제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

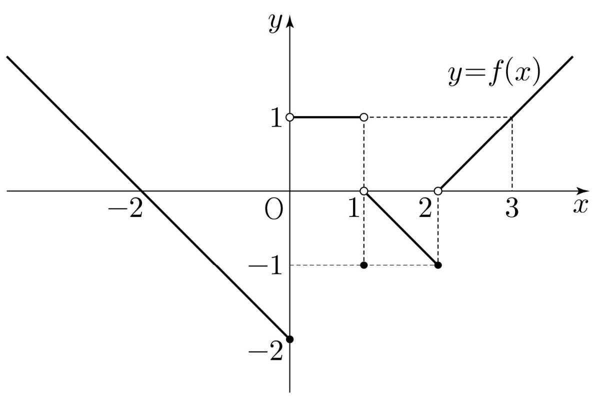
을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

10. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$

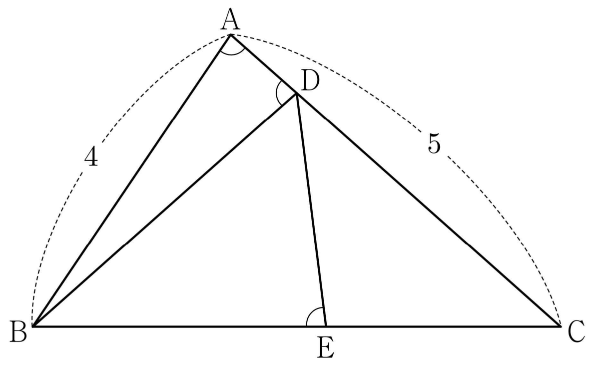
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\,1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f\left(\sqrt{k}\right)}{3}$의 값은? [4점]

① 150　② 160　③ 170　④ 180　⑤ 190

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x | 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

ㄴ. $\{t \,|\, \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
> 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

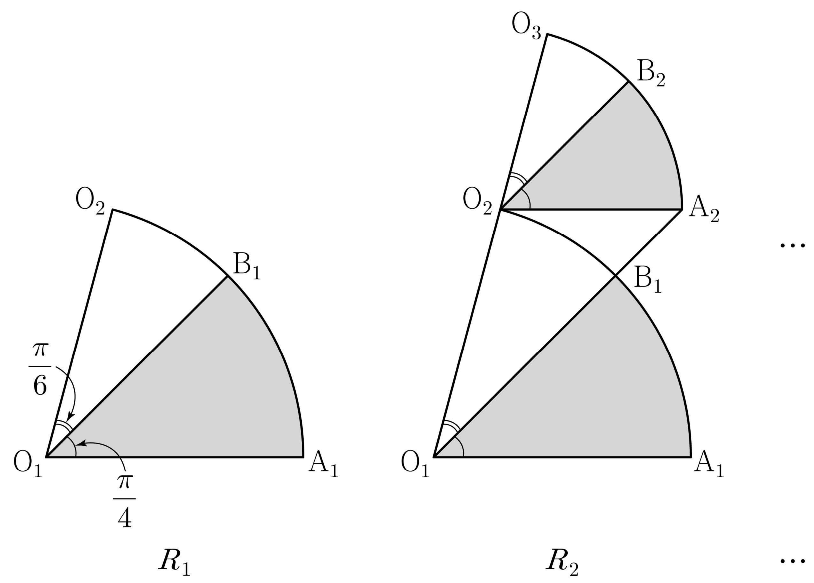
에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$ 에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$ ④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{O}_2$가 있다. 호 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}_2$ 위에 점 B_1을 $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1$과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_2\mathrm{O}_3$을 부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 $\mathrm{A}_2\mathrm{O}_3$ 위에 점 B_2를 $\angle \mathrm{A}_2\mathrm{O}_2\mathrm{B}_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

27. 두 함수

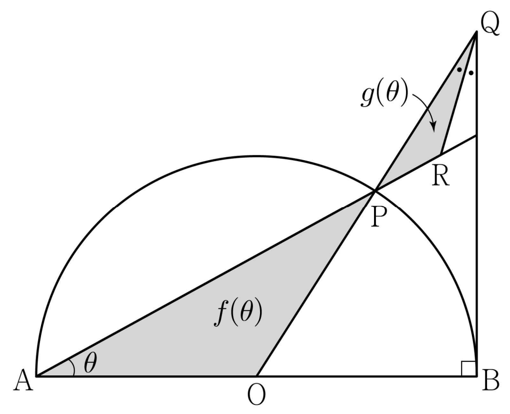
$$f(x)=e^{x}, \quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$　② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$　③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$　④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$　⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle$OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{OAP}=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^{4} \times f(\theta)}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

단답형

29. $t>2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$ 이 $x=k$ 에서 극대일 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$ 인 실수 α 에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$ 과 직선 $y=x+t$ 가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2. 함수 $f(x)=2x^3+4x+5$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1=2, \quad a_2a_4=36$$

일 때, $\dfrac{a_7}{a_3}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x \le -1) \\ x^2-5x-a & (x > -1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

8. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

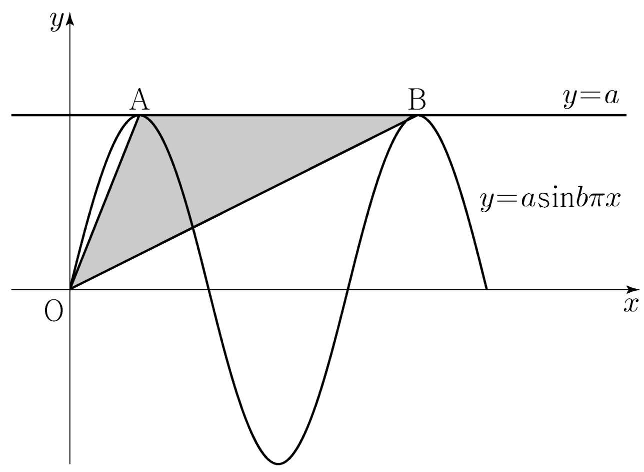
$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

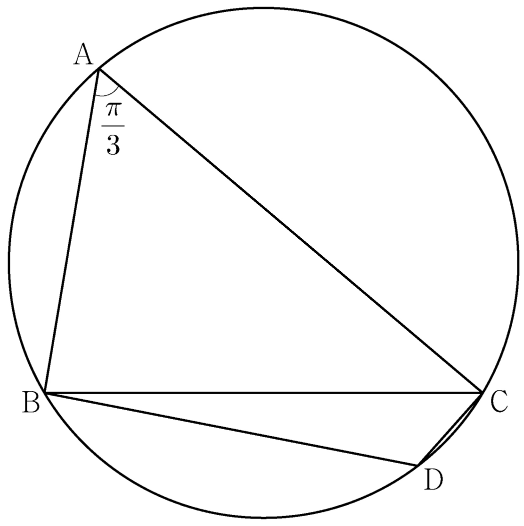
$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$ 일 때, $a+f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

> (가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p = 1$일 때, $g'(1) = 0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

단답형

16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45, \quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

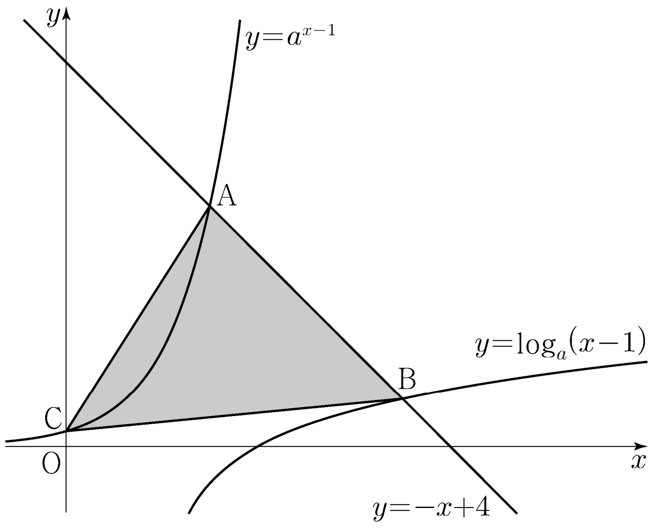
$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \to \infty} \frac{2 \times 3^{n+1} + 5}{3^n + 2^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

24. $2\cos\alpha = 3\sin\alpha$ 이고 $\tan(\alpha + \beta) = 1$ 일 때, $\tan\beta$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

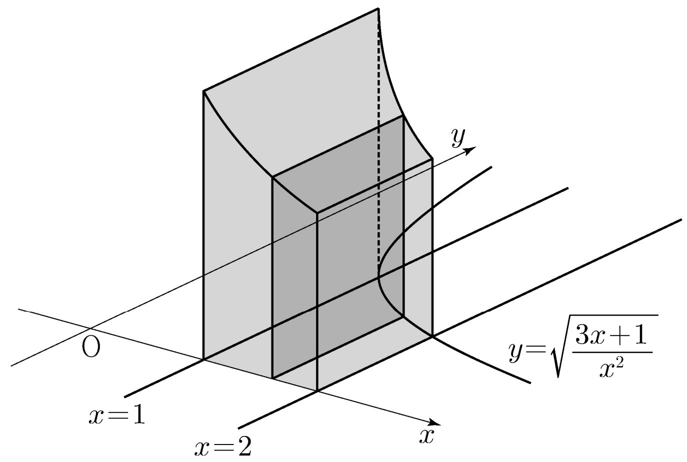
25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^{t}-4e^{-t},\quad y=t+1$$

에서 $t=\ln 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

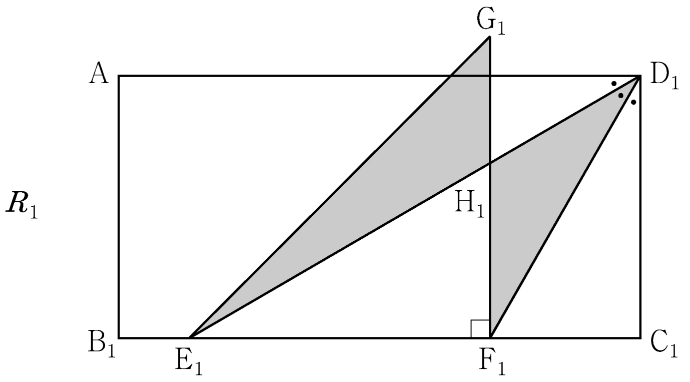
26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}$ $(x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]

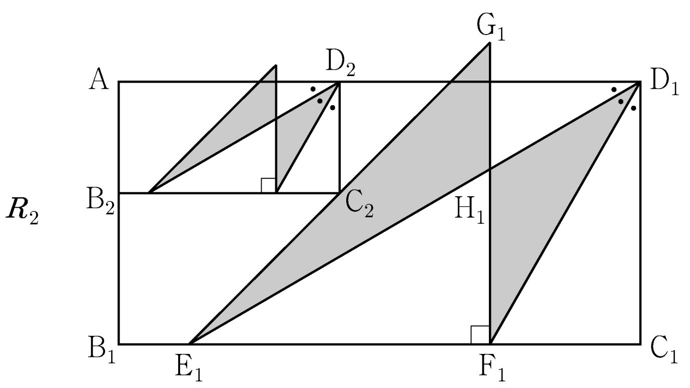


① $3\ln 2$ ② $\frac{1}{2}+3\ln 2$ ③ $1+3\ln 2$

④ $\frac{1}{2}+4\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

27. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}}=1$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2$인 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. $\angle\mathrm{AD_1C_1}$을 삼등분하는 두 직선이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점 중 점 $\mathrm{B_1}$에 가까운 점을 $\mathrm{E_1}$, 점 $\mathrm{C_1}$에 가까운 점을 $\mathrm{F_1}$이라 하자. $\overline{\mathrm{E_1F_1}}=\overline{\mathrm{F_1G_1}}$, $\angle\mathrm{E_1F_1G_1}=\dfrac{\pi}{2}$이고 선분 $\mathrm{AD_1}$과 선분 $\mathrm{F_1G_1}$이 만나도록 점 $\mathrm{G_1}$을 잡아 삼각형 $\mathrm{E_1F_1G_1}$을 그린다.
선분 $\mathrm{E_1D_1}$과 선분 $\mathrm{F_1G_1}$이 만나는 점을 $\mathrm{H_1}$이라 할 때, 두 삼각형 $\mathrm{G_1E_1H_1}$, $\mathrm{H_1F_1D_1}$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{E_1G_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AD_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB_2}}:\overline{\mathrm{B_2C_2}}=1:2$인 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



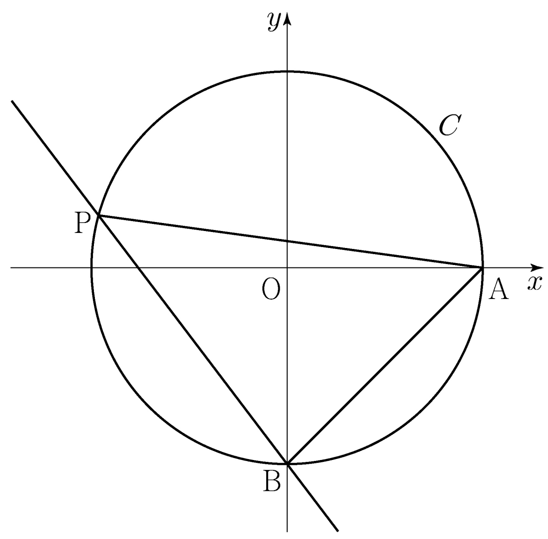


⋮　　　　⋮

① $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　② $\dfrac{5\sqrt{3}}{18}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\dfrac{7\sqrt{3}}{18}$　⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

28. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하자.
점 $\mathrm{Q}(0,\ 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta$의 값은? [4점]

① $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$　② $\sqrt{3}-1$　③ $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$　⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{2}$



단답형

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
>
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$
>
> (나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\displaystyle\int_0^5 xg(x)\,dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

by 심상범 in Orbi

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = \boxed{4}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int f'(x)dx = x^3 - x^2 + C = f(x)$

$f(1) = 1 - 1 + C = 1$

$C = 1$

그러므로

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$\boxed{f(2) = 8 - 4 + 1 = 5}$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

주어진 각은 제 3사분면에

$\cos\theta$와 $\sin\theta$의 비율이 5 : 12이다.

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

tan의 값을 준다는 것을 보고 주어진 각을 그려봐도 되고

다르게 보면 cos 과 sin 의 비율이 5 : 12 라는 것이다.

각이 같으므로 cos 과 sin 값을 제곱해서 더하면 1이 되어야 한다.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos\theta = 5k$

$\sin\theta = 12k$

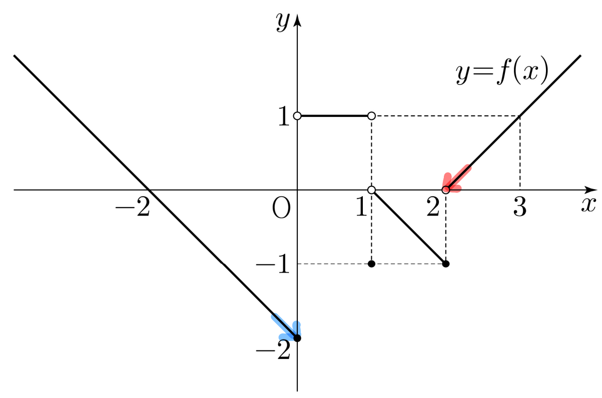
5 : 12이므로

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 25k^2 + 144k^2 = 1$ $k = \pm\frac{1}{13}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로 $k = -\frac{1}{13}$이다.

