자.

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 2x + a = -2 + a$

$f(1) = -2 + a$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 - 5x - a = 1 + 5 - a = 6 - a$

$-2 + a = 6 - a$

$2a = 8$

$\boxed{a = 4}$

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

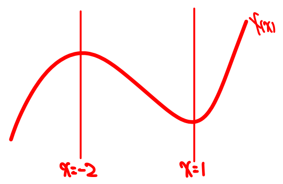
함수를 줬으니 구하자.

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)$

$=6\underbrace{(x+2)}_{x=-2에서\ 극대}\underbrace{(x-1)}_{x=1에서\ 극소}$



$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$

$m=f(1)=2+3-12+1=-6$

$\boxed{M+m=15}$

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

각이 특이하다. 통분하자.

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\frac{\cancel{\sin\theta}+\sin^2\theta-\cancel{\sin\theta}+\sin^2\theta}{\underbrace{1-\sin^2\theta}_{=\cos^2\theta}}$

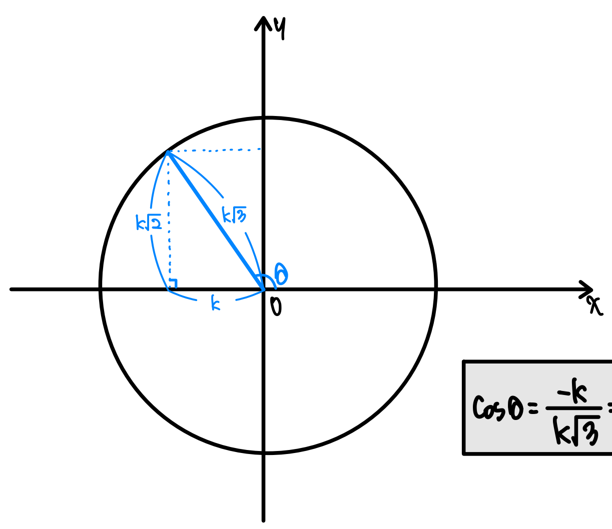
$=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=2\cdot\tan^2\theta=4$

$\tan^2\theta=2$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\tan\theta<0$

$\tan\theta=-\sqrt{2}$

이 각을 좌표평면에서 표현해보면 아래와 같다.



$\boxed{\cos\theta=\frac{-k}{k\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

첫항 주었다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

이걸 어떻게 해석할까?

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

수열 문제이고 주어진 수열을 잘 모르기에 일단 해보는 것이 맞는 선택이다.

그러나 이 문제의 경우의 수열의 일반항의 형태가 익숙한 형태이다.

그렇다면 일반항의 형태를 부분분수로 바꿔보자. 부분분수? $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}$이므로

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\left(\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{1}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_2}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{a_n}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$

문제에서 물어본 것이 13번째 항이므로 n=12를 대입하여 계산해보자.

a_{n+1}이므로

$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{13}}=\frac{1}{-4}-\frac{1}{a_{13}}=\frac{1}{12}$

$\boxed{a_{13}=-3}$

8. 삼차함수 $f(x)$가

최고차항의 계수는?

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$ $f'(0)=f'(1)=1$

$f(x)$는 x를 인수로 가진다. $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가진다.

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

주어진 함수가 3차함수라는 조건은 주었으나 최고차항의 계수를 주지 않았으므로

최고차항의 계수를 미지수로 잡자

k라고 하자.

그리고 문제에서 준 조건들에 의해 f(x)는 x와 x-1을 인수로 가진다.

f(x)는 3차식이므로 마지막 하나의 인수를 x-p라고 하자.

$$f(x)=kx(x-1)(x-p)$$

문제 조건에 의해 f'(0)=f'(1)=1이므로 모두 계산해보자.

$$f'(x)=k(x-1)(x-p)+kx(x-p)+kx(x-1)$$

$$\left.\begin{aligned}f'(0)&=k\cdot(-1)(-p)=kp\\ f'(1)&=k\cdot 1\cdot(1-p)=k-kp\end{aligned}\right)\ p=\frac{1}{2},\ k=2,\ f(x)=2x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{f(2)=2\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{\cancel{2}}=6}$$

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

적분하면 위치, 미분하면 가속도

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

미분해서 구하자.

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

시간을 매개로 하는 속도 식을 주었으므로

이 식을 미분하면-> 시간에 대한 가속도 식을 알 수 있고
이 식을 적분하면-> 시간에 대한 위치 식을 알 수 있다.

t=k일때 가속도가 12라고 하였으므로 가속도 식을 구해서 k를 구해보자.

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

$$a(t)=-12t^2+24t=12$$

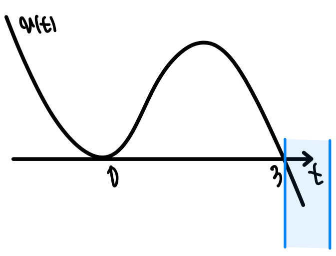
$$t=1$$

그렇다면 우리가 구해야하는 것은

t=3 ~ t=4에서 움직인 거리이므로 점 P의 움직임을 파악하고 거리를 구해주자.

속도를 통해 파악

$$v(t)=-4t^2(t-3)$$



t=3~4에서는 운동 방향 변화 X

위치

$$x(t)=\int v(t)\,dt=-t^4+4t^3+C$$

$$\boxed{|x(4)-x(3)|=27}$$

10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le \frac{3}{b}\right)$이

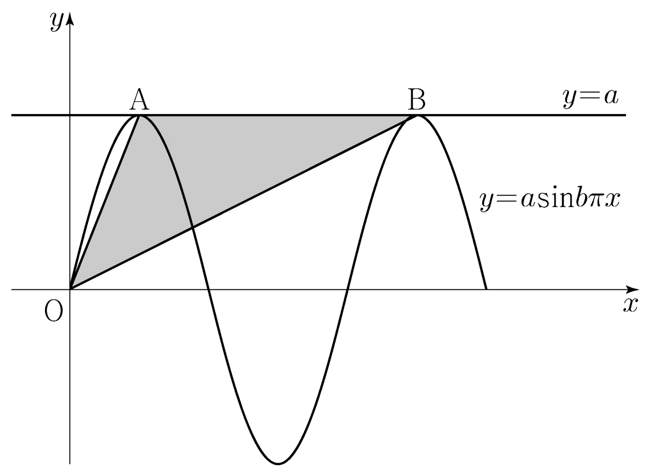
특이하게 조건이 붙네

직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와

AB를 밑변으로 점 A와 B를 구하자.

직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



문제 초반에서 미지수 a, b가 양수라는 준 것을 인지하고 시작하자.

문제에서 준 조건은 크게 두 가지로 보인다.

1. 삼각형 OAB의 넓이=5   2. 직선 OA의 기울기 * 직선 OB의 기울기=$\frac{5}{4}$

첫 번째 조건을 풀기 위한 삼각형의 높이가 a로 주어져있으므로 1번 조건 먼저 해보자.

삼각형 OAB에서 밑변을 선분AB, 높이를 a라고 하자.

선분 AB의 길이가 필요하므로 주어진 함수의 주기를 구해보자.

