수1-유형편

수능완성 10쪽 7번

07 ▸ 21054-0007

모든 실수 x에 대하여 $\log_{|a+3|}(x^2+ax-a+3)$의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

수능완성 11쪽 12번

12 ▸ 21054-0012

세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[5]{c}$
(나) $\log_2 \dfrac{bc}{a}=3$

1보다 큰 두 실수 m, n이 $\log_2 a \times \log_m b \times \log_n c=1$을 만족시킬 때, $\log_2 mn$의 최솟값은?

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{15}$
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{21}$

갑자기 로그의 정의가 3점에 나오면, 많은 허수들이 당황할 것이다. 과거에도 그랬다. 밑은 양수이면서 1이 아니고, 진수는 양수 조건.

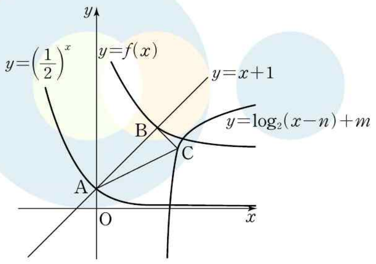
산술-기하는 1.합과 곱의 대상이 양수 / 2. 일정한 합 또는 곱이 주어질 것/ 3. 최소 또는 최대를 물어볼 것/ 이 세 가지 조건이 전부이다. 이는 로그의 성질과 합쳐져서 물어보기 좋은 내용이다.

<u>수능완성 16쪽 27번</u>

27 ▸ 21054-0027

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 y축과 만나는 점 A는 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$의 교점 B로 이동된다. 또 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선과 함수 $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프의 교점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(단, m, n은 양의 실수이다.)



지수함수와 로그함수의 평행이동 + 역함수 관계를 적절히 조합하여 물어보았다. 역함수가 안 보인다면? $y=x$를 활용하여 본인이 그리면 된다.

참고 기출 문항 - 2019년도 고3 3월 학력평가 나형 26번

$\log_x(-x^2+4x+5)$가 정의되기 위한 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

참고 기출 문항 - 2009학년도 수능 나형 21번

$1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}$$

가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오.

정답률 30% 문제이다. 일단 기본 개념부터 완벽하게 익히고 적용할 줄 알아야 한다는 교훈을 주는 문제.

등호가 2개 이상 있는 식이기에 매개 상수를 대입하면 쉽게 풀 수 있다. 그리고 요구사항의 표현을 통해 방정식을 만들어서 더 쉽게 풀 수도 있다. 또한 가비의 리를 이용해도 된다.

참고 기출 문항 - 2020학년도 9월 평가원 나형 28번

네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오.

(가) $3^a = 5^b = k^c$
(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

참고 기출 문항 - 2020학년도 9월 평가원 가형 15번 변형

함수 $y = 2^x$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OA} = 2\overline