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ $\boxed{\sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\underbrace{\lim_{x \to 0-} f(x)}_{-2} + \underbrace{\lim_{x \to 2+} f(x)}_{0}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$

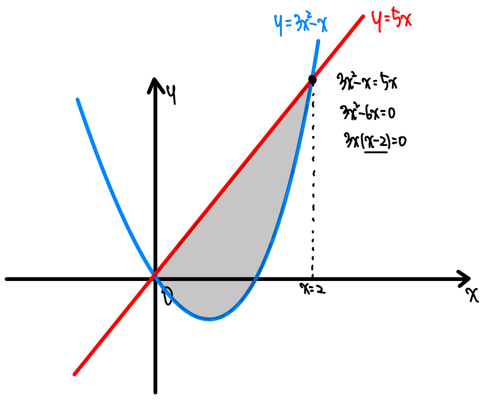
$=4+4=\boxed{8}$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

$y=x(3x-1)$

$x=0, \frac{1}{3}$에서 x축과 만남

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$\int_0^2 5x-(3x^2-x)\,dx=\int_0^2 -3x^2+6x\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2$

$=-8+12=\boxed{4}$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

공차만 알면 된다.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

$(a_1+a_2+a_3)-(a_1+a_2)=a_3$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_6=2a_3$

$(2+5d)=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$

$d=2$

수열 a_n은 공차가 2이고 첫항은 2이다.

$a_n=2n$

$S_{10}=\frac{2+20}{2}\cdot 10=11\cdot 10=\boxed{110}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

써보자.

좌극한=우극한=함숫값

① 2　② 4　③ 6　④ 8 ✓　⑤ 10

$$\{f(x)\}^2=\begin{cases} (-2x+6)^2=4x^2-24x+36 & (x<a) \\ (2x-a)^2=4x^2-4ax+a^2 & (x\ge a) \end{cases}$$

$\lim_{x\to a^-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a^-}4x^2-24x+36=4a^2-24a+36$

$\lim_{x\to a^+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a^+}4x^2-4ax+a^2=4a^2-4a^2+a^2$

=함숫값

$4a^2-24a+36=a^2$

$3a^2-24a+36=0$

$3(a^2-8a+12)=0$

$3(a-6)(a-2)=0$

$a=6$ or $a=2$

$\boxed{6+2=8}$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

홀수항 → 짝수항 : 역수

짝수항 → 홀수항 : 8배

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$　② $\frac{9}{4}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{17}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$ ✓

우리가 익히 아는 수열이 아니므로 천천히 '해보자'

$a_{12}=\frac{1}{2} \rightarrow a_{11}=2 \rightarrow a_{10}=\frac{1}{4} \rightarrow a_9=4 \rightarrow a_8=\frac{1}{2} \rightarrow a_7=2$

4단계마다 반복

$a_{12}=a_8=a_4=\frac{1}{2}$

$a_1=a_5=a_9=4$

$\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$

10. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30　② 35 ✓　③ 40　④ 45　⑤ 50

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$

$\log_n x+\log_n(x+3)=1$

$x(x+3)=n$

$1<x<2$이므로

$1\times4<n<2\times5$

$4<n<10$

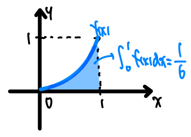
$n=5,6,7,8,9$

$\boxed{5+6+7+8+9=35}$

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

가정 →



을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$

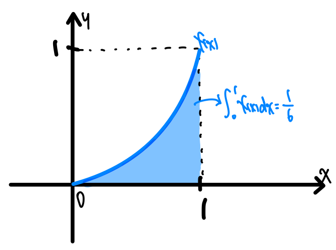
f(x)를 x축 대칭시키고 x축 방향으로 −1, y축 방향으로 1이동

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

g(x)의 주기가 2이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

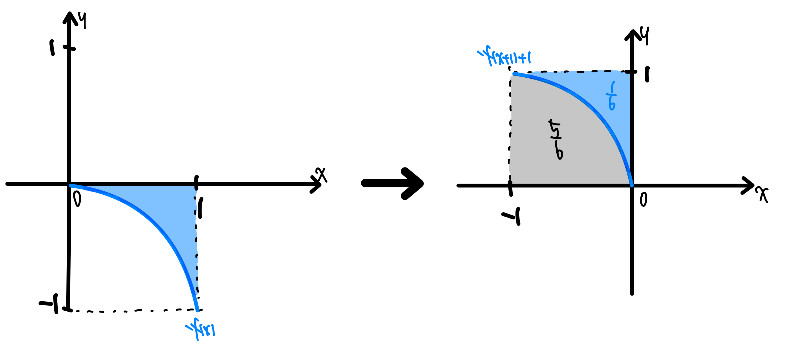
닫힌 구간 [0,1] 에서 연속인 함수 f(x) 에 대한 정보들을 종합하여 그래프를 가정해보자.



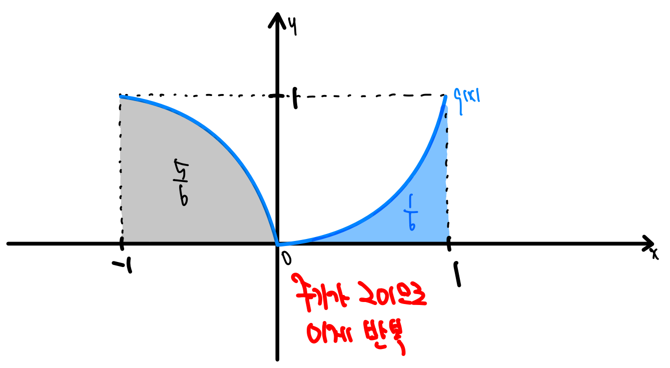
f(x) 로 이루어진 함수 g(x) 에서 -1< x <0 에서의 함수를 최대한 그래프에서 표현해보자.

g(x) = −f(x+1)+1

평행이동시키면 편리.



그렇다면 g(x) 의 그래프는 아래와 같다.



$$\int_{-3}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$$

$$=1+1+\frac{5}{6}=\boxed{\frac{17}{6}}$$

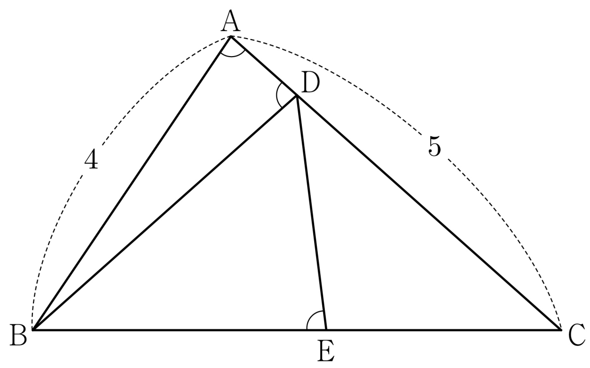
12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인

$\cos(\angle BDA)=\cos(\angle BED)=\frac{1}{8}$

삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

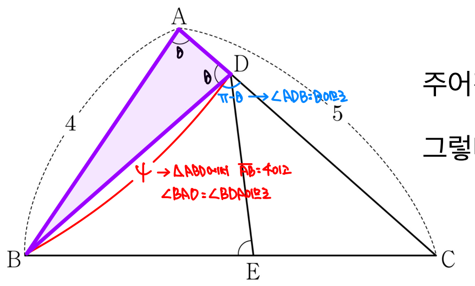
일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

주어진 도형 안에 있는 각 중 3개가 같고 이 각의 cos값을 주었으므로 이 각을 미지수로 잡고 문제를 시작해보자.

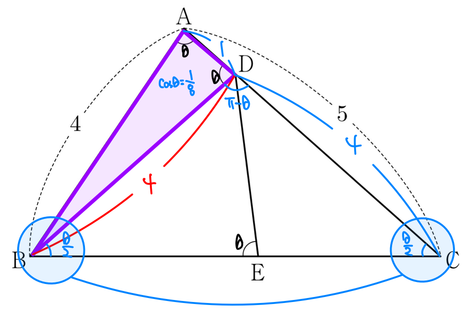
$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED=\theta$라고 하자. → $\cos\theta=\frac{1}{8}$



주어진 각을 미지수로 두면 변 BD가 4라는 것도 알 수 있다.

그렇다면 삼각형 ABD에서 cos법칙을 쓸 준비가 끝났다.

$\overline{AB}=\overline{BD}=4$이고 $\cos\theta=\frac{1}{8}$이므로 $\overline{AD}$를 구할 수 있다.



BD = DC 이고 ∠BDC = π−θ이므로

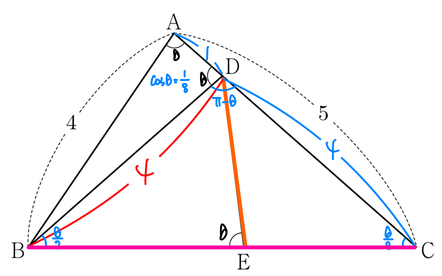
$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\theta=\overline{BD}^2$$

$$16+\overline{AD}^2-8\cdot\overline{AD}\cdot\frac{1}{8}=16$$

$$\overline{AD}^2-\overline{AD}=0$$

$\overline{AD}=1$

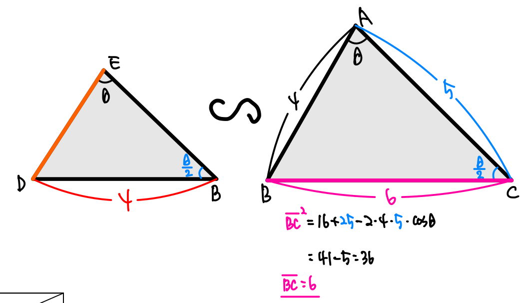
그렇다면 $\overline{DC}=5-1=4$이다.



주황색으로 표시한 변 DE의 길이를 알기 위해서는 그 변을 포함한 삼각형을 유심히 볼 필요가 있다.

우리가 구해놓은 것들을 모두 그려본 뒤 살펴보면 삼각형 ABC와 삼각형 EDB가 닮음이다.

AA 닮음 : ∠DEB = ∠BAC, ∠EBD = ∠ACB



$\overline{BC}^2=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\theta$

$=41-5=36$

$\overline{BC}=6$

닮음비가 4:6 = 2:3이므로

$$\boxed{\overline{DE}=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}}$$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

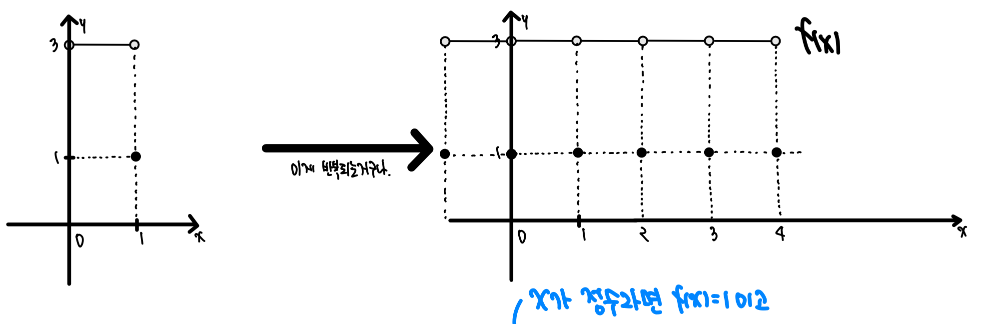
이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

주기가 1인 함수다.

$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

구해야하는 것이 함숫값을 기반으로 한 수이므로 주어진 함수를 한 번 그려보도록 하자.



x가 정수라면 f(x)=1 이고
x가 정수가 아니라면 f(x)=3이다.

함수의 그래프는 그렸고 이제는 수열에 대한 파악을 해야한다.

우리에게 익숙한 수열은 아니므로 천천히 해보자.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=\frac{1}{3}\{1\times f(1)+2\times f(\sqrt{2})+\cdots+20\times f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}\{f(1)+4f(\sqrt{4})+9f(\sqrt{9})+16f(\sqrt{16})\}+\frac{1}{3}\{2f(\sqrt{2})+3f(\sqrt{3})+\cdots+20f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}(1+4+9+16)+\frac{1}{3}(2\cdot3+3\cdot3+\cdots+20\cdot3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot30+(2+3+5+6+7+8+10+11+12+13+14+15+17+18+19+20)$$

$$=10+\left\{\frac{1+20}{2}\cdot20-(1+4+9+16)\right\}$$

$$=10+(210-30)=\boxed{190}$$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

$g(x)=\cdots$의 형태로 만들자.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

한 개만 나오도록

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제에서 중심으로 잡는 것이 $g(x)$이므로 정리해보면 아래와 같다,.

$$g(x)=\frac{|x|\cdot|f(x-p)+q|}{x}$$

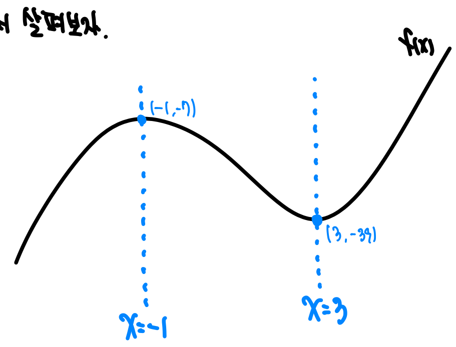
조건 (나)에 의하면 우리는 위의 식에서 미분가능하지 않은 점에 대해 생각해봐야한다.

식으로 보았을 때는 절댓값이 쳐져 있는 $f(x-p)+q$와 x가 0이 될 때를 눈여겨보자.

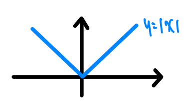
∘ $f(x-p)+q$

$f(x-p)+q$는 $f(x)$를 이동시킨 그래프이므로 $f(x)$를 먼저 살펴보자.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x+1)(x-3)$$



$g(x)$의 식에서 $|x|$은 x=0에서 미분불가능한 점을 하나 만들게 된다.



$f(x-p)+q$은 3차식이므로 실근을 1~3개를 가질 수 있다.

실근을 가지는 지점이 미분불가능한 점의 후보이므로 개수별로 경우의 수를 따져보자.

실근 1개: 실근이 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 2개라 X
x=0이 실근이라면 x=0에서 미분가능해지므로 미분불가능한 점이 0개->X

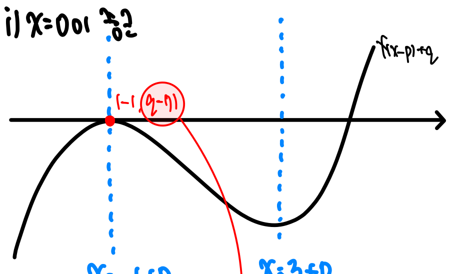
실근 2개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 2개라 X
하나의 중근을 가진다. 실근 중 하나는 x=0이고 나머지는 아니라면 x=0에서는 미분가능해지므로->O

실근 3개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 4개라 X
실근 중 x=0이 하나라면 x=0에서는 미분가능하고 미분불가능한 점이 3개->X

그렇다면 $f(x-p)+q=0$은 실근을 2개 가져야하고 x=0이 중근인지는 알 수 없다.

그래서 체크해보자.

i) x=0이 중근

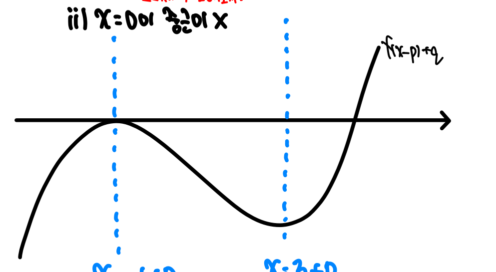


x=0이어야함

$p=1$ $q=7$

$\boxed{p+q=8}$

ii) x=0이 중근이 X



x=0이 되어야함

~~p=-3~~

p와 q는 양수이다.