$\overline{AB}$가 함수의 한 주기이므로

$$y=a\sin b\pi x$$

주기는 $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{b}$이다. 그렇다면 $\overline{AB}=\frac{2}{b}$이다.

$$\triangle OAB=\overline{AB}\times a\times\frac{1}{2}=\frac{\cancel{2}}{b}\times a\times\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{a}{b}=5$$

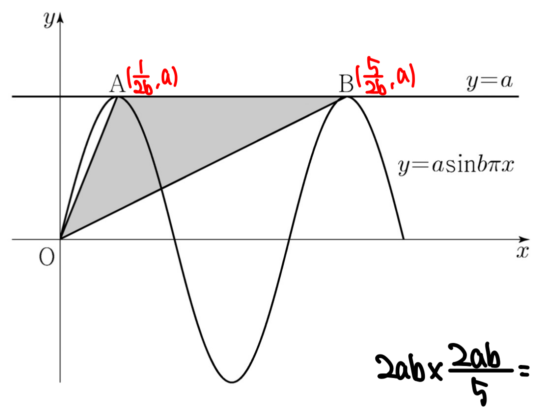
$$a=5b$$

두 번째 조건을 위해서는 점 A와 점 B의 좌표가 필요하다.

우리가 함수의 주기까지 구해놨으므로 각 점의 좌표를 쓸 수 있다.

점A의 x좌표는 주기의 $\frac{1}{4}$이고

점B의 x좌표는 주기의 $\frac{5}{4}$이다.



$\overline{OA}$의 기울기$=\dfrac{a}{\frac{1}{2b}}=2ab$

$\overline{OB}$의 기울기$=\dfrac{a}{\frac{5}{2b}}=\frac{2}{5}ab$

$$2ab\times\frac{2ab}{5}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$$

$$ab=\frac{5}{4}$$

$a=5b$이므로 $\rightarrow a=\frac{5}{2},\ b=\frac{1}{2}$ $\boxed{a+b=3}$

11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

자세한 정보는 X

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)\,dt$$

x=1 대입 → 그렇다면 0이 된다.
x에 대해 미분 → f(x)로 정리 가능

를 만족시킨다. $f(1) = \int_0^1 f(t)\,dt$ 일 때, $a + f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

주어진 식에 있는 적분을 해결하는 방법은 두 가지이다.

1. x=1을 대입한다.
2.주어진 식을 x에 대해 미분한다.

둘 다 해보자.

1. x=1 대입

$f(1) = 2 + a + 3a + \underbrace{\int_1^1 f(x)dx}_{=0}$

$f(1) = 2 + 4a$

→ 다른 방식으로 $f(1)$을 표현할 수 있을까? → 주어진 식에 0을 대입해보자.

$= \int_0^1 f(x)dx$라도

$0 \times f(0) = 0 + 0 + 3a + \int_1^0 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt = 3a$

$f(1) = \int_0^1 f(t)dt$이므로 $2 + 4a = 3a$

$\underline{a = -2}$ $f(1) = \int_0^1 f(t)dt = -6$

2. 식을 x에 대하여 미분

$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)dt$

$\cancel{f(x)} + xf'(x) = 6x^2 + 2ax + \cancel{f(x)}$

$f'(x) = 6x - 4$

$f(x) = 3x^2 - 4x + C$

$f(1) = -6$이므로 $C = -5$

$f(x) = 3x^2 - 4x - 5$

$\underline{f(3) = 27 - 12 - 5 = 10}$

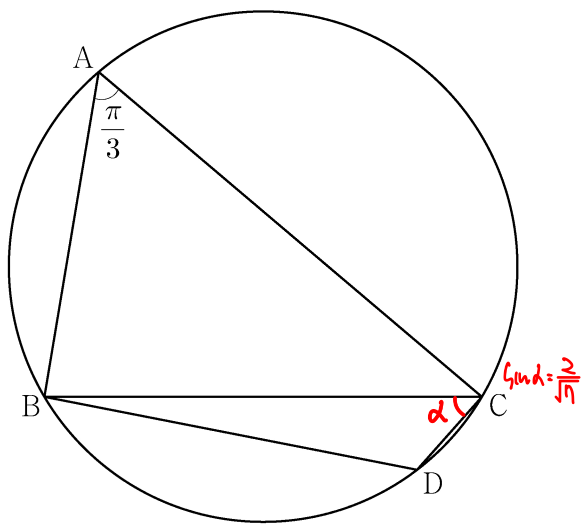
$\boxed{a + f(3) = -2 + 10 = 8}$

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$의 값은? [4점]

혹시 sin법칙?

유일하게 정보를 준 각이므로
쓰기 쉽게 $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$이라고 하자.

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



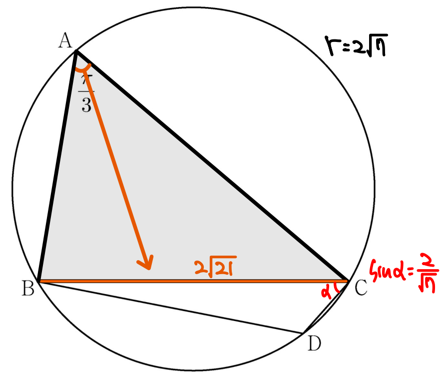
문제 첫 줄에서 원의 반지름을 주었고 그 원이 모든 삼각형을 외접하므로

sin 법칙을 쓸 것이라는 의심을 하고 시작하자.

우리가 구해야하는 것은 선분 BD와 선분 CD이다.

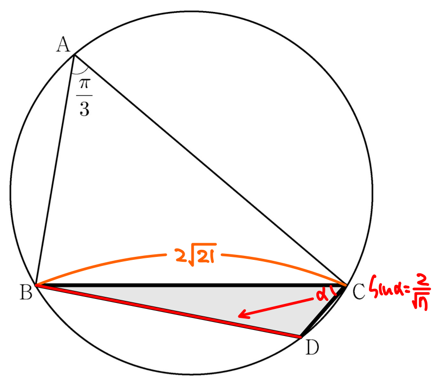
△ABC에서 sin법칙을 써서 $\overline{BC}$를 구해보자. 아직 자세하게는 모르겠지만 △BCD에서 처리되지 않을까?

우선 먼저 구할 수 있는 선분 BD부터 구해보자.



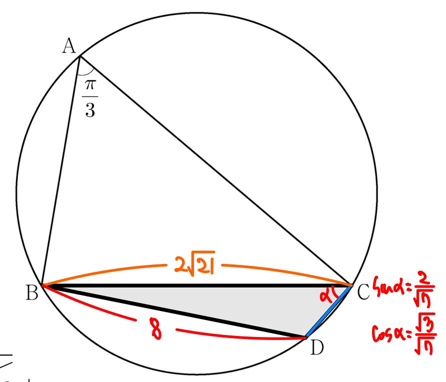
△ABC에서 $\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times 2\sqrt{7}$

$\overline{BC} = 4\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{21}$



△BCD에서 $\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{BD}}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = 2 \times 2\sqrt{7}$

$\overline{BD} = 4\sqrt{7} \times \frac{2}{\sqrt{7}} = 8$



△BCD에서 $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \cos\alpha = \overline{BD}^2$

$4 \cdot 21 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot 2\sqrt{21} \cdot \overline{CD} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \overline{BD}^2$

$84 + \overline{CD}^2 - 12 \cdot \overline{CD} = 64$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$x = \overline{CD} = 2$

$\boxed{\overline{BD} + \overline{CD} = 10}$

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

많은 정보를 줌

왜 굳이 자연수라고 줬을까?