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

$\sin\frac{\pi x}{2} = t$ or $\cos\frac{\pi x}{2} = t$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

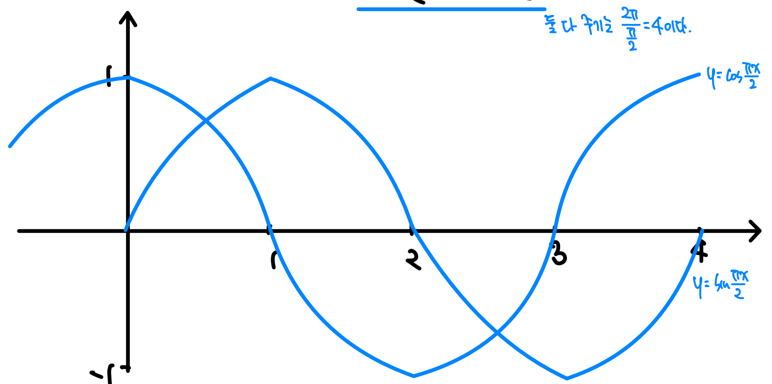
ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

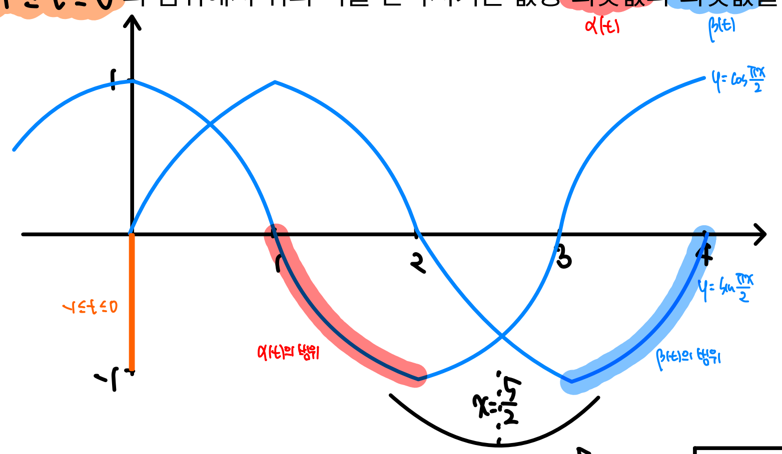
문제의 식에서 가장 중요한 것은 $\sin\frac{\pi x}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{2}$ 으로 보이므로 그래프를 그려보자.

둘 다 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$이다.



ㄱ. $-1 \le t \le 0$의 범위에서 위의 식을 만족시키는 값중 최솟값과 최댓값을 그래프에서 보자.

$\alpha(t)$ $\beta(t)$

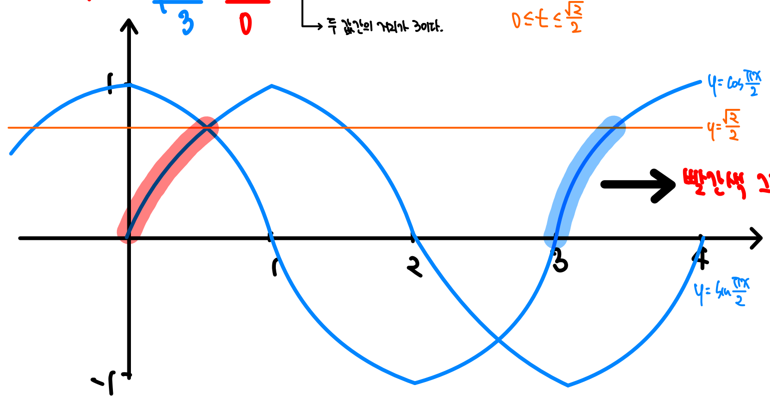


$\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 $x=\frac{5}{2}$ 대칭이므로 $\boxed{\alpha(t)+\beta(t)=5\ (0)}$

ㄴ. $\beta(t) - \alpha(t) = \underset{3}{\beta(0)} - \underset{0}{\alpha(0)} = 3$를 만족시키는 t 의 범위에 대한 질문이다.

→ 두 점간의 거리가 3이다.

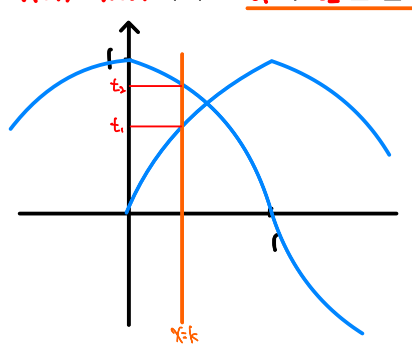
$0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$



빨간색 그래프와 파란색 그래프의 개형이 같고 $\boxed{\text{거리가 3이므로 맞다 (0)}}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ 이려면 t_1 과 t_2 는 같은 x좌표를 가져야 한다.

$x=k$라고 하자.



$t_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$ $t_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$

$t_2 - t_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right) = \frac{1}{2}$ 가정

$t_1 \cdot t_2 = \frac{t_1^2 + t_2^2 - (t_1 - t_2)^2}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \boxed{\frac{3}{8}\ (X)}$

단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

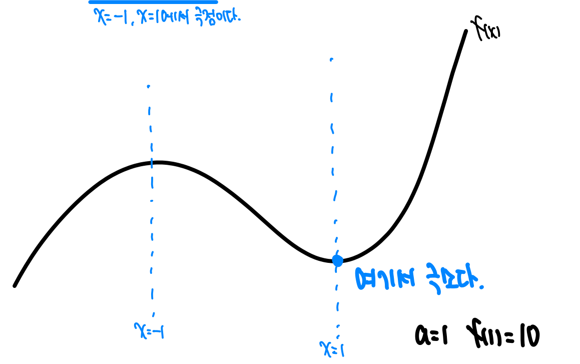
$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 = \log_4 16 = \boxed{2}$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(a)=0$이고 도함수가 음→양

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$x=-1$, $x=1$에서 극점이다.



$a=1$ $f(1)=10$

$\boxed{a+f(a)=1+10=11}$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

공비가 양수네

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

2단계를 거치면 $\frac{1}{3}$이 된다. → 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이네

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$a_6 = a_2 \cdot r^4 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 36 \times \frac{1}{9} = \boxed{4}$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

위치는 속도를 적분

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

위치는 속도를 적분하면 된다.

$\int v(t)dt = t^3 - 2t^2 + kt + C = x(t)$

$x(0) = C = 0$

$x(1) = 1 - 2 + k = -3$

$k = -2$

$x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$

$t=1 \sim t=3$에서는 운동 방향의 변화가 없으므로

$x(3) - x(1) = (27 - 18 - 6) - (1 - 2 - 2)$

$= 3 + 3 = \boxed{6}$

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

t에 대한 적분인데 x가 같이 있으니 분리해두자.

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

도함수를 구해서 보자.

$g(x) = \int_a^x f(x) \cdot \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x f(t)\{f(t)\}^4 dt$

$= f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$

$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \cancel{f(x) \cdot \{f(x)\}^4} - \cancel{\{f(x)\}^5}$

$= f'(x)\underbrace{\int_a^x \{f(t)\}^4 dt}$

$x=a$ 말고는 부호변화 X

$\{f(t)\}^4 \geq 0$이므로

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$

$= 3(x^2 - 8x + 15)$

$= 3(x-3)(x-5)$

$x=3,\ x=5$에서 부호변화 O

$a=3$ or $a=5$ 이어야 $g'(x)$의 부호변화가 1번

$\boxed{3+5=8}$

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$로 쓸 수 있다.

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
> 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> 근 4개 중에 2개씩 중복
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

조건 (가)에서 주어진 새로운 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면서 각각 중근이라면

실근이 2개씩 겹쳐야 하므로 모든 실근의 개수는 짝수여야 한다.

n 이 홀수라면 $x^n-64=0$ 에서 생기는 근의 개수가 1개이다.

그렇다면 $f(x)$이 이차식이므로 $(x^n-64)f(x)=0$ 의 모든 실근의 개수는 홀수가 된다.

실근이 최대 2개이다.

그렇다면 n 이 짝수가 될때도 체크해보자.

$\underbrace{(x^n-64)}_{\text{n이 짝수라면 여기서 근 2개}}\underbrace{f(x)}_{\text{이차식이므로 최대 2개}}=0 \longrightarrow$ 가능

위의 조건을 모두 만족시키기 위해서는 $f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$이 되어야 한다.

그렇다면 x=0일때 f(x)가 최소이고 $f(0)=-64^{\frac{2}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$이다.

그렇다면 n 은 12의 약수 중 짝수가 되어야 한다.

$n=\cancel{1},2,\cancel{3},4,6,12$

$\boxed{2+4+6+12=24}$

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

최고차항의 계수에 대한 언급 x

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> 실근 1개 + 중근 1개 (α, β로 두자)
> (나) 방정식 $f(\underbrace{x-f(x)}_{x-f(x)=\alpha \text{ or } \beta})=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

조건 (가)에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2개라는 것은

3차식인 $f(x)$ 와 x=0의 교점이 두 개라는 것이므로 하나의 교점과 하나의 접점을 가질 것이다.

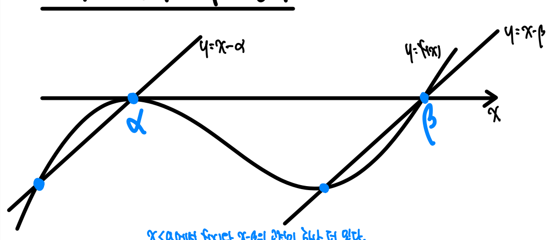
조건 (나)에서 $f(x-f(x))=0$ 을 만족시키려면 $x-f(x)=\alpha$ or β를 만족시켜야 한다. (α와 β라고 하자.)

식을 다시 정리하면 $f(x)=x-\alpha$ or $f(x)=x-\beta$ 을 만족시켜야 한다.

이를 확인하기 위해서는 그래프 간의 교점으로 체크해볼 필요가 있다.

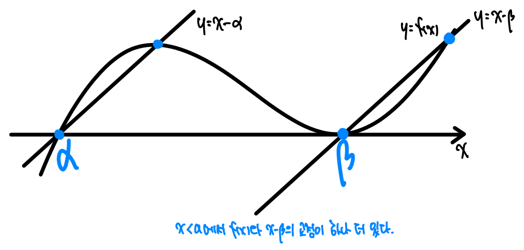
최고차항의 계수의 부호에 대한 언급이 없으므로 경우의 수를 모두 생각해보자.

i) 최고차항의 계수가 양수



$x<\alpha$에서 $f(x)$와 $x-\alpha$의 교점이 하나 더 있다.

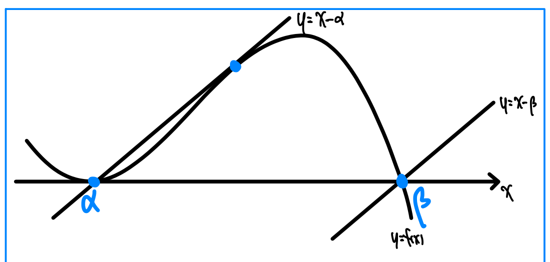
서로 다른 실근의 개수가 5개



$x<\alpha$에서 $f(x)$와 $x-\alpha$의 교점이 하나 더 있다.

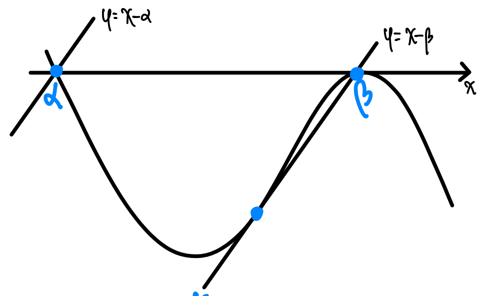
서로 다른 실근의 개수가 5개

ii) 최고차항의 계수가 음수



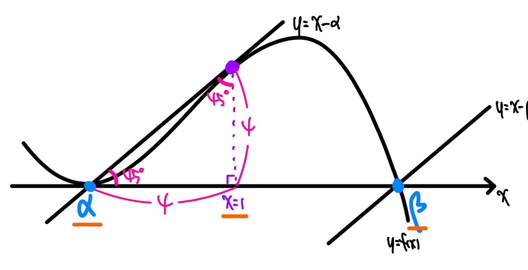
서로 다른 실근의 개수가 3개

이게 맞다.



서로 다른 실근의 개수가 3개

그러나 $f(1)=4$와 $f'(1)=1$을 동시에 만족시킬 수 없다.



① $f'(1)=1$이므로 $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 접점의 좌표가 $(1,4)$이다.

② $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 교점에서 $y=x-\alpha$와 x축이 이루는 각이 $45°$이므로 $\alpha=1-4=-3$이다.

③ 3차함수와 일차함수의 교점의 x좌표들의 합은 일정하므로 $-3+1+1=-3+(-3)+\beta$ $\quad\beta=5$

$f(x)=k(x+3)^2(x-5)$

$f(1)=k\cdot16\cdot-4=4$

$k=-\frac{1}{16}$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$f(0)=-\frac{1}{16}\cdot9^2\cdot-5=\frac{45}{16}$

$\boxed{p+q=61}$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}=\boxed{2}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\frac{dx}{dt}=e^t-\sin t$

$\frac{dy}{dt}=\cos t$

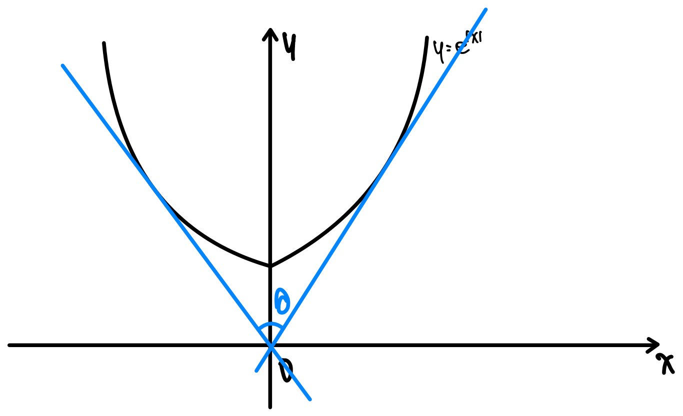
$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

대칭으로 그려보자.

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$ ④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1



어느 도형에서나 접선에 대한 문제가 나오면 접점에 가장 집중해야한다.

접점에 대한 정보가 없으므로 접점의 좌표를 미지수로 잡고 시작하자.

제 1 사분면에서의 접점 : (t, e^t)

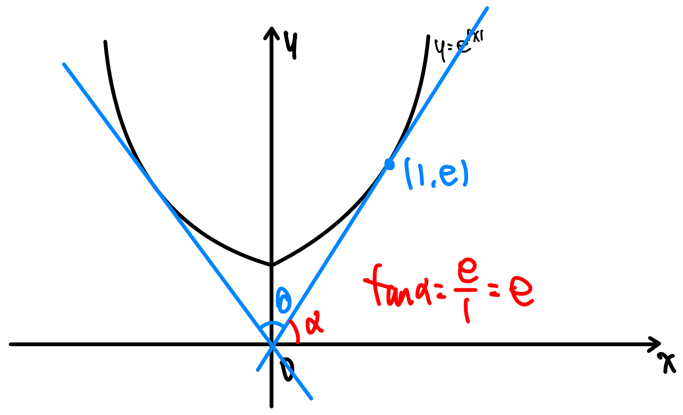
$t>0,\ e^t>0$

접선이 $(0,0)$과 (t,e^t)를 지난다. + (t,e^t)에서의 미분계수는 e^t이다.

$$\frac{e^t-0}{t-0}=e^t$$

$$\frac{e^t}{t}=e^t \longrightarrow t=1$$

그렇다면 접점이 $(1,e)$이다.