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

등차수열이니까 a_m과 a_{m+3}은 부호가 달라야함

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

a_n이 양수로 바뀌기 전까지

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

문제에서의 수열이 등차수열이라는 것도 주었고 첫 항마저 주었다. $a_1 = -45$

그렇다면 문제는 공차에 있다는 것으로 보인다.(+공차는 자연수이므로 양수이다) $d > 0$

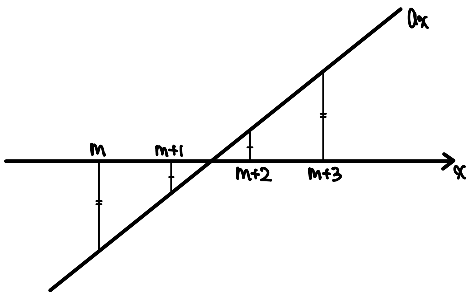
조건 (가)에서 m번째 항과 m+3번째 항의 절댓값이 같다는 내용을 주었다.

기본적으로 수열 a_n이 공차가 양수인 등차수열이므로 n이 커짐에 따라 수열은 커진다. $a_m < a_{m+3}$

그런데 m번째 항과 m+3번째 항의 절댓값이 같으려면

a_m이 음수이고 a_{m+3}이 양수가 되면서 절댓값이 같아야 한다. $a_m = -a_{m+3}$

등차수열은 일차함수로 나타낼 수 있으므로 이를 그래프로 그려보면 아래와 같다.



$$a_m + a_{m+3} = \{-45 + (m-1)d\} + \{-45 + (m+2)d\}$$
$$= -90 + (2m+1)d = 0$$

$a_m = -a_{m+3}$이므로

$$(2m+1)d = 90$$

m이 자연수이므로 짝수

그렇다면 90의 약수 중 짝수

d의 후보 = 2, 6, 10, 18, 30

조건 (나)를 해석해보자면 수열 a_n이 계속 증가하는 수열이고

그래프를 활용해보면 m+1번째 항까지 음수이므로 $\sum_{k=1}^{m+1} a_k > -100$이 성립되어야 한다.

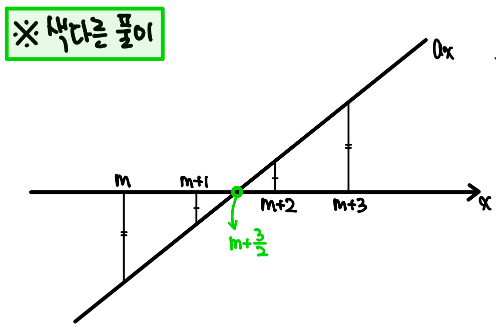
등차수열의 합이니 식으로 써볼 수 있다. (평균×항의 개수)

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{a_1 + a_{m+1}}{2} \times (m+1)$$
$$= \frac{-45 + \{-45 + m \cdot d\}}{2} \times (m+1) > -100$$
$$(-90 + m \cdot d) \times (m+1) > -200$$

이 식을 만족시키는 d는 18, 30이다.

$\boxed{18+30=48}$

※ 다른 풀이



위의 상황은 전 풀이와 같고 그래프에서부터 보면

$m+\frac{3}{2}$번째 항에서는 0이 되어야 한다. $a_{m+\frac{3}{2}} = 0$

그렇다면 m+1항과 m+2항을 아래와 같이 써보자.

$$a_{m+1} = -\frac{d}{2}, \quad a_{m+2} = \frac{d}{2}$$

그렇다면 이를 이용하여 수열의 합을 나타내보자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{a_1 + a_{m+1}}{2} \times (m+1) = \frac{-45 - \frac{d}{2}}{2} \times (m+1) > -100$$
$$\left(-45 - \frac{d}{2}\right) \times (m+1) > -200$$
$$\left(45 + \frac{d}{2}\right) \times (m+1) < 200$$

d는 짝수이어야함

m=4이면 d가 0이더라도 성립하지 않으므로 m=1, 2, 3

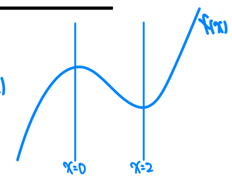
- m=1 → d=30
- m=2 → d=18
- ~~m=3 → d=$\frac{90}{7}$~~

$\boxed{18+30=48}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$f'(x) = 3x(x-2)$

신경쓰자.



$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1) = 0$이다. O

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다. O

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다. O

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

바로 전 6월 시험에서 14번의 난도가 높았기에 이 문제 역시도 보기를 보기 전에

조금의 사전정보를 얻고 가도록 하자.

함수 $f(x)$는 x축과의 위치만을 제외한 모든 것을 주었다.

상수항을 제외한 식, 그래프 개형

결국 $g(x)$가 문제이다. 최대한 해석해보자.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - \underline{f(0)}_{\text{적분상수 } C} & (x \le 0) \\ \underline{f(x+p)} - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

→ $f(x)$를 C만큼 내린다. = 상수항을 없앤다. → $x^3 - 3x^2$

$f(x)$를 x축 방향으로 $-p$만큼 평행이동

→ 적분상수끼리 처리가 된다. = 상수항을 없앤다. = 원점을 지난다.

→ $f(x)$에서 $x \ge p$의 부분을 떼어서 (0,0)에 붙인다.

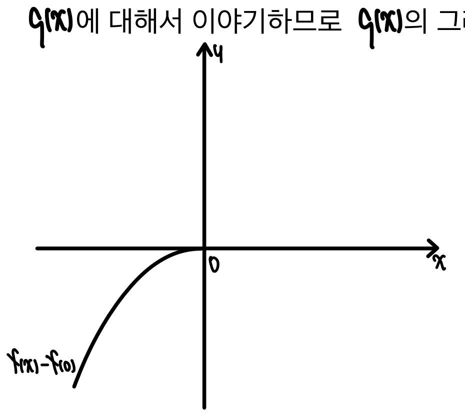
ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1) = 0$이다.

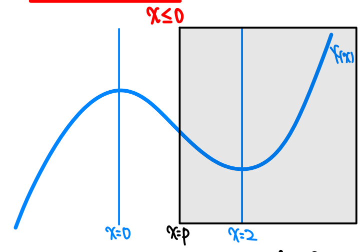
$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+1) - f(1) & (x > 0) \end{cases} \qquad g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (x \le 0) \\ f'(x+1) & (x > 0) \end{cases}$$

$g'(1) = f'(1+1) = f'(2) = 0$ (O)

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

$g(x)$에 대해서 이야기하므로 $g(x)$의 그래프를 정해진 부분만 그려보자.





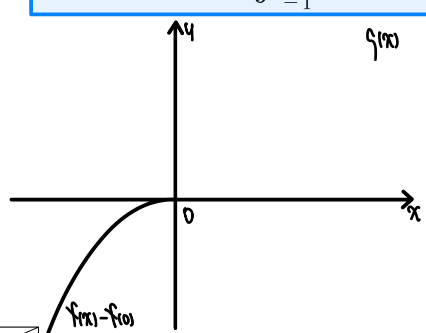
이렇게 분리해서 $g(x)$의 $x>0$ 부분에 넣는다.

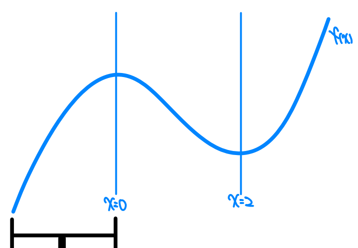
$g(x)$가 미분가능이기 위해서는 $\lim_{x \to p} f'(x) = 0$이어야 한다.