$\theta=\pi-2\alpha$

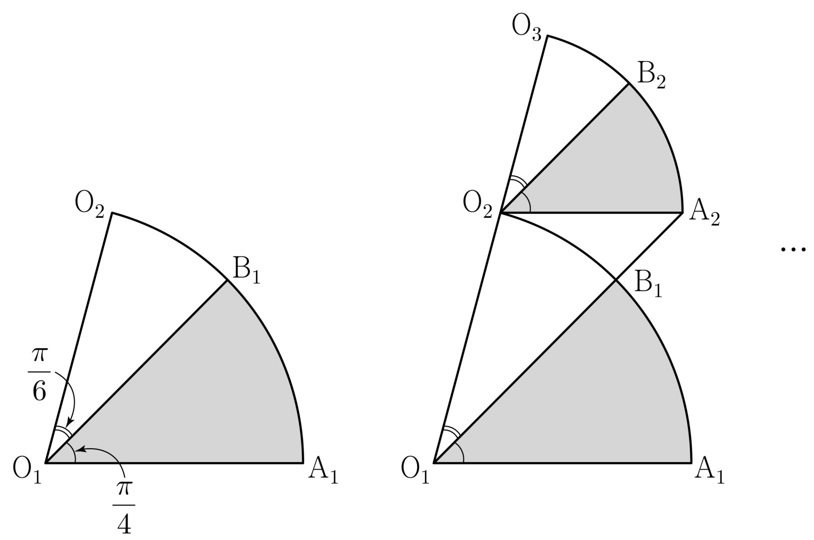
$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2e}{1-e^2}$$

$$\tan\theta=\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha=\boxed{\frac{2e}{e^2-1}}$$

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2 …

① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

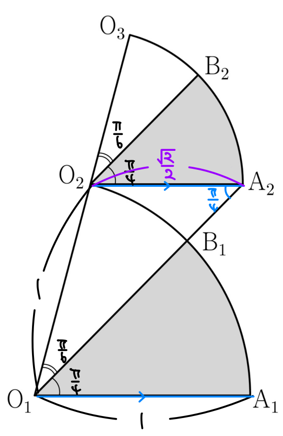
무한등비급수 문제이고 이러한 문제에서 우리가 찾아야하는 것은 단 두 개이다.

첫 항과 공비

왼쪽 그림에서 칠해진 넓이인 첫 항은 부채꼴이다.

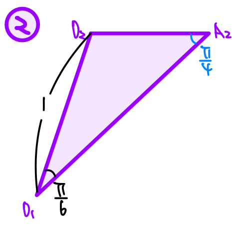
반지름과 중심각을 알고 있으므로 바로 구해보자.

부채꼴 $O_1A_1B_1=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8} \longrightarrow a_1=\frac{\pi}{8}$



① $\overline{O_2A_2}$와 $\overline{O_1A_1}$이 평행하므로 $\angle A_2O_1A_1=\angle O_2A_2O_1=\frac{\pi}{4}$

②



$\triangle O_2A_2O_1$에서 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}$

$\overline{O_2A_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ 부채꼴 $O_2A_2B_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{16}$

그렇다면 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

27. 두 함수

$$f(x)=e^{x}, \quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

x>0에서만 보자

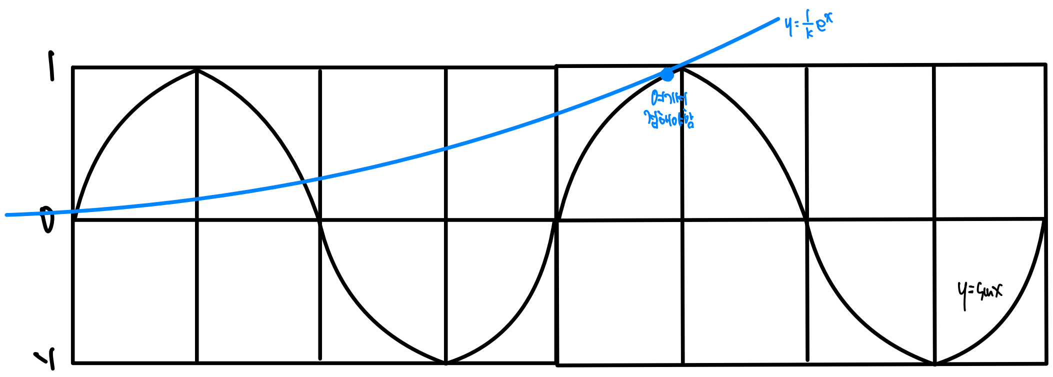
① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

실근의 개수에 대해 따질 때는 크게 2가지 방법이 있다.

1. 판별식-> 초월함수인데 무슨 판별식

2. 그래프를 그려서 해결-> 그려봐야겠네

준 식을 그대로 써도 되지만 필자는 $f(x)=g(x)$ 를 $\frac{1}{k}e^{x}=\sin x$로 바꿔서 처리하겠다.



파란 색 점에서 접해야 교점이 3개일 수 있으므로 위의 그림과 같이 구성되어야 하고

그렇다면 저 점에서 두 함수가 만나고, 미분계수도 같아야 한다.

$(t, \frac{1}{k}e^{t})$ or $(t, \sin t)$라고 하자.

① 만난다

$\frac{1}{k}e^{t}=\sin t$

② 접한다

$\frac{1}{k}e^{t}=\cos t$ → $\cos^2 t+\sin^2 t=1$

$\frac{1}{k^2}e^{2t}+\frac{1}{k^2}e^{2t}=1$

$\frac{2}{k^2}e^{2t}=1$

$k=\sqrt{2}e^{t}$

$k=\sqrt{2}e^{t}$이므로 ①에 대입하여 t를 구해보자.

$\frac{1}{\sqrt{2}e^{t}}e^{t}=\sin t$

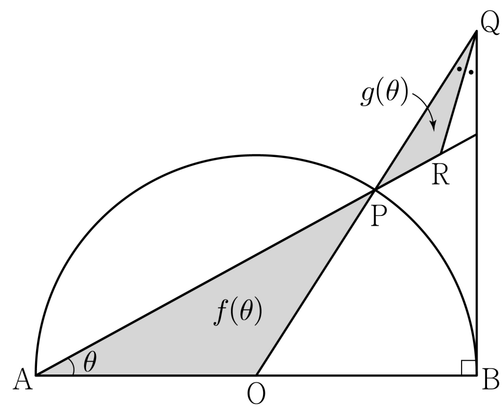
$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin t$

$t=\frac{9}{4}\pi$ $(2\pi<t<3\pi$이므로$)$

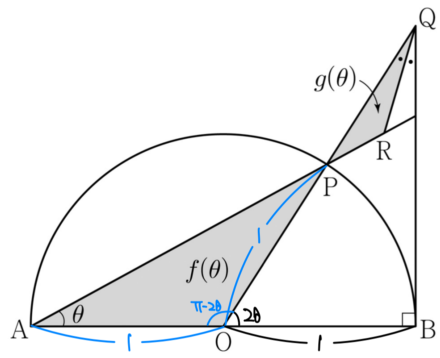
→ $\boxed{k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, ∠OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. ∠OAP $=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

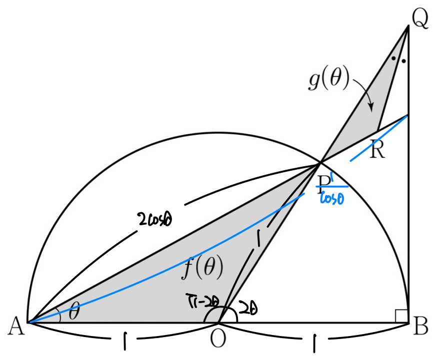
$\lim_{\theta \to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]

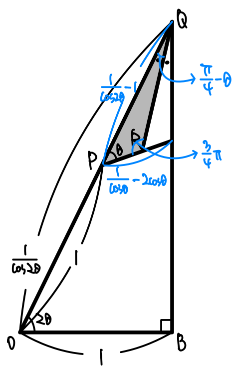


① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta$





△PQR에서

$\frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\overline{PR}}{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$\overline{PR}=\overline{PQ}\times\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\sin\frac{3}{4}\pi}$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{PR}\cdot\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{\cos 2\theta}-1)\cdot(\frac{1}{\cos 2\theta}-1)\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\sin\frac{3}{4}\pi}\cdot\sin\theta$

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{\cos 2\theta}-1)^2\cdot\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)\cdot\sin\theta}{\theta^4\times\frac{1}{2}\sin 2\theta}\cdot\sqrt{2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{1}{\cos 2\theta}-1)^2\cdot\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)\cdot\cancel{\sin\theta}}{\theta^4\times\frac{1}{2}\cancel{\sin 2\theta}}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}\right)^2}{\theta^4}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\cos 2\theta)^2}{\theta^4}$

$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\cos 2\theta}{(2\theta)^2}\right\}^2\cdot 16=\frac{1}{8}\cdot 16=\boxed{2}$

단답형

29. $t>2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$ 이 $\underline{x=k\text{에서 극대일}}$ 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는 미분가능한 함수이다. $\underline{g(\alpha)=e^2}$ 인 실수 α 에 대하여

$f'(t)=0$이고 $x=k$에서 $f'(x)$가 $+\to-$

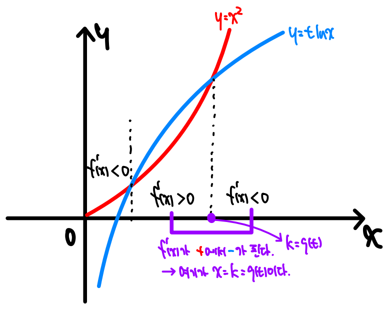
$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f(x)$가 x=k에서 극대라고 하였으므로 자연스럽게 도함수를 구해보자.

$$f'(x)=2t\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}-2x$$

$$=\underbrace{\frac{2}{x}}_{\text{이거는 0이 될 수 없으므로}}\underbrace{(t\ln x-x^2)}_{\text{여기서 부호변화가 있을까?}}$$

→ $y=t\ln x$와 $y=x^2$으로 분리하여 보자.



위에서 구한 것에 따르면 $\underline{f(x)\text{위의 점 x=k=g(t)에서 극대이므로}}$ 밑과 같이 쓸 수 있다.
$f'(g(t))=0$

$$f'(g(t))=\frac{2t\ln g(t)}{g(t)}-2g(t)=0$$

$$\frac{t\ln g(t)}{g(t)}=g(t)$$

$$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2 \xrightarrow{g(\alpha)=e^2} \alpha\ln e^2=e^4$$

$$2\alpha=e^4$$

$$\boxed{\alpha=\frac{1}{2}e^4}$$

궁금해했던 요소 중 하나였던 α 를 구했으므로 $g'(\alpha)$ 를 구해줘야한다.

$g'(\alpha)$를 구하기 위해서는 유일하게 있던 식인 $\underline{t\ln g(t)=\{g(t)\}^2}$를 미분해야 할 것이다.
t에 대해 미분해 $g'(t)$를 얻는다.

$$\ln g(t)+t\cdot\frac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)\cdot g'(t)$$

$t=\alpha$ 대입하고 $\alpha=\frac{1}{2}e^4$, $g(\alpha)=e^2$

$$\ln e^2+\frac{1}{2}\cancel{e^4}^{\,e^2}\cdot\frac{g'(\alpha)}{\cancel{e^2}}=2\cdot e^2\cdot g'(\alpha)$$

$$2=g'(\alpha)\cdot\left(2e^2-\frac{1}{2}e^2\right)$$

$$2=g'(\alpha)\cdot\frac{3}{2}e^2$$

$$\boxed{g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}}$$

$$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{\cancel{e^4}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{16}^{\,8}}{9\cancel{e^4}}=\frac{8}{9}$$

$$\boxed{p+q=17}$$

30. $\underline{t>\frac{1}{2}\ln 2}$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $\underline{y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})}$ 과 직선 $\underline{y=x+t}$ 가 만나는 $\underline{\text{서로 다른 두 점 사이의 거리}}$를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2)=\dfrac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

문제에서 기본적으로 준 상황이 곡선과 직선이 교점을 가지는 상황이므로

두 곡선의 식이 같다는 식을 씀으로써 시작해보자

$$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$$

$$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$$

$$e^{2x}-e^t\cdot e^x-e^{-2t}+1=0$$

인수분해 안되므로 근의 공식으로 처리해보자.

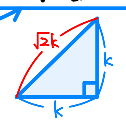
$$e^x=\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}=\frac{e^t\pm(e^t-2e^{-t})}{2}$$

$$\underbrace{e^x=e^{-t}}_{x=-t}\ \text{or}\ \underbrace{e^t-e^{-t}}_{x=\ln(e^t-e^{-t})=\ln(e^{2t}-1)-t}$$

그렇다면 곡선과 직선이 만나는 두 점의 x좌표는 $-t$와 $\ln(e^{2t}-1)-t$이다.

이 두 점은 $\underline{y=x+t}$ 위에 있으므로 두 점의 거리는 $\underline{\sqrt{2}\times(x\text{값의 차이})}$이다.

기울기가 1이다.



$$f(x)=\sqrt{2}\{(\ln(e^{2t}-1)-t)-(-t)\}$$

$$=\underline{\sqrt{2}\cdot\ln(e^{2t}-1)}$$

$$f'(x)=\sqrt{2}\cdot\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-1}$$

$$f'(\ln 2)=\sqrt{2}\cdot\frac{2e^{\ln 4}}{e^{\ln 4}-1}=\sqrt{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{8}{3}\sqrt{2}\qquad\boxed{p+q=11}$$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

by 심상범 in Orbi

5지선다형

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$ 의 값은? [2점]

$=3^{-\frac{1}{4}}$

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}} = 3^{-2} = \boxed{\frac{1}{9}}$

2. 함수 $f(x)=2x^3+4x+5$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=6x^2+4$ $\boxed{f'(1)=10}$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

첫항을 a, 공비를 r 이라고 하자.

$a_1=2$, $a_2a_4=36$

$a=2$ $ar \times ar^3=36$

$a^2r^4=36$

일 때, $\frac{a_7}{a_3}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$a^2r^4=36$

$4 \cdot r^4=36$ $a_1=2$

$r^4=9$

$\frac{a_7}{a_3}=\frac{a \cdot r^6}{a \cdot r^2}=\boxed{r^4=9}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x \le -1) \\ x^2-5x-a & (x > -1) \end{cases}$$

다항함수는 모두 연속

그렇다면 경계에서 의심스러움

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

좌극한=우극한=함숫값

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

실수 전체의 집합에서 불연속이 의심되는 점은 단 하나이다.-> x=-1

나머지는 모두 다항함수이므로

그렇다면 x=-1에서의 좌극한, 우극한, 함숫값을 따져보자.

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 2x+a = -2+a$

$f(-1) = -2+a$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2-5x-a = 1+5-a = 6-a$

$-2+a=6-a$

$2a=8$

$\boxed{a=4}$

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

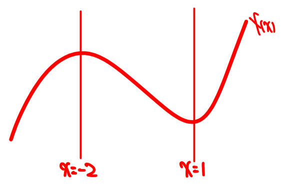
함수를 줬으니 구하자.

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)$

$=6\underbrace{(x+2)}_{x=-2\text{에서 극대}}\underbrace{(x-1)}_{x=1\text{에서 극소}}$



$\begin{cases} M=f(-2)=-16+12+24+1=21 \\ m=f(1)=2+3-12+1=-6 \end{cases}$

$\boxed{M+m=15}$

6. $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

각이 특이하다. 통분하자.

① $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{\cancel{\sin\theta}+\sin^2\theta-\cancel{\sin\theta}+\sin^2\theta}{\underbrace{1-\sin^2\theta}_{=\cos^2\theta}}$

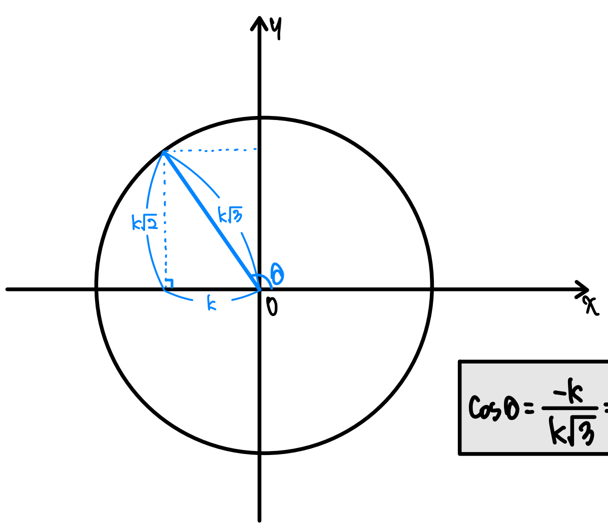
$=\dfrac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=2\cdot\tan^2\theta=4$

$\tan^2\theta=2$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\tan\theta<0$

$\tan\theta=-\sqrt{2}$

이 각을 좌표평면에서 표현해보면 아래와 같다.



$\boxed{\cos\theta=\dfrac{-k}{k\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

첫항 주었다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

이걸 어떻게 해석할까?

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

수열 문제이고 주어진 수열을 잘 모르기에 일단 해보는 것이 맞는 선택이다.

그러나 이 문제의 경우의 수열의 일반항의 형태가 익숙한 형태이다.

그렇다면 일반항의 형태를 부분분수로 바꿔보자. 부분분수? $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$\dfrac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\left(\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{1}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_2}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{a_n}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{n}$

문제에서 물어본 것이 13번째 항이므로 n=12를 대입하여 계산해보자. a_{n+1}이므로

$\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{13}}=\dfrac{1}{-4}-\dfrac{1}{a_{13}}=\dfrac{1}{12}$

$\boxed{a_{13}=-3}$

8. 삼차함수 $f(x)$가

최고차항의 계수는?

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

f(x)는 x를 인수로 가진다. f(x)는 x-1을 인수로 가진다. $f'(0)=f'(1)=1$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

주어진 함수가 3차함수라는 조건은 주었으나 최고차항의 계수를 주지 않았으므로

최고차항의 계수를 미지수로 잡자

k라고 하자.

그리고 문제에서 준 조건들에 의해 f(x)는 x와 x-1을 인수로 가진다.

f(x)는 3차식이므로 마지막 하나의 인수를 x-p라고 하자.

$$f(x)=kx(x-1)(x-p)$$

문제 조건에 의해 f'(0)=f'(1)=1이므로 모두 계산해보자.

$$f'(x)=k(x-1)(x-p)+kx(x-p)+kx(x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=k\cdot(-1)(-p)=kp \\ f'(1)=k\cdot 1\cdot(1-p)=k-kp \end{array}\right) p=\frac{1}{2},\ k=2,\ f(x)=2x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{f(2)=2\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{\cancel{2}}=6}$$

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

적분하면 위치, 미분하면 가속도

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

미분해서 구하자.

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

시간을 매개로 하는 속도 식을 주었으므로

이 식을 미분하면-> 시간에 대한 가속도 식을 알 수 있고
이 식을 적분하면-> 시간에 대한 위치 식을 알 수 있다.

t=k일때 가속도가 12라고 하였으므로 가속도 식을 구해서 k를 구해보자.

$v(t)=-4t^3+12t^2$

$a(t)=-12t^2+24t=12$

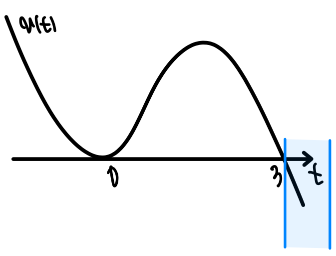
$t=1$

그렇다면 우리가 구해야하는 것은

t=3 ~ t=4에서 움직인 거리이므로 점 P의 움직임을 파악하고 거리를 구해주자.

속도를 통해 파악

$v(t)=-4t^2(t-3)$



t=3~4에서는 운동 방향 변화 X

위치 $x(t)=\int v(t)\,dt=-t^4+4t^3+C$

$$\boxed{|x(4)-x(3)|=27}$$

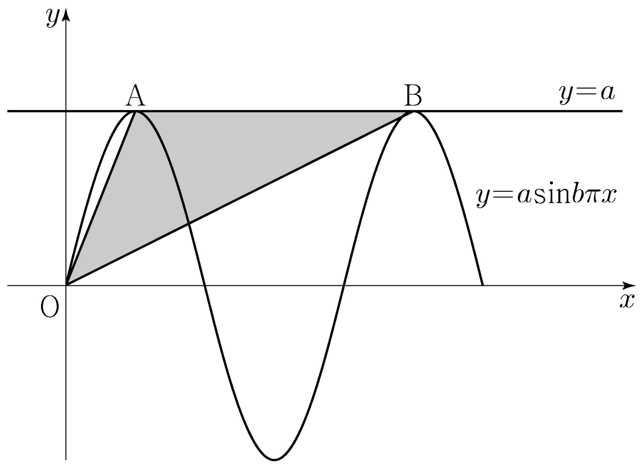
10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

특이하게 조건이 붙네

AB를 밑변으로

점 A와 B를 구하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



문제 초반에서 미지수 a, b가 양수라는 준 것을 인지하고 시작하자.

문제에서 준 조건은 크게 두 가지로 보인다.

1. 삼각형 OAB의 넓이=5 2. 직선 OA의 기울기 * 직선 OB의 기울기= $\frac{5}{4}$

첫 번째 조건을 풀기 위한 삼각형의 높이가 a로 주어져있으므로 1번 조건 먼저 해보자.

삼각형 OAB에서 밑변을 선분AB, 높이를 a라고 하자.

선분 AB의 길이가 필요하므로 주어진 함수의 주기를 구해보자.

AB가 함수의 한 주기이므로

$y=a\sin b\pi x$

$\to$ 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이다. 그렇다면 $\overline{AB}=\frac{2}{b}$이다.

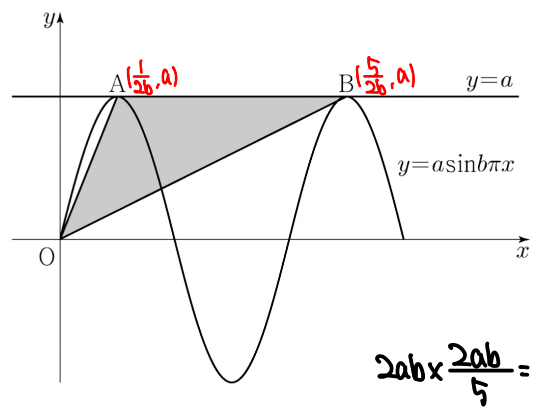
• $\triangle OAB=\overline{AB}\times a\times\frac{1}{2}=\frac{\cancel{2}}{b}\times a\times\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{a}{b}=5$

$a=5b$

두 번째 조건을 위해서는 점 A와 점 B의 좌표가 필요하다.

우리가 함수의 주기까지 구해놨으므로 각 점의 좌표를 쓸 수 있다.

점A의 x좌표는 주기의 $\frac{1}{4}$이고
점B의 x좌표는 주기의 $\frac{5}{4}$이다.



$\overline{OA}$의 기울기 $=\dfrac{a}{\frac{1}{2b}}=2ab$

$\overline{OB}$의 기울기 $=\dfrac{a}{\frac{5}{2b}}=\frac{2}{5}ab$

$2ab\times\frac{2ab}{5}=\frac{5}{4}$

$\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$ab=\frac{5}{4}$

$a=5b$이므로 $\to a=\frac{5}{2},\ b=\frac{1}{2}$ $\boxed{a+b=3}$

11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

자세한 정보는 X

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$$

x=1 대입 → 그렇다면 0이 된다.
x에 대해 미분 → f(x)로 정리 가능

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$일 때, $a+f(3)$의 값은?
(단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

주어진 식에 있는 적분을 해결하는 방법은 두 가지이다.

1. x=1을 대입한다.
2.주어진 식을 x에 대해 미분한다.

둘 다 해보자.

1.x=1 대입

$f(1)=2+a+3a+\underbrace{\int_1^1 f(x)dx}_{=0}$

$f(1)=2+4a$

→ 다른 방식으로 $f(1)$을 표현할 수 있을까? → 주어진 식에 0을 대입해보자.

$=\int_0^1 f(x)dx$라도

$0\times f(0)=0+0+3a+\int_1^0 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=3a$

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$이므로 $2+4a=3a$

$a=-2$ $f(1)=\int_0^1 f(t)dt=-6$

2.식을 x에 대하여 미분

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$

$\cancel{f(x)}+xf'(x)=6x^2+2ax+\cancel{f(x)}$

$f'(x)=6x-4$

$f(x)=3x^2-4x+C$

$f(1)=-6$이므로 $C=-5$

$f(x)=3x^2-4x-5$

$f(3)=27-12-5=10$

$\boxed{a+f(3)=-2+10=8}$

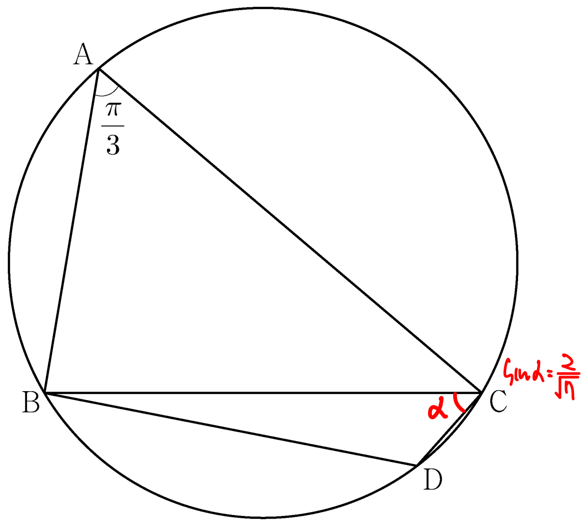
12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인

혹시 sin 법칙?

삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? [4점]

유일하게 정보를 준 각이므로
쓰기 쉽게 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}$이라고 하자.

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



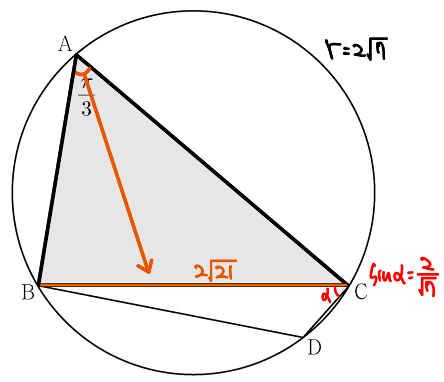
문제 첫 줄에서 원의 반지름을 주었고 그 원이 모든 삼각형을 외접하므로

sin 법칙을 쓸 것이라는 의심을 하고 시작하자.

우리가 구해야하는 것은 선분 BD와 선분 CD이다.

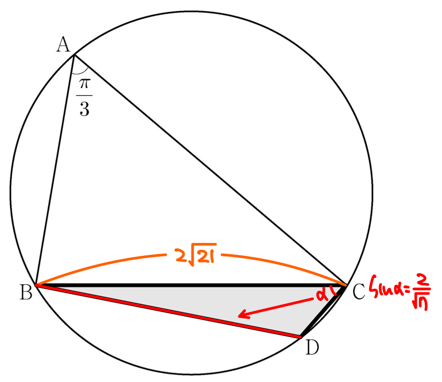
△ABC에서 sin 법칙을 써서 BC를 구해보자. 아직 자세하게는 모르겠지만 △BCD에서 처리되지 않을까?

우선 먼저 구할 수 있는 선분 BD부터 구해보자.



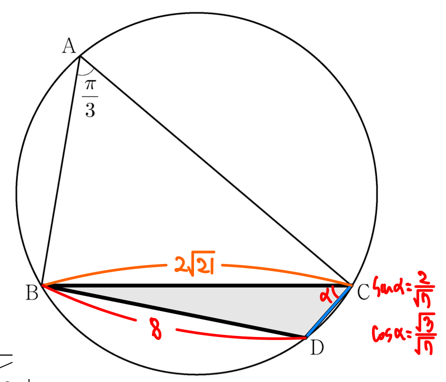
△ABC에서 $\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\times2\sqrt{7}$

$\overline{BC}=4\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{21}$



△BCD에서 $\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{BD}}{\frac{2}{\sqrt{7}}}=2\times2\sqrt{7}$

$\overline{BD}=4\sqrt{7}\times\frac{2}{\sqrt{7}}=8$



△BCD에서 $\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\cos\alpha=\overline{BD}^2$

$4\cdot21+\overline{CD}^2-2\cdot2\sqrt{21}\cdot\overline{CD}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\overline{BD}^2$

$84+\overline{CD}^2-12\cdot\overline{CD}=64$

$x^2-12x+20=0$

$x=\overline{CD}=2$

$\boxed{\overline{BD}+\overline{CD}=10}$

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

많은 정보를 줌

왜 굳이 자연수라고 했을까?

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

등차수열이니까 a_m과 a_{m+3}은 부호가 달라야함

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

a_n이 양수로 바뀌기 전까지

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

문제에서의 수열이 등차수열이라는 것도 주었고 첫 항마저 주었다.

$a_1=-45$

그렇다면 문제는 공차에 있다는 것으로 보인다.(+공차는 자연수이므로 양수이다)

$d>0$

조건 (가)에서 m번째 항과 m+3번째 항의 절댓값이 같다는 내용을 주었다.

기본적으로 수열 a_n이 공차가 양수인 등차수열이므로 n이 커짐에 따라 수열은 커진다.

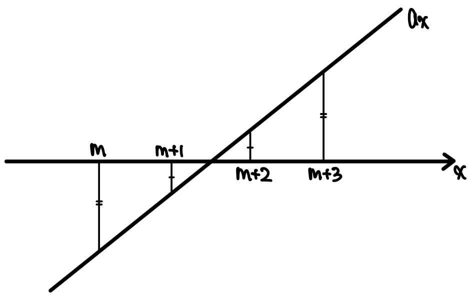
$a_m < a_{m+3}$

그런데 m번째 항과 m+3번째 항의 절댓값이 같으려면

a_m이 음수이고 a_{m+3}이 양수가 되면서 절댓값이 같아야 한다.

$a_m = -a_{m+3}$

등차수열은 일차함수로 나타낼 수 있으므로 이를 그래프로 그려보면 아래와 같다.



$$a_m + a_{m+3} = \{-45+(m-1)d\} + \{-45+(m+2)d\}$$

$$= -90 + (2m+1)d = 0$$

$a_m = -a_{m+3}$이므로

$$\underline{(2m+1)}\,\underline{d} = 90$$

m이 자연수이므로 짝수

그렇다면 90의 약수 중 짝수

d의 후보 = 2, 6, 10, 18, 30

조건 (나)를 해석해보자면 수열 a_n이 계속 증가하는 수열이고

그래프를 활용해보면 m+1번째 항까지 음수이므로 $\sum_{k=1}^{m+1} a_k > -100$이 성립되어야 한다.