연속은 식에서 이미 전제되어 있으므로 미분계수만 맞추면 된다.

이를 만족시키는 양수 p는 2 뿐이다. (O)

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.





여기가 $g(x)$의 $x<0$ 부분과 동일한 모양이다.

$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이려면 '$g(x)(x>0)$의 증가율'이 '$g(x)(x<0)$의 증가율'보다 커야한다.

$p \ge 2$에서의 $f(p)$의 증가율은 $p<0$에서의 $f(p)$의 증가율보다 크므로 맞는 선지이다. (O)

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\underbrace{a_5 + a_6 = 0}_{a_5=-a_6}$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

수열 문제가 킬러 위치에 존재한다는 것은 어느 정도는 직접 해봐야 한다는 이야기이다.

수열 또한 익숙한 친구는 아니므로 직접 해봐야하나 문제는 그 부분이 아니라

'어디부터 시작하는가' 로 보인다.

문제에서 유일하게 준 조건이 $a_5+a_6=0$이므로 6번째 항부터 역추적해보자.

$$a_6 = \begin{cases} -2a_5-2 \rightarrow \cancel{a_5=-2} \\ a_5 \rightarrow a_5 = 0 \\ -2a_5+2 \rightarrow \cancel{a_5=2} \end{cases}$$

$$a_5 = 0 = \begin{cases} -2a_4-2 \rightarrow \boxed{a_4=-1} = \begin{cases} -2a_3-2 \rightarrow a_3=-\frac{1}{2} \\ a_3 \rightarrow a_3=-1 \\ -2a_3+2 \rightarrow a_3=\frac{3}{2} \end{cases} \\ a_4 \rightarrow \boxed{a_4=0} = \begin{cases} -2a_3-2 \rightarrow \boxed{a_3=-1} \\ a_3 \rightarrow \boxed{a_3=0} \\ -2a_3+2 \rightarrow \boxed{a_3=1} \end{cases} \\ -2a_4+2 \rightarrow \boxed{a_4=1} = \begin{cases} -2a_3-2 \rightarrow a_3=-\frac{3}{2} \\ a_3 \rightarrow a_3=1 \\ -2a_3+2 \rightarrow a_3=\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

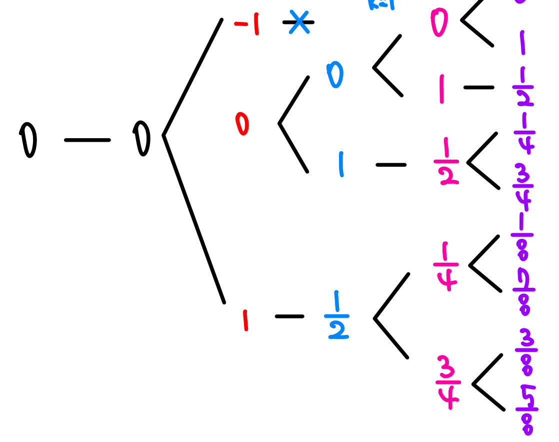
파란색 부분이 반복되는 것이 보이므로 이를 일반화해서 도식화해보자.

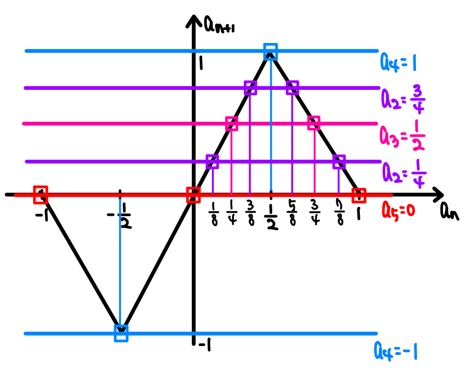
이를 하는데 있어서 수열을 일차식으로 볼 수 있으므로 그래프도 활용해보자.

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n-2 \\ 2a_n \\ -2a_n+2 \end{cases}$$

a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1

a_{n+1}이 -1이려면 a_n은 무조건 $-\frac{1}{2}$이어야 한다. $\rightarrow \sum_{k=1}^{5} a_k < 0$





직접 구한 첫째 항들이 모두 조건을 만족시키므로 더해서 답을 내자.

$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$

단답형

16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2 100 - \log_2 25 = \log_2 4 = \boxed{2}$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$이고 $\underbrace{f(0)=3}_{\text{적분상수?}}$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$\int f'(x)\,dx = 2x^4 - 4x^3 + 7x + C = f(x)$

$f(0)=3$이므로

$C = f(0) = 3$

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x + 3$

$\boxed{f(1) = 2-4+7+3 = 5}$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45}_{\sum_{k=1}^{10}a_k+2\cdot\sum_{k=1}^{10}b_k=45},\quad \underbrace{\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3}_{\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=3}$$

일 때, $\underbrace{\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)}_{=\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{10}b_k-\frac{1}{2}\times 10}$의 값을 구하시오. [3점]

구해야하는 값의 식을 보기 쉽게 처리해보자.

$$\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{10}b_k-\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{10}^{5}=\sum_{k=1}^{10}b_k-5$$

그렇다면 $\sum_{k=1}^{10}b_k$를 구하면 되겠다! -> 위에서 준 두 식을 연립하자.

$$\sum_{k=1}^{10}a_k+2\cdot\sum_{k=1}^{10}b_k=45$$
$$-\quad \sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=3$$
$$3\cdot\sum_{k=1}^{10}b_k=42$$
$$\sum_{k=1}^{10}b_k=14 \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{10}b_k-5=9}$$

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 $\underline{x\text{의 값이 0에서 4까지}}$ $\underbrace{\text{변할 때의 평균변화율}}_{\frac{f(4)-f(0)}{4-0}}$과 $\underbrace{f'(a)}_{f'(a)=3a^2-12a+5}$의 값이 같게 되도록 하는 $\underbrace{0<a<4}_{\text{세세한 조건}}$인 $\underbrace{\text{모든 실수 } a\text{의 값의 곱}}_{\text{다 구하기 or 근과 계수}}$은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

문제에서 주어진 것과 같이

함수 $f(x)$에서 0~4에서의 평균변화율과 $f'(a)$를 계산하자.

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{-12}{4}=-3 \qquad f'(a)=3a^2-12a+5$$

$$-3=3a^2-12a+5$$
$$0=3a^2-12a+8 \rightarrow \text{이걸 만족시키려면 } 0<a<4\text{도 만족}$$

이 식의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의해 $\boxed{\frac{8}{3}}$이다. $\boxed{p+q=11}$

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+\underbrace{|f(x)+x|}_{\text{구간을 나눠야할듯}}=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

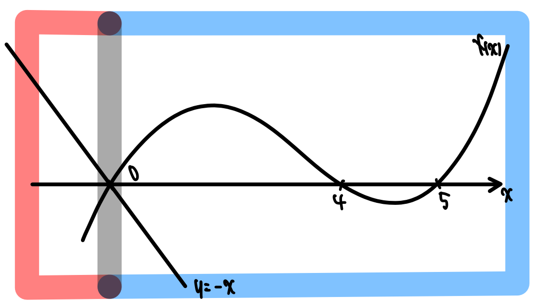
함수의 식은 줬지만 문제에서 가장 중요한 식이 절댓값에 엮여있다. 구간 나누기 or 제곱

절댓값을 처리하기 위해 안에 들어있는 것의 부호를 경우의 수로 나눠보자. $f(x)+x$

$$\begin{cases} -x=6x+k & (f(x)<-x) \\ 2f(x)+x=6x+k & (f(x)>-x) \end{cases}$$

f(x)와 -x의 대소관계에 의해 식이 결정되므로 두 그래프를 그려서 비교해보자.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=\frac{1}{2}x(x^2-9x+20)$$
$$=\frac{1}{2}x(x-4)(x-5)$$



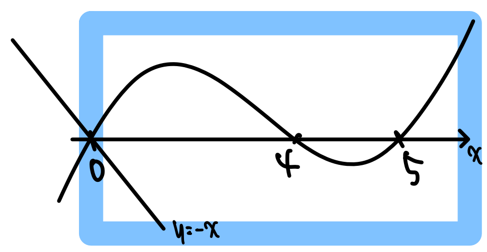
① $f(x)<-x$

$$7x=-k$$
$$x=-\frac{k}{7} \rightarrow k\text{가 자연수가 되어야 } x<0$$

여기서 실근 하나가 무조건 생기네!