등차수열의 합이니 식으로 써볼 수 있다.

(평균 × 항의 개수)

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{a_1 + a_{m+1}}{2} \times (m+1)$$

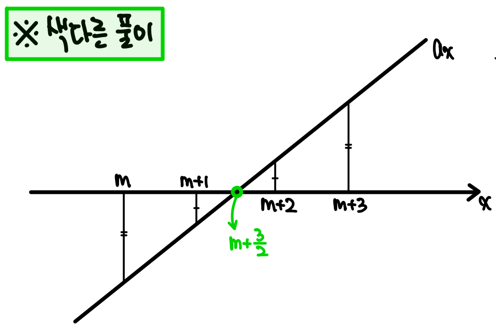
$$= \frac{-45 + \{-45 + m \cdot d\}}{2} \times (m+1) > -100$$

$$(-90 + m \cdot d) \times (m+1) > -200$$

이 식을 만족시키는 d는 18, 30이다.

$\boxed{18+30=48}$

※ 색다른 풀이



위의 상황은 전 풀이와 같고 그래프에서부터 보면

$m+\frac{3}{2}$번째 항에서는 0이 되어야 한다.

$a_{m+\frac{3}{2}} = 0$

그렇다면 m+1항과 m+2항을 아래와 같이 써보자.

$$a_{m+1} = -\frac{d}{2}, \quad a_{m+2} = \frac{d}{2}$$

그렇다면 이를 이용하여 수열의 합을 나타내보자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{a_1 + a_{m+1}}{2} \times (m+1) = \frac{-45 - \frac{d}{2}}{2} \times (m+1) > -100$$

$$\left(-45 - \frac{d}{2}\right) \times (m+1) > -200$$

$$\left(45 + \frac{d}{2}\right) \times (m+1) < 200$$

d는 짝수이어야 함

m=4이면 d가 0이더라도 성립하지 않으므로 m=1, 2, 3

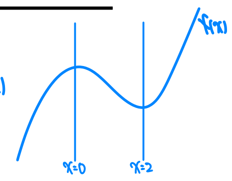
- m=1 → d=30
- m=2 → d=18
- ~~m=3 → d=$\frac{50}{7}$~~

$\boxed{18+30=48}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$f'(x)=3x(x-2)$

신경쓰자.



$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다. O

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다. O

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다. O

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

바로 전 6월 시험에서 14번의 난도가 높았기에 이 문제 역시도 보기를 보기 전에

조금의 사전정보를 얻고 가도록 하자.

함수 $f(x)$는 x축과의 위치만을 제외한 모든 것을 주었다.

상수항을 제외한 식, 그래프 개형

결국 $g(x)$가 문제이다. 최대한 해석해보자.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - \underline{f(0)}_{\text{적분상수 } C} & (x \le 0) \\ \underline{f(x+p)} - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

$f(x+p)$: f(x)를 x축 방향으로 −p만큼 평행이동

→ f(x)를 C만큼 내린다. = 상수항을 없앤다. → x^3-3x^2

→ 적분상수끼리 처리가 된다. = 상수항을 없앤다. = 원점을 지난다.

→ f(x)에서 $x \ge p$의 부분을 떼어서 (0, 0)에 붙인다.

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+1) - f(1) & (x > 0) \end{cases} \qquad g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (x \le 0) \\ f'(x+1) & (x > 0) \end{cases}$$

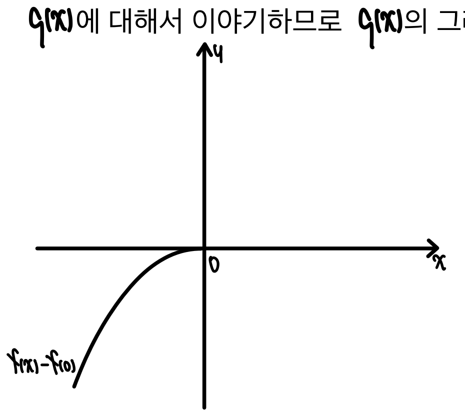
$$g'(1) = f'(1+1) = \underline{f'(2) = 0}$$

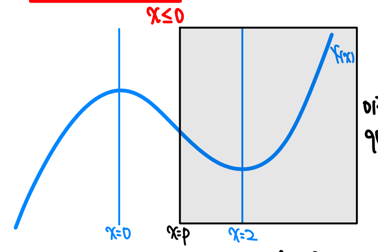
(O)

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

$g(x)$에 대해서 이야기하므로 $g(x)$의 그래프를 정해진 부분만 그려보자.

$x \le 0$





이렇게 분리해서 $g(x)$의 $x>0$ 부분에 넣는다.

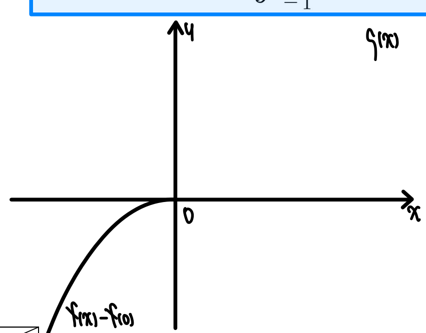
$g(x)$가 미분가능이기 위해서는 $\lim_{x \to p} f'(x) = 0$이어야 한다.

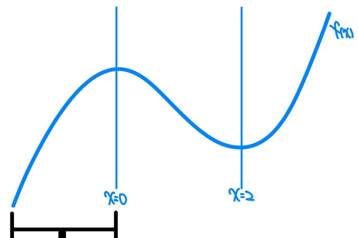
연속은 식에서 이미 전제되어 있으므로 미분계수만 맞추면 된다.

이를 만족시키는 양수 p는 2 뿐이다.

(O)

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.





여기가 $g(x)$의 $x<0$ 부분과 동일한 모양이다.

$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이려면 '$g(x)(x>0)$의 증가율'이 '$g(x)(x<0)$의 증가율'보다 커야한다.

$p \ge 2$에서의 $f(p)$의 증가율은 $p<0$에서의 $f(p)$의 증가율보다 크므로 맞는 선지이다.

(O)

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\underbrace{a_5 + a_6 = 0}_{a_5=-a_6}$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

수열 문제가 킬러 위치에 존재한다는 것은 어느 정도는 직접 해봐야 한다는 이야기이다.

수열 또한 익숙한 친구는 아니므로 직접 해봐야하나 문제는 그 부분이 아니라

'어디부터 시작하는가' 로 보인다.

문제에서 유일하게 준 조건이 $a_5+a_6=0$이므로 6번째 항부터 역추적해보자.

$a_6 = \begin{cases} -2a_5-2 \rightarrow \cancel{a_5=-2} \\ a_5 \rightarrow a_5=0 \\ -2a_5+2 \rightarrow \cancel{a_5=2} \end{cases}$

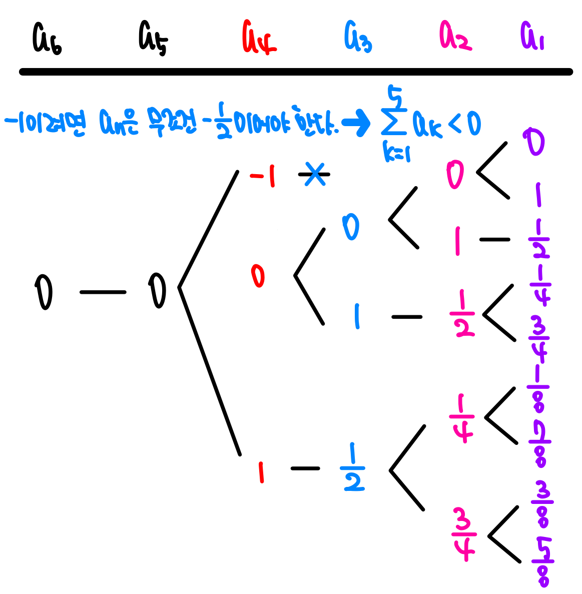
$a_5 = 0 = \begin{cases} -2a_4-2 \rightarrow a_4=-1 = \begin{cases} -2a_3-2 \rightarrow a_3=-\frac{1}{2} \\ a_3 \rightarrow a_3=-1 \\ -2a_3+2 \rightarrow a_3=\frac{3}{2} \end{cases} \\ a_4 \rightarrow a_4=0 = \begin{cases} -2a_3-2 \rightarrow a_3=-1 \\ a_3 \rightarrow a_3=0 \\ -2a_3+2 \rightarrow a_3=1 \end{cases} \\ -2a_4+2 \rightarrow a_4=1 = \begin{cases} -2a_3-2 \rightarrow a_3=-\frac{3}{2} \\ a_3 \rightarrow a_3=1 \\ -2a_3+2 \rightarrow a_3=\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$

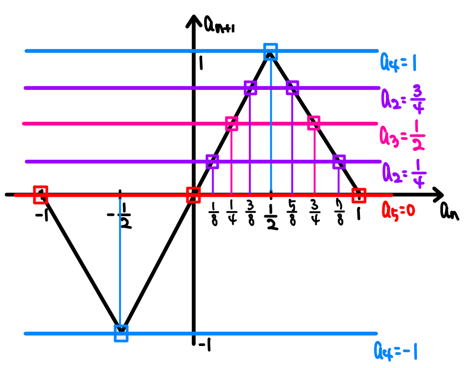
파란색 부분이 반복되는 것이 보이므로 이를 일반화해서 도식화해보자.

이를 하는데 있어서 수열을 일차식으로 볼 수 있으므로 그래프도 활용해보자.

$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n-2 \\ 2a_n \\ -2a_n+2 \end{cases}$

a_{n+1}이 -1이려면 a_n은 무조건 $-\frac{1}{2}$이어야 한다. $\rightarrow \sum_{k=1}^{5} a_k < 0$





직접 구한 첫째 항들이 모두 조건을 만족시키므로 더해서 답을 내자.

$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$

단답형

16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2 100 - \log_2 25 = \log_2 4 = \boxed{2}$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

적분상수?

$\int f'(x)\,dx = 2x^4 - 4x^3 + 7x + C = f(x)$

$f(0)=3$이므로

$C = f(0) = 3$

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x + 3$

$\boxed{f(1) = 2-4+7+3 = 5}$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45, \quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

$\sum_{k=1}^{10}a_k+2\cdot\sum_{k=1}^{10}b_k=45$ $\quad$ $\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=3$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

$=\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{10}b_k-\frac{1}{2}\times 10$ (5)

구해야하는 값의 식을 보기 쉽게 처리해보자.

$$\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{10}b_k-\frac{1}{2}\times\overset{5}{10}=\sum_{k=1}^{10}b_k-5$$

그렇다면 $\sum_{k=1}^{10}b_k$를 구하면 되겠다! -> 위에서 준 두 식을 연립하자.

$$\sum_{k=1}^{10}a_k+2\cdot\sum_{k=1}^{10}b_k=45$$
$$-\quad \sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=3$$
$$3\cdot\sum_{k=1}^{10}b_k=42$$
$$\sum_{k=1}^{10}b_k=14 \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{10}b_k-5=9}$$

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$ $\quad$ $f'(a)=3a^2-12a+5$ $\quad$ 제한한 조건 $\quad$ 다 구하기 or 근과 계수

문제에서 주어진 것과 같이

함수 $f(x)$에서 0~4에서의 평균변화율과 $f'(a)$를 계산하자.

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{-12}{4}=-3$ $\qquad$ $f'(a)=3a^2-12a+5$

$$-3=3a^2-12a+5$$
$0=3a^2-12a+8$ → 이걸 만족시키려면 $0<a<4$도 만족

이 식의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의해 $\boxed{\frac{8}{3}\text{이다.}}$ $\quad$ $\boxed{p+q=11}$

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

구간은 나눠야할듯

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

함수의 식은 줬지만 문제에서 가장 중요한 식이 절댓값에 엮여있다. 구간 나누기 or 제곱

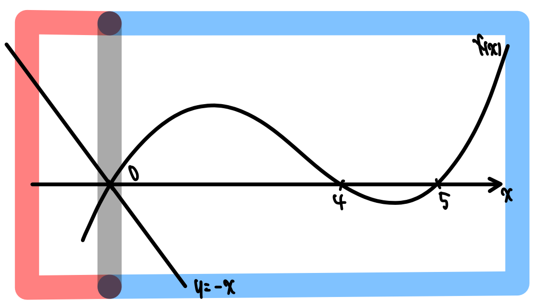
절댓값을 처리하기 위해 안에 들어있는 것의 부호를 경우의 수로 나눠보자. $f(x)+x$

$$\begin{cases} -x=6x+k & (f(x)<-x) \\ 2f(x)+x=6x+k & (f(x)>-x) \end{cases}$$

f(x)와 -x의 대소관계에 의해 식이 결정되므로 두 그래프를 그려서 비교해보자.

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=\frac{1}{2}x(x^2-9x+20)$

$=\frac{1}{2}x(x-4)(x-5)$



① $f(x)<-x$

$7x=-k$

$x=-\frac{k}{7}$ → k가 자연수가 되어야 $x<0$

여기서 실근 하나가 무조건 생기네!

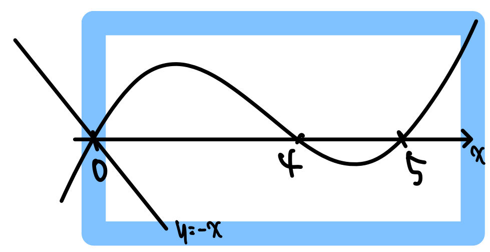
② $f(x)>-x$

$2f(x)=5x+k$

$x^3-9x^2+20x=5x+k$

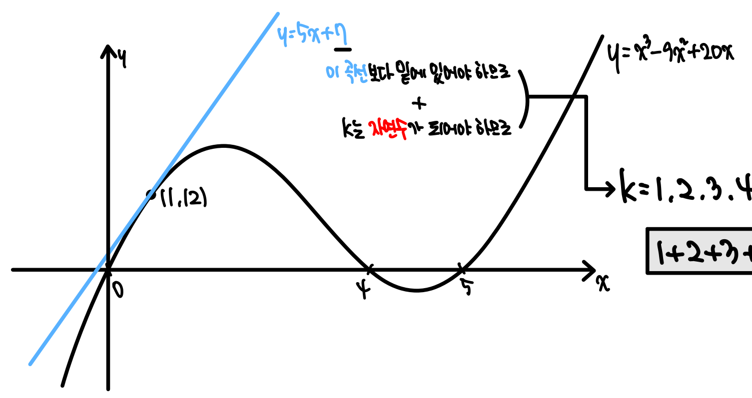
$x(x^2-9x+20)=5x+k$

$x(x-4)(x-5)=5x+k$



여기서 나머지 3개의 근이 생겨야함

5x+k가 접하는 것을 경계로 보자.



→ $k=1,2,3,4,5,6$

$\boxed{1+2+3+4+5+6=21}$

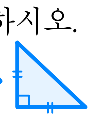
21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

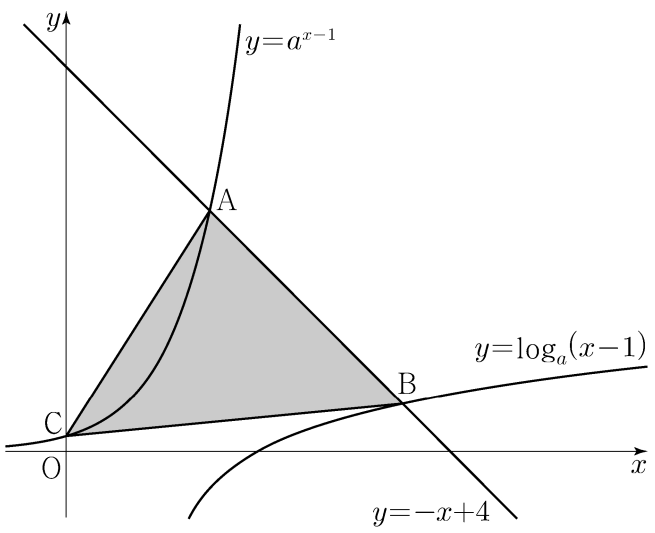
$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

익숙함 속의 낯설음

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]

이런 형태인 듯?





개념 공부를 조금이라도 한 학생이라면 문제의 두 식을 보고 이 생각을 할 것 같다.

'역함수'-> 역시 ㅋㅋ 내가 아는 한도 내에서만 나오지->근데 왜 쉽게 안되냐..?

문제에서의 두 식은 서로 역함수가 아니니까.

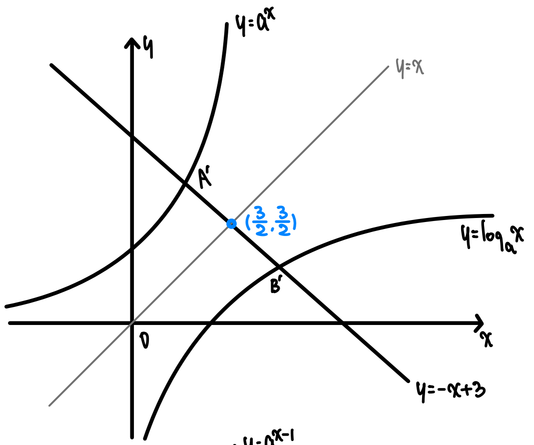
이 문제가 단순한 한 번의 계산으로만 처리되지 않는 이유는

그래프의 평행이동이 있기 때문이다.

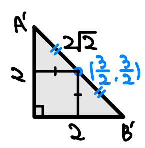
역함수인 상황이 우리에게 익숙한 이유는 사용하기 쉬운 식인 y=x 대칭이기 때문이다.

그렇다면 좌표평면의 모든 그래프를 x축 방향으로 -1만큼 평행이동 시켜서 보자.

$a^{x-1}\rightarrow a^x$ $\quad \log_a(x-1)\rightarrow\log_a x$ $\quad -x+4\rightarrow -x+3$

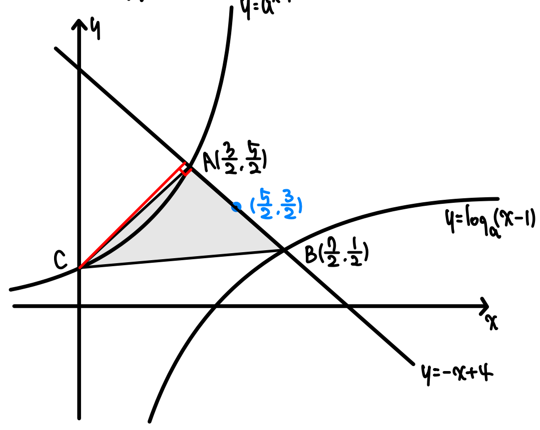


$\overline{A'B'}=2\sqrt{2}$이고 직선 A'B'의 기울기가 -1이므로



그렇다면 A'와 B'의 좌표는 $A'(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$, $B'(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$이다.

문제를 풀기 위해 다시 모든 그래프를 x축 방향으로 1만큼 이동시키자.



△ABC의 넓이를 위해서는

점C와 직선 AB 사이의 거리가 필요하다.

선분 AB의 길이를 주었으니 이를 밑변으로 사용하자.

점C의 좌표를 구하기 위해 $y=a^x$의 a를 구해보자.

→점 A를 지나므로 대입

$$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$$

$$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$$

$$a=\frac{25}{4}\rightarrow y=\left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}\rightarrow C\left(0,\frac{4}{25}\right)$$

직선 AB와 점 C 사이의 거리 $=\dfrac{\left|-\frac{4}{25}+4\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\frac{96}{25}}{\sqrt{2}}=\dfrac{96}{25\sqrt{2}}$

$$\triangle ABC=\cancel{2}\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{96}{25\cancel{\sqrt{2}}}\times\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{96}{25}=S$$

$\boxed{50S=192}$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

차수에 계수까지 줬다면 많이 줬다.

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\rightarrow 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

미분계수인가?

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

불연속이 가능한 점을 체크하자.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

대칭적인 형태가 나오면 계산?

문제 발문 초반에 함수 $f(x)$의 최고차항과 최고차항의 계수가 1이라는 것을 준 것은 큰 힌트다.

대부분의 킬러 문제들이 인수를 중요하게 여기는데

함수를 추적하는데 있어서 중요한 최고차항과 항의 개수를 준 것이다.

조건 (가)부터 살펴보자.

함수 g(x)가 연속이라는 조건이 있으므로 불연속 후보를 찾아보자.

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

이미 실수 전체에서 연속이다.

$2\times|f(x)|$의 미분계수라고 생각할 수 있다. $=2\times\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{2h}$

그렇다면 $|f(x)|$의 미분계수가 불연속이기 위해서는

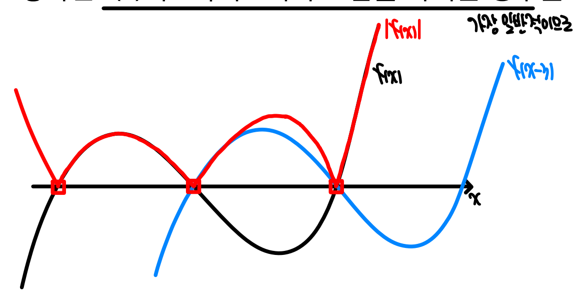
그래프를 그렸을 때 첨점이 생겨야 한다.

→이 점을 연속으로 만들어야 한다.

이 점에서 $f(x-3)=0$이라면? → $g(x)$에서 이 점은 연속이다.

그렇다면 f(x)와 x축이 3개의 교점을 가지는 경우를 먼저 살펴보자.

가장 일반적이므로



$|f(x)|$는 3개의 □ 부분에서 첨점을 가진다.

$g(x)$의 입장에서 불연속점

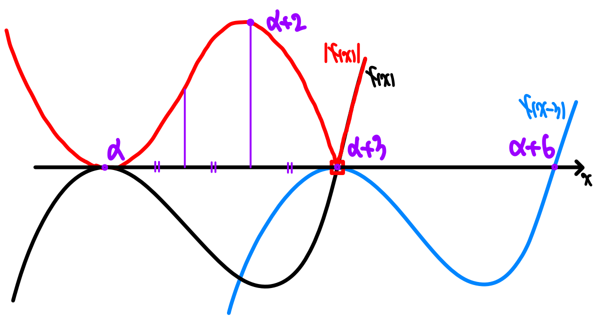
이 점들을 $g(x)$에서 연속이 되게 하기 위해서는

$f(x-3)$이 □ 부분을 모두 지나야한다.

→$f(x)$를 x축 방향으로 3만큼 이동시킨

$f(x-3)$은 □ 부분을 모두 지날 수 없다. ⊗

그렇다면 f(x)가 x축과 한 점에서 접하고 다른 한 점에서는 교점을 가지는 경우를 보자.



$|f(x)|$는 1개의 □ 부분에서 첨점을 가진다.

$g(x)$의 입장에서 불연속점

이 점들을 $g(x)$에서 연속이 되게 하기 위해서는

$f(x-3)$이 □ 부분을 지나야한다.

→$f(x)$를 x축 방향으로 3만큼 이동시킨 $f(x-3)$이므로

$|f(x)|$의 □ 부분에 $f(x-3)$의 접하는 부분이 있어야 한다.

그렇다면 $f(x)$에서 접점과 교점의 x좌표 차이가 3이다.

이를 기반으로 교점들을 정리해보자.

조건 (나)에서 $g(x)=0$이 되려면 $f(x-3)=0$ 또는 $\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}=0$이어야 한다. → α, $\alpha+2$, $\alpha+3$, $\alpha+6$

$\alpha+(\alpha+2)+(\alpha+3)+(\alpha+6)=4\alpha+11=7$

$\underline{\alpha=-1}$

$\underline{f(x)=(x+1)^2(x-2)}$

$\boxed{f(5)=36\cdot 3=108}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

$\frac{\infty}{\infty}$ 이므로 나눠보자.

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot3+\frac{5}{3^n}}{1+\frac{2^{n+1}}{3^n}}=\boxed{6}$$

24. $2\cos\alpha=3\sin\alpha$ 이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$ 일 때, $\tan\beta$ 의 값은? [3점]

sin과 cos의 비율은 tan 아닌가?

덧셈 법칙 or $\alpha+\beta=n\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

cos값과 sin값의 비율을 주었다는 것은 크게 두 가지로 해석할 수 있다.

1. cos값과 sin값을 직접 구한다. -> 주어진 각의 사분면의 정보가 없으므로 부호 추정 불가
2. cos값과 sin값의 비율을 의미하는 삼각함수인 tan가 존재하므로 tan값으로 정리-> 이거다

$$2\cos\alpha=3\sin\alpha$$
$$\frac{2}{3}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

때마침 다음에 주어진 조건이 tan에 대한 조건이고 한 각의 tan값은 아는 상태이므로

삼각함수의 덧셈정리로 계산해주자.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}=1$$
$$\frac{2}{3}+\tan\beta=1-\frac{2}{3}\tan\beta$$
$$\frac{5}{3}\tan\beta=\frac{1}{3}$$
$$\boxed{\tan\beta=\frac{1}{5}}$$

25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^{t}-4e^{-t},\quad y=t+1$$

에서 $t=\ln 2$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

$=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 이니까 각각 구해서 $t=\ln 2$ 대입하자.

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$\frac{dx}{dt}=e^{t}+4e^{-t}$

$\frac{dy}{dt}=1$

$\rightarrow \frac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{e^{t}+4e^{-t}}$

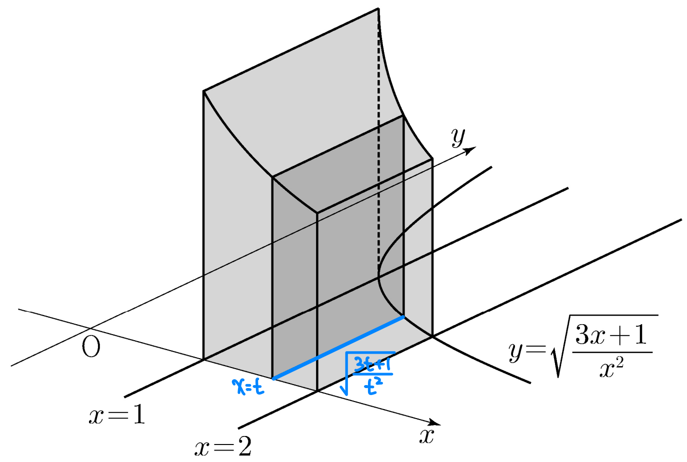
$t=\ln 2$에서의 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\ln 2}=\dfrac{1}{e^{\ln 2}+4e^{-\ln 2}}=\dfrac{1}{2+4e^{\ln\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{1}{2+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln e}}$

$=\dfrac{1}{2+2}=\boxed{\frac{1}{4}}$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x^{2}}}$ $(x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]

$x=1\sim2$에서 $\left(\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}\right)^{2}$를 적분



① $3\ln 2$ ② $\frac{1}{2}+3\ln 2$ ③ $1+3\ln 2$

④ $\frac{1}{2}+4\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

x축과 수직인 평면으로 자르고 단면이 모두 정사각형이라고 하였으므로

단면의 넓이는 곡선 식의 제곱으로 볼 수 있다.

$\left(\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}\right)^{2}=\frac{3x+1}{x^2}$

x=1~2에서 단면을 적분하면 되기 때문에 이 식을 적분하자.

$\int_1^2\frac{3x+1}{x^2}dx=\int_1^2\frac{3x}{x^2}dx+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\int_1^2\frac{3}{x}dx+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=3\cdot\left[\ln x\right]_1^2+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$

$=\boxed{3\ln 2+\frac{1}{2}}$

27. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자.
90°를 3등분하므로 하나 당 30°

$\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\dfrac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.
$\angle G_1E_1F_1=\angle E_1G_1F_1=45°$

모든 조건을 그림에 옮겨두자.

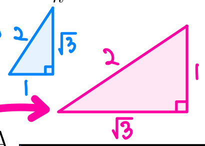
선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 ◸ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
$\overline{AB_2}=k$, $\overline{B_2C_2}=2k$라고 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]
첫항과 공비만 구하자.

① $\triangle C_1D_1F_1$이 익숙한 삼각형이고 $\overline{C_1D_1}=1$이므로 $\overline{C_1F_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

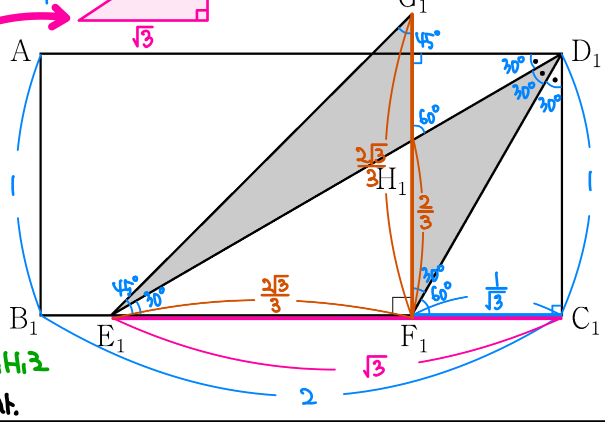
② $\triangle C_1D_1E_1$도 익숙한 삼각형이고 $\overline{C_1D_1}=1$이므로 $\overline{C_1E_1}=\sqrt{3}$이다.



③ $\triangle E_1F_1G_1$이 직각이등변삼각형이므로 $\overline{E_1F_1}=\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\overline{F_1G_1}$

$\triangle E_1F_1H_1$도 익숙한 삼각형이고 $\overline{E_1F_1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{F_1H_1}=\dfrac{2}{3}$이다.

④ 구해야하는 넓이를 $\triangle E_1F_1G_1+\triangle E_1F_1D_1-2\cdot\triangle E_1F_1H_1$로 구할 수 있다. 계산은 아래에서 처리하자.

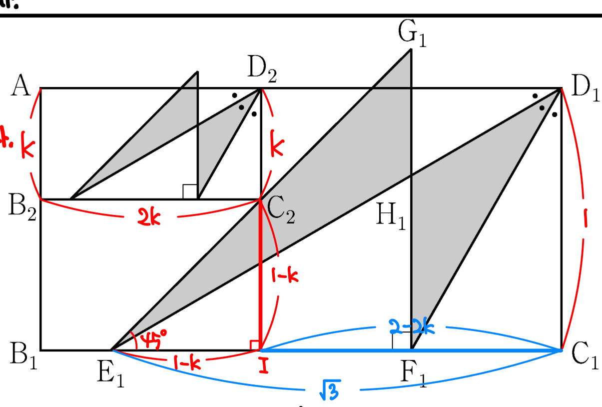


① 선분 E_1G_1과 직선 B_1C_1이 이루는 각이 45°이라는 것을 활용하기 위해 C_2에서 선분 B_1C_1에 수선의 발 I를 내리자. $\overline{AB_2}=\overline{C_2D_2}=k$이므로 $\overline{C_2I}=\overline{E_1I}=1-k$이다.