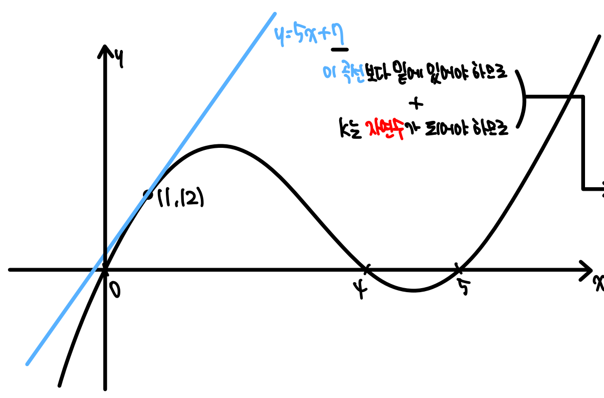
② $f(x)>-x$

$$2f(x)=5x+k$$
$$x^3-9x^2+20x=5x+k$$
$$x(x^2-9x+20)=5x+k$$
$$x(x-4)(x-5)=5x+k$$



여기서 나머지 3개의 근이 생겨야함

5x+k가 접하는 것들을 경계로 보자.



이 곡선보다 밑에 있어야 하므로
+
k는 자연수가 되어야 하므로

→ $k=1,2,3,4,5,6$

$\boxed{1+2+3+4+5+6=21}$

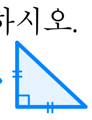
21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

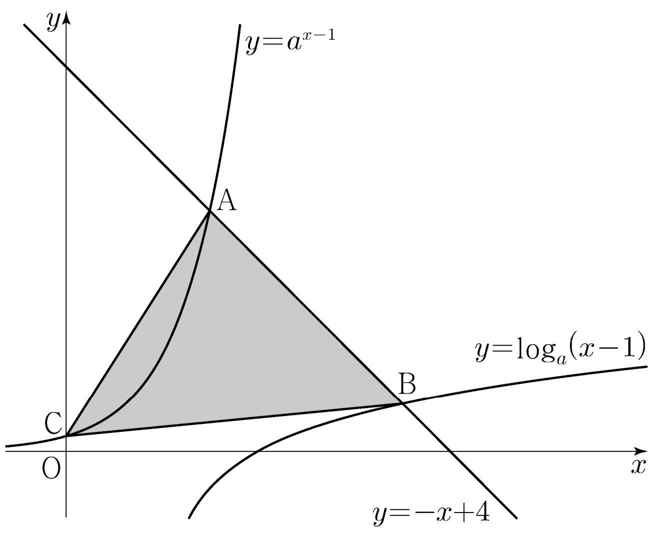
$$y=a^{x-1}, \quad y=\log_a(x-1)$$

익숙함 속의 낯설음

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]

이런 형태일 듯?





개념 공부를 조금이라도 한 학생이라면 문제의 두 식을 보고 이 생각을 할 것 같다.

'역함수'-> 역시 ㅋㅋ 내가 아는 한도 내에서만 나오지->근데 왜 쉽게 안되냐..?

문제에서의 두 식은 서로 역함수가 아니니까.

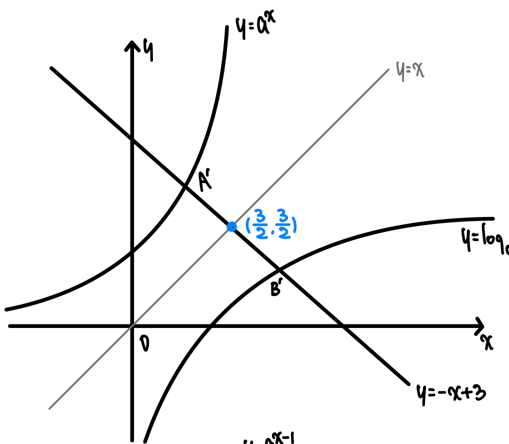
이 문제가 단순한 한 번의 계산으로만 처리되지 않는 이유는

그래프의 평행이동이 있기 때문이다.

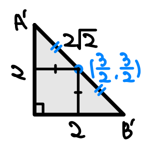
역함수인 상황이 우리에게 익숙한 이유는 사용하기 쉬운 식인 y=x 대칭이기 때문이다.

그렇다면 좌표평면의 모든 그래프를 x축 방향으로 -1만큼 평행이동 시켜서 보자.

$a^{x-1}\rightarrow a^x$ $\log_a(x-1)\rightarrow\log_a x$ $-x+4\rightarrow -x+3$

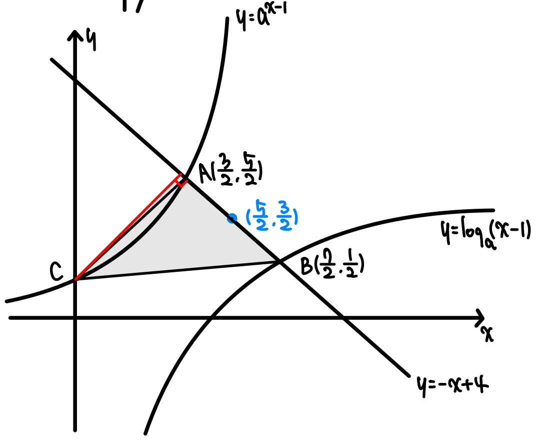


$\overline{A'B'}=2\sqrt{2}$이고 직선 A'B'의 기울기가 -1이므로



그렇다면 A'와 B'의 좌표는 $A'(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$, $B'(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$이다.

문제를 풀기 위해 다시 모든 그래프를 x축 방향으로 1만큼 이동시키자.



△ABC의 넓이를 위해서는

점 C와 직선 AB 사이의 거리가 필요하다.

선분 AB의 길이를 주었으니 이를 밑변으로 사용하자.

점 C의 좌표를 구하기 위해 $y=a^x$의 a를 구해보자.

→ 점 A를 지나므로 대입

$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$

$a=\frac{25}{4}\rightarrow y=(\frac{25}{4})^{x-1}\rightarrow C(0,\frac{4}{25})$

직선 AB와 점 C 사이의 거리 $=\frac{|-\frac{4}{25}+4|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{96}{25}}{\sqrt{2}}=\frac{96}{25\sqrt{2}}$

$\triangle ABC=\cancel{2}\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{96}{25\cancel{\sqrt{2}}}\times\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{96}{25}=S$

$\boxed{50S=192}$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

차수에 계수까지 줬다면 많이 줬다.

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

미분계수인가?

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

불연속이 가능한 점을 체크하자.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

대략적인 형태가 나오면 계산?

문제 발문 초반에 함수 $f(x)$의 최고차항과 최고차항의 계수가 1이라는 것을 준 것은 큰 힌트다.

대부분의 킬러 문제들이 인수를 중요하게 여기는데

함수를 추적하는데 있어서 중요한 최고차항과 항의 개수를 준 것이다.

조건 (가)부터 살펴보자.

함수 g(x)가 연속이라는 조건이 있으므로 불연속 후보를 찾아보자.

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

이미 실수 전체에서 연속이다.

$2\times|f(x)|$의 미분계수라고 생각할 수 있다. $=2\times\lim_{h\to 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{2h}$

그렇다면 $|f(x)|$의 미분계수가 불연속이기 위해서는

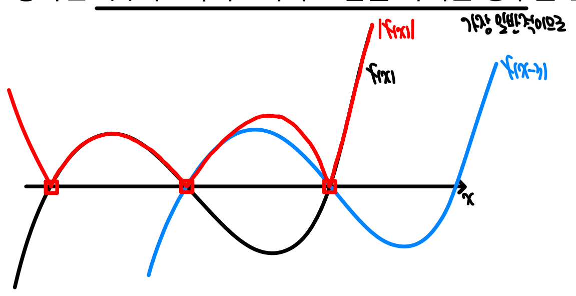
그래프를 그렸을 때 첨점이 생겨야 한다.

→ 이 점을 연속으로 만들어야 한다.

이 점에서 $f(x-3)=0$이라면? → $g(x)$에서 이 점은 연속이다.

그렇다면 f(x)와 x축이 3개의 교점을 가지는 경우를 먼저 살펴보자.

가장 일반적이므로



$|f(x)|$는 3개의 □ 부분에서 첨점을 가진다.

$g(x)$의 입장에서 불연속점

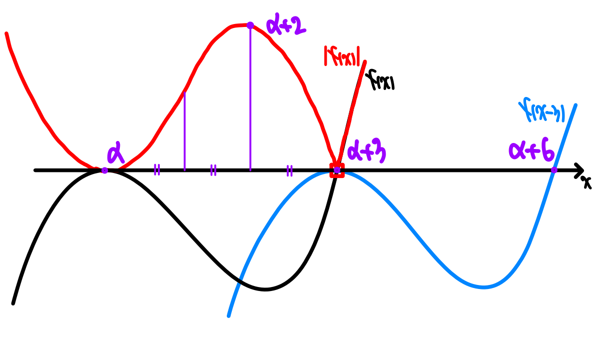
이 점들을 $g(x)$에서 연속이 되게 하기 위해서는

$f(x-3)$이 □ 부분을 모두 지나야한다.

→ $f(x)$를 x축 방향으로 3만큼 이동시킨

$f(x-3)$은 □ 부분을 모두 지날 수 없다.

그렇다면 f(x)가 x축과 한 점에서 접하고 다른 한 점에서는 교점을 가지는 경우를 보자.



$|f(x)|$는 1개의 □ 부분에서 첨점을 가진다.

$g(x)$의 입장에서 불연속점

이 점들을 $g(x)$에서 연속이 되게 하기 위해서는

$f(x-3)$이 □ 부분을 지나야한다.

→ $f(x)$를 x축 방향으로 3만큼 이동시킨 $f(x-3)$이므로

$|f(x)|$의 □ 부분에 $f(x-3)$의 접하는 부분이 있어야 한다.

그렇다면 $f(x)$에서 접점과 교점의 x좌표 차이가 3이다.

이를 기반으로 교점들을 정리해보자.

조건 (나)에서 $g(x)=0$이 되려면 $f(x-3)=0$ 또는 $\lim_{h\to 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}=0$이어야 한다. → α, $\alpha+2$, $\alpha+3$, $\alpha+6$

$\alpha+(\alpha+2)+(\alpha+3)+(\alpha+6)=4\alpha+11=7$

$\alpha=-1$

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

$\boxed{f(5)=36\cdot 3=108}$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

확률변수가 이항분포 B(n,p)을 따르면 평균이 np이므로 $\boxed{\mathrm{E}(X)=60\cdot\frac{1}{4}=15}$

24. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 2, 4, 6, 8 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $a\times b>31$일 확률은? [3점]

여사건인가?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

우선 전체 경우의 수는 4 x 4=16개이다.

부등호를 볼 때 기준은 등호가 되는 지점이므로

문제 조건에서 a와 b의 곱이 31일때를 기준으로 그대로 구할지, 여사건으로 볼지 정해보자.

$a=1, 3, 5, 7$
$b=2, 4, 6, 8$
→ a와 b에 서로 있는 수의 차이가 일정하므로 31에 제일 가까운 조합을 보자.

$5\times6=30$

5와 6은 각각 a와 b에서 3번째이므로 $a\times b$가 31보다 큰 경우는 전체 경우의 수의 반보다 적다.

→ 그렇다면 그냥 구해보자.

i) $a=5$일때 $b=8$
ii) $a=7$일때 $b=6, 8$
→ 총 경우의 수가 3개 $\boxed{\frac{3}{16}}$

25. $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$ 의 계수와 x 의 계수가 같을 때, 양수 a 의 값은? [3점]

x^2을 1번, $\frac{a}{x}$를 4번

x^2을 2번, $\frac{a}{x}$를 3번

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{1}{x^2}$의 계수: $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5 \rightarrow {}_5C_1 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^4 = \underline{5a^4}x$

1번 4번

$5a^4 = 10a^3$

x의 계수: $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5 \rightarrow {}_5C_2 \cdot (x^2)^2 \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \underline{10a^3}x$

2번 3번

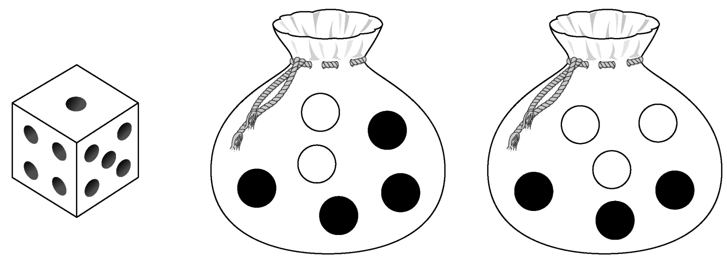
$\boxed{a=2}$

26. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 5 or 6
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 1 or 2 or 3 or 4
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰색일 때, 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{3}{7}$



A B

이 문제의 시행을 정리하면 이와 같다.

주사위를 던진다 -> 눈의 수에 따라 주머니 A or B 결정 -> 여기서 2개 모두 흰색

주머니에서 뽑은 2개의 공이 모두 흰색인 경우는 2가지로 나눌 수 있다.
-> 주머니 A에서 나온 경우, 주머니 B에서 나온 경우.

문제를 해결하기 위해서는 각각의 확률이 따로 필요하므로 각각 구해보자.