② □$AB_1C_1D_1$에서 보면 $\overline{IC_1}=\overline{AD_1}-\overline{AD_2}=2-2k$이다. 위에서 $\overline{C_1E_1}=\sqrt{3}$이었으므로

$1-k+2-2k=\sqrt{3}$

$k=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$



⋮

① $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\dfrac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\dfrac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

$R_1=\triangle E_1F_1G_1+\triangle E_1F_1D_1-2\cdot\triangle E_1F_1H_1$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{3}$

$=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{9}=\boxed{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}$ 첫항

2번째 도형에서 $k=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$였으므로 큰 ◸와 작은 ◸의 길이비는 $1:k=1:\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$이고

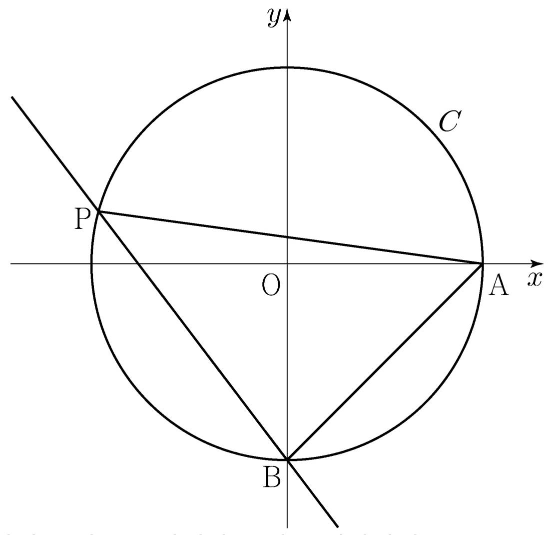
큰 ◸와 작은 ◸의 넓이비는 $1^2:k^2=1:\boxed{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}}$이다. 공비

$\lim_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{6-\sqrt{3}}{9-12+6\sqrt{3}}=\dfrac{6-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}-3}=\dfrac{(6-\sqrt{3})(6\sqrt{3}+3)}{(6\sqrt{3}-3)(6\sqrt{3}+3)}$

$=\dfrac{33\sqrt{3}}{108-9}=\dfrac{33\sqrt{3}}{99}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

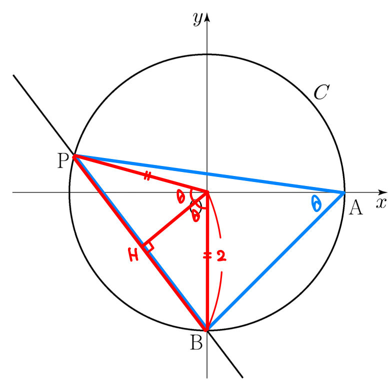
28. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 $A(2,0)$, $B(0,-2)$가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하자. 점 $Q(0, 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta$의 값은? [4점]
이것으로 다른 각들을 θ로 표현해보자.

① $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$ ④ $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{2}$



우선 글로 주어진 조건을 그림에다 옮기고 시작하자.

이 문제에서는 길이를 각을 이용하여 표현해야하므로 필요한 각들을 θ로 표현해보자.



$\triangle ABP$가 원 C에 내접하므로 sin법칙으로 $\overline{BP}$의 길이를 θ로 나타내보자.

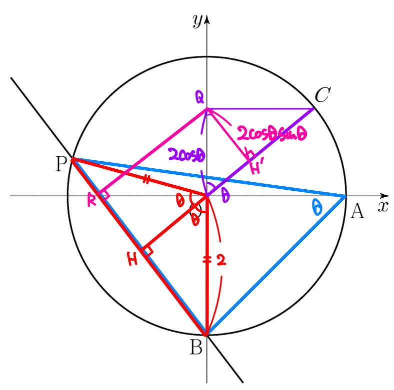
$\dfrac{\overline{BP}}{\sin\theta}=2R=4 \rightarrow \overline{BP}=4\sin\theta$

$\angle POB$가 $\angle PAB$의 원주각이므로 $\angle POB=2\theta$

$\triangle POH$와 $\triangle BOH$가 합동이므로 $\angle POH=\angle BOH=\theta$

그렇다면 $\overline{BP}=2\times\overline{BH}=4\sin\theta$

그 다음에 문제에서 중요한 포인트는 Q를 좌표평면에 표현하는 것으로 보인다. 점 Q는 y축 위에 있고 원 C, 각 θ와 관련이 있어보인다.
원 C의 반지름 2 + 각 θ의 cos = $2\cos\theta$



$\angle BOH=\theta$인 것을 활용하기 위해 $\overline{OH}$를 연장하자. 그렇게 되면 y축과 연장직선 간의 각이 θ가 되고 점 Q를 그릴 수 있게 된다.

그 후에는 문제에서 설명한대로 전개해보면

$f(\theta)=\overline{PR}=\overline{PH}-\underbrace{\overline{HR}}_{=\overline{QH'}}=2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin\theta\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$

$\displaystyle=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$

$\rightarrow$ $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ ⟩ $\sin\theta=t$ ⟨ $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ 라고 치환

$\cos\theta=\dfrac{dt}{d\theta}$, $\cos\theta\,d\theta=dt$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{4}$

$=2\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-2\cdot\frac{1}{4}$

$=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}}$

단답형

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

투이하게 익숙한 함수로 구해

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
>
> g(x)의 도함수를 볼까?
>
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

g(x)는 초월함수에 다항함수인 f(x)를 합성한 합성함수이다.

$(x+2)e^x$

주어진 f(x)가 우리에게 익숙한 이차함수이고 g(x)에 합성되어있으므로 먼저 살펴보자.

이차함수에서 가장 중요한 것은 $\boxed{\text{최고차항의 계수}}$와 $\boxed{\text{중심축}}$이므로

최고차항의 계수부터 생각해보자.

최고차항의 부호가
- 양수라면 g(x)의 최댓값이 존재할 수가... 없습니다.
  ex) $f(x)=x^2$ $g(x)=(x^2+2)e^{x^2}$ → 최댓값은 ∞...
- 음수라면 g(x)의 최댓값이 존재할 수 있다.

→ f(x)의 최고차항의 계수는 음수이다.

조건 (가)에서 g(x)가 x=a에서 최댓값을 가진다고 하였으므로 g(x)의 도함수를 구해보자.

이때 $f(a)=6$

$g'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}+\{f(x)+2\}e^{f(x)}\cdot f'(x)$

$=f'(x)e^{f(x)}\{f(x)+3\}$

최댓값은 극점 중에서 나올 것이므로 $f'(a)=0$ or $f(a)=-3$중 하나인데 $f(a)=6$이므로 $f'(a)=0$이다.

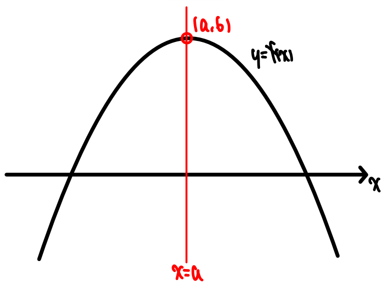
$f'(a)=0$은 여러 의미를 가진다.

① 이차함수 f(x)의 $\boxed{\text{중심축}}$은 $x=a$이다.

이차함수에서 중요하다.

② $f(x)=-p(x-a)^2+6$으로 쓸 수 있다.

③ f(x)의 극댓값이 6이다.



조건 (나)에서 g(x)가 최솟값을 가지는 x값들을 대략적으로 알려주었다.

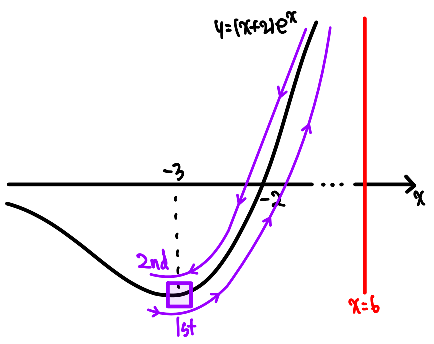
g(x)는 f(x)가 합성된 합성함수이므로 아래와 같은 형태이다.

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{(x+2)e^x} g(x)$$

g(x)의 정의역은 f(x)의 치역이므로
g(x)의 정의역 ≤ 6

g(x)의 최솟값도 g(x)에서 도출되므로 함수 f와 합성된 $(x+2)e^x$를 그려보자.

정의역이 f(x)의 치역이므로 x=6에서 자르자.



g(x)는 f(x)에서 나온 수를 $(x+2)e^x$에 대입하는 것이므로

g(x)의 최솟값은 $(x+2)e^x$의 최솟값과 값이 같다.

$(x+2)e^x$가 최소가 되는 지점의 x좌표는 −3이다.

f(x)가 x=a를 대칭으로 커지고 작아지므로

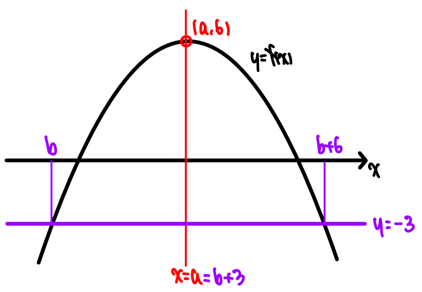
최대 6

$(x+2)e^x$에 투입되는 값도 커지다가 6이 되고 다시 작아진다.

이런 시행을 하는 동안 $(x+2)e^x$가 최소가 되는 지점을 2번 지난다.

이 2번이 $x=b$, $b+6$이고 f(x)는 $(b,-3)$과 $(b+6,-3)$를 지난다.

$f(b)+3=0$, $f(b+6)+3=0$



x=a는 이차함수의 대칭에 의해 $x=b$, $x=b+6$의 중간에 있어야 한다.

$a=\dfrac{b+b+6}{2}=b+3$ → $f(x)=-p(x-a)^2+6$

$=-p\{x-(b+3)\}^2+6$

$f(b)=-p\{b-(b+3)\}^2+6=-3$
$-9p+6=-3$
$p=1$

→ $f(x)=-(x-a)^2+6$

f(x)=0의 서로 다른 두 근 α, β에 대해 물어봤으므로 각각 추측해보자.

$-(x-a)^2+6=0$
$(x-a)^2=6$

→ $\alpha=a-\sqrt{6}$, $\beta=a+\sqrt{6}$

$\boxed{(\alpha-\beta)^2=(2\sqrt{6})^2=24}$

30. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

f(x)의 조건은 많이 줄다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$
>
> $f(0)=0$
>
> (나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0\leq x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\displaystyle\int_0^5 xg(x)\,dx=\frac{q}{p}$이다.

구간이 $0\leq x<1$인 f(x)의 시작과 끝의 y좌표가 같아야

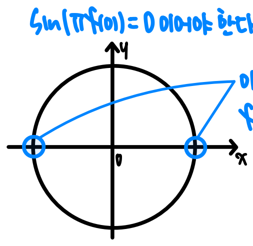
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

g(x)도 f(x)에서 파생되는 것이므로 f(x)를 먼저 알아보자.

조건 (가)는 $\frac{0}{0}$꼴의 극한 식이므로 하나하나 쪼개보자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi f(x))}{x}=0$$

① 분모가 0으로 수렴하는데 식의 극한값이 0이므로
$\sin(\pi f(0))=0$이어야 한다.



이 두 지점에서 sin값이 0이므로
f(0)은 정수이어야 한다.

② $\frac{0}{0}$꼴의 식은 미분계수로 볼 수 있으므로
위의 식을 미분계수처럼 계산해보자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi f(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi f(x))-\sin(\pi f(0))}{x-0}$$
$$=\cos(\pi f(0))\cdot\pi f'(0)=0$$

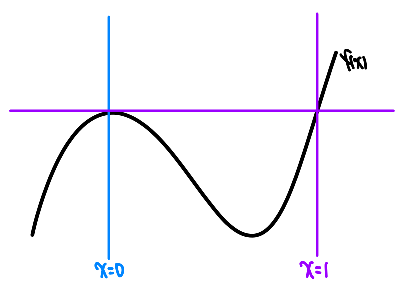
이건 0이 될 수 없다. 이게 0이구나. $f'(0)=0$

f(x)가 최고차항의 계수가 9이고 삼차함수라는 것도 알고 있으므로

그래프를 그려보면서 맞추어나가자. + g(x)가 연속이 되려면 f(x)가 어떻게 되야할까..?

g(x)는 f(x)의 $0\leq x<1$을 반복하는 형태이므로
정해진 구간의 앞과 뒤의 y좌표가 같다면 가능하다.

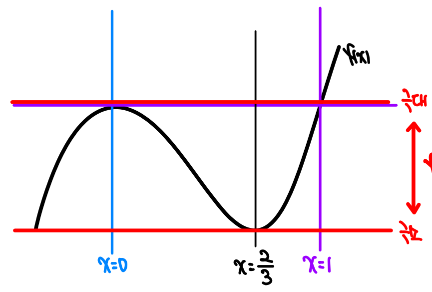
$f(0)=f(1)$



$f(0)=f(1)$를 만족시키기 위해서는 f(0)은 극대이어야 한다.

f(0)이 극소라면 f(1)이 정의 불가하다.

→ $f(x)=9x^2(x-1)+k$



삼차함수의 비율관계에 의해 극솟점의 x좌표는 $\frac{2}{3}$이다.

극댓값과 극솟값의 차이는 $\frac{4}{3}$이므로

극대 : X, 극소 : $X-\frac{4}{3}$

극댓값 × 극솟값 = 5에 적용해보자.

$X\times\left(X-\frac{4}{3}\right)=5$
$X(3X-4)=15$
$3X^2-4X-15=0$
$(X-3)(3X+5)=0$

극댓값 $X=f(0)$은 정수이므로
$X=f(0)=3$이다.

→ $f(x)=9x^2(x-1)+3$

g(x)의 반복되는 주기가 1이므로

$$\int_0^5 xg(x)\,dx=\int_0^1 xf(x)\,dx+\int_1^2 xg(x)\,dx+\int_2^3 xg(x)\,dx+\int_3^4 xg(x)\,dx+\int_4^5 xg(x)\,dx$$

g(x)는 f(x)를 이동시킨 것의 반복이므로

$$=\int_0^1 xf(x)\,dx+\int_1^2 xf(x-1)\,dx+\int_2^3 xf(x-2)\,dx+\int_3^4 xf(x-3)\,dx+\int_4^5 xf(x-4)\,dx$$

구간을 통일하자.

$$=\int_0^1 xf(x)\,dx+\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx+\int_0^1 (x+2)f(x)\,dx+\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx+\int_0^1 (x+4)f(x)\,dx$$

$$=5\int_0^1 xf(x)\,dx+10\int_0^1 f(x)\,dx$$

$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 9x^4-9x^3+3x\,dx$
$=\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$
$=\frac{21}{20}$

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 9x^3-9x^2+3\,dx$
$=\left[\frac{9}{4}x^4-3x^3+3x\right]_0^1$
$=\frac{9}{4}$

$5\int_0^1 xf(x)\,dx+10\int_0^1 f(x)\,dx=\cancel{5}\cdot\frac{21}{\cancel{20}_{4}}+\overset{5}{\cancel{10}}\cdot\frac{9}{\cancel{4}_{2}}=\frac{21}{4}+\frac{45}{2}=\frac{111}{4}$

$\boxed{111+4=115}$