주머니 A에서 흰색 공을 2개 뽑는 확률: $\frac{2}{6} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{45}$

주머니 B에서 흰색 공을 2개 뽑는 확률: $\frac{4}{6} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{6}{45}$

그렇다면 문제에서 물어보는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{45}+\frac{6}{45}} = \boxed{\frac{1}{7}}$

27. 지역 A에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 X, 지역 B에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 Y라 하자. 두 확률변수 X, Y는 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 확률변수 X, Y의 평균은 각각 220과 240이다.
> (나) 확률변수 Y의 표준편차는 확률변수 X의 표준편차의 1.5배이다. → $X(220, \sigma^2)$ $Y(240, (\frac{3}{2}\sigma)^2)$

지역 A에 살고 있는 성인 중 임의추출한 n명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{X}$, 지역 B에 살고 있는 성인 중 임의추출한 $9n$명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le 215) = 0.1587$일 때, $\mathrm{P}(\overline{Y} \ge 235)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 물 사용량의 단위는 L이다.) [3점]

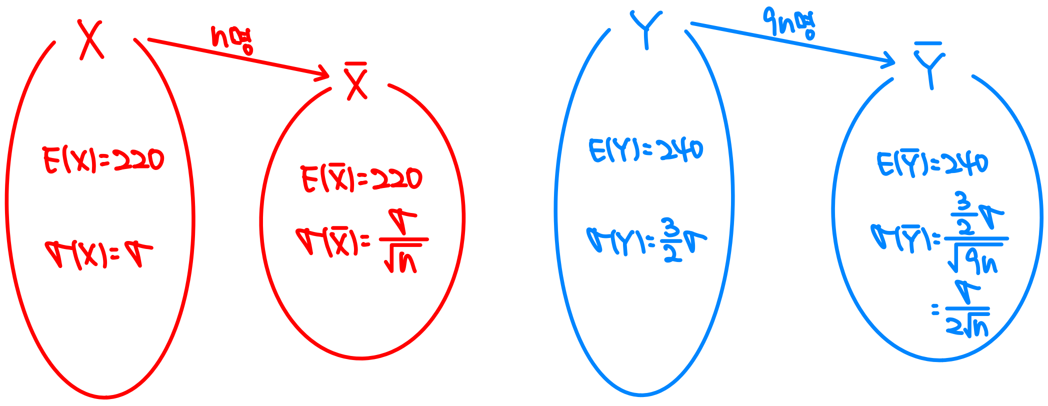
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8413 ⑤ 0.9772

X와 Y의 평균은 수로 주었기에 문제가 없으나

통계에서 중요한 표준편차가 숫자로 주어져있지 않으므로 X의 표준편차를 기준으로 하자.

그리고 길이가 긴 통계의 추정 문제로 보이므로 그림으로 정리해서 쉽게 보도록 하자.



이렇게 정리를 마치고 $\mathrm{P}(\overline{X} \le 215) = 0.1587$ 이라는 사실을 체크해보자.

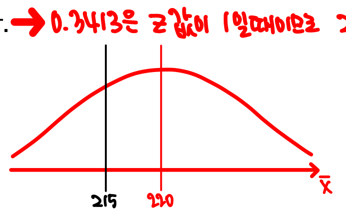
0.1587이라는 숫자를 주었다는 것은 옆의 표를 이용하라는 의미로 보이는데

표에 대놓고 0.1587을 주진 않았다.

그렇다면 $\overline{X}$ 가 어느 정도(215)보다는 작다는 확률이므로

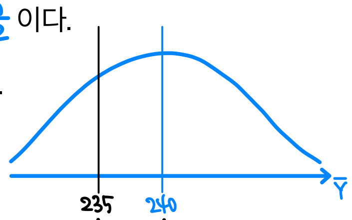
0.5에서 어떤 수(0.3413)를 뺀 것이 0.1587일수도 있다. → 0.3413은 z값이 1일때이므로 $220-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=215$

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5$



그렇다면 $\overline{Y}$의 표준편차는 $\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{5}{2}$ 이다.

이를 정규분포에서 표현해보면 오른쪽과 같다.



240−235=5 → 표준편차의 2배=0.4772

$\boxed{0.5+0.4772=0.9772}$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

> (가) $f(3)+f(4)$는 5의 배수이다. $f(3)+f(4)=5$ or 10
> (나) $f(1)<f(3)$이고 $f(2)<f(3)$이다. 기준은 $f(3)$?
> (다) $f(4)<f(5)$이고 $f(4)<f(6)$이다. 기준은 $f(4)$?

① 384 ② 394 ③ 404 ④ 414 ⑤ 424

함수의 개수 문제이므로 기준으로 잡을 정의역을 선택하는 것이 우선으로 보인다.

기준이 될 정의역은 문제에서 가장 조건이 많은 것으로 고르는 것이 좋으므로

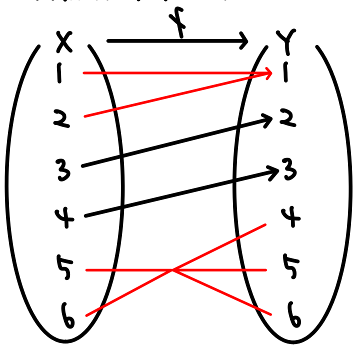
$f(3)$과 $f(4)$의 값을 기준으로 경우의 수를 나눠보자.

- $f(3)+f(4)=5$ or 10
- $f(3)$은 $f(1)$과 $f(2)$보다 크므로 $f(3)=2\sim6$ 중에서 선택
- $f(4)$는 $f(5)$과 $f(6)$보다 작으므로 $f(4)=1\sim5$ 중에서 선택

→ $(f(3), f(4))=(2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 5)$

4가지의 경우의 수를 모두 각각 구해보자.

i) $(f(3), f(4))=(2, 3)$



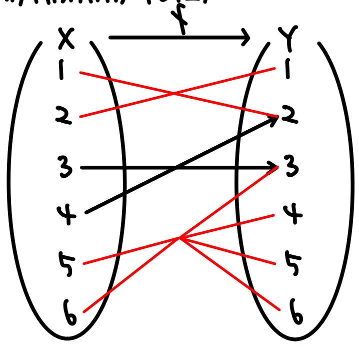
$f(1)$과 $f(2)$는 $f(3)$보다 작아야하므로 $f(1)=f(2)=1$이다.

$f(5)$와 $f(6)$은 $f(4)$보다 커야하므로

$f(5), f(6)$은 4, 5, 6에서 고르면 된다.

$\underbrace{1}_{f(1)=f(2)=1}\times\underbrace{3}_{f(5)=4,5,6}\times\underbrace{3}_{f(6)=4,5,6}=9$가지

ii) $(f(3), f(4))=(3, 2)$



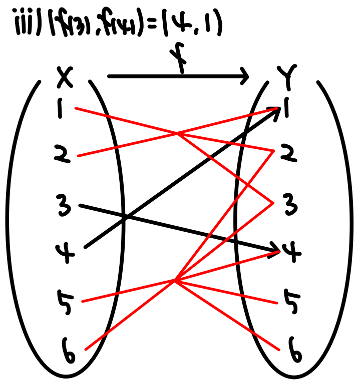
$f(1)$과 $f(2)$는 $f(3)$보다 작아야하므로 $f(1)=f(2)=2$ or 3이다.

$f(5)$와 $f(6)$은 $f(4)$보다 커야하므로

$f(5), f(6)$은 3, 4, 5, 6에서 고르면 된다.

$\underbrace{2\times2}_{f(1), f(2)=1\text{ or }2}\times\underbrace{4\times4}_{f(5), f(6)=3\text{ or }4\text{ or }5\text{ or }6}=64$가지

iii) $(f(3), f(4))=(4, 1)$



$f(1)$과 $f(2)$는 $f(3)$보다 작아야하므로

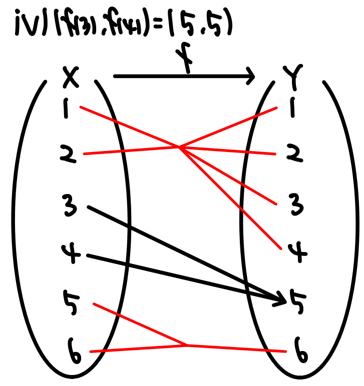
$f(1)=f(2)=1$ or 2 or 3이다.

$f(5)$와 $f(6)$은 $f(4)$보다 커야하므로

$f(5), f(6)$은 2, 3, 4, 5, 6에서 고르면 된다.

$\underbrace{3\times3}_{f(1), f(2)=1\text{ or }2\text{ or }3}\times\underbrace{5\times5}_{f(5), f(6)=2\text{ or }3\text{ or }4\text{ or }5\text{ or }6}=225$가지

iv) $(f(3), f(4))=(5, 5)$



$f(1)$과 $f(2)$는 $f(3)$보다 작아야하므로

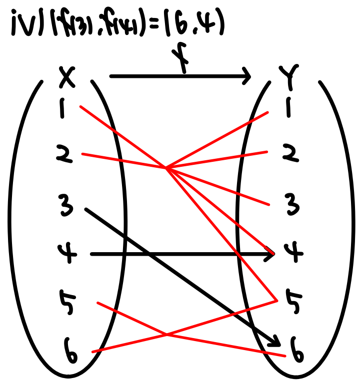
$f(1)=f(2)=1$ or 2 or 3 or 4이다.

$f(5)$와 $f(6)$은 $f(4)$보다 커야하므로

$f(5), f(6)$은 6이다.

$\underbrace{4\times4}_{f(1), f(2)=1\text{ or }2\text{ or }3\text{ or }4}\times\underbrace{1\times1}_{f(5), f(6)=6}=16$가지

iv) $(f(3), f(4))=(6, 4)$



$f(1)$과 $f(2)$는 $f(3)$보다 작아야하므로

$f(1)=f(2)=1\sim5$이다.

$f(5)$와 $f(6)$은 $f(4)$보다 커야하므로

$f(5), f(6)$은 5 or 6이다.

$\underbrace{5\times5}_{f(1), f(2)=1\text{ or }2\text{ or }3\text{ or }4\text{ or }5}\times\underbrace{2\times2}_{f(5), f(6)=5\text{ or }6}=100$가지

$\boxed{9+16+64+225+100=414}$

단답형

29. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$P(X=x)$	a	b	c	b	a	1

간격이 동일하다.
확률은 대칭적이다.

Y	1	3	5	7	9	합계
$P(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

간격이 동일하다.
X보다 더 퍼져있다.

$V(X)=\frac{31}{5}$일 때, $10\times V(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

분산을 구하는 문제이다. -> 분산은 자료들의 흩어진 정도를 표현한 값

신나게 계산하기 전에 한 번만 생각해보자.

우리가 기출에서 분산을 직접 계산해서 구한 적이 있나? -> 아니요

우리는 지금껏 제곱의 평균($E(X^2)$)에서 평균의 제곱($E(X)^2$)을 빼서 분산을 구해왔다.

그렇다면 수능 기출에 한해서는 분산을 구하기 위해서는 평균이 필수적이다.

편차 제곱의 평균은 계산하기도...

주어진 이산확률분포에서 각각의 평균을 유추해보자.

X	1	3	5	7	9	합계
$P(X=x)$	a	b	c	b	a	1

간격이 동일하다.
확률은 대칭적이다.

계산을 하기에는 무리가 있다.

다른 관점으로 보면 X의 값들의 차가 일정하고 확률이 X=5를 중심으로 대칭이므로

E(X)=5라고 할 수 있다.

Y	1	3	5	7	9	합계
$P(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

간격이 동일하다.
X보다 더 퍼져있다.

Y 역시도 평균을 계산하기에는... 하지말자.

Y도 값들의 차가 일정하고 확률이 Y=5를 중심으로 대칭이므로

E(Y)=5이다.

문제에서 X의 분산은 숫자로 주었고 우리가 구해야하는 것은 Y의 분산이다.

분산은 앞에서 이야기했듯이 편차들의 제곱의 평균이다.

그렇다면 X와 Y의 값들은 동일하고 확률이 대칭적으로 차이나므로

차이나는 편차들을 제곱해서 더해주자.

$$V(Y)=V(X)+(1-5)^2\cdot\frac{1}{20}+(9-5)^2\cdot\frac{1}{20}-(5-5)^2\cdot\frac{1}{40}=\frac{31}{5}+\frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{20}_{5}}+\frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{20}_{5}}=\frac{39}{5}$$

$$\boxed{10V(Y)=\cancel{10}^{2}\times\frac{39}{\cancel{5}}=78}$$

30. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다. 한 개씩 주고 시작하자.
> (나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다. 제한 걸고 시작 or 나중에 제거
> (다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다. 전체-(모두 홀수개)

4명의 학생 A, B, C, D가 가지는 사인펜의 개수를 a, b, c, d라고 하자.

4명의 학생에게 같은 종류의 사인펜을 나눠주는 경우의 수이므로

흔히 설명하는 같은 것들을 다른 것들에게 나눠주는 형태이다. -> 혹시 중복조합?

그렇다면 모두 음이 아닌 정수 필요

이를 기반으로 하고 각각의 조건들을 살펴보자.

(가)를 보고 4명의 학생에게 분배를 하기 전 하나씩 주고 시작하자. 그렇다면 사인펜 10개를 4명에게 분배
->그래야 중복조합을 사용하기 위한 기반인 음이 아닌 정수를 만들 수 있다.

$a+b+c+d=10$

(나)를 보고 들었던 생각은

계산 전에 제한을 걸고 시작 OR 모든 경우의 수를 구해서 조건에 맞지 않는 것을 제거 이다.

계산 전에 제한을 걸기는 애매하다고 느낀 점이 A, B, C, D가 모두 같은 조건 하에 있어

계산하기 복잡하다는 것이다.

생각해보면 한 학생이 9개 초과로 받는 일은 흔치 않을 것으로 보이므로 다 구해서 빼주자.

한 명이 10개를 가지면 나머지 3명이 4개 분배...

(다)를 보고는 '적어도'라는 조건이 있고 여사건의 경우를 구하는 것이 훨씬 쉬워보이므로

(전체 경우의 수)-(모두 홀수 개를 받는 경우의 수)로 구하자.

모두 1개씩 주고 구한 전체 경우의 수 : $a+b+c+d=10$이므로 ${}_4H_{10}={}_{13}C_3=\frac{13\cdot\cancel{12}^{2}\cdot 11}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}=286$가지

이 중에서 모두 홀수로만 이루어진 경우의 수를 빼주자.
a, b, c, d를 $2a'+1$, $2b'+1$, $2c'+1$, $2d'+1$로 바꿔서 구하자.

$$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+1)=14$$

이 경우에서 a, b, c, d가 모두 1개가 보장되므로 14개로 계산

$$a'+b'+c'+d'=5$$

$${}_4H_5={}_8C_3=\frac{8\cdot 7\cdot\cancel{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}=56$$

남은 조합 중에 9보다 많은 개수를 가지는 조합은 (10, 2, 1, 1)뿐이다.
이를 배치하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이다.

$$\boxed{286-56-12=218\text{가지}}$$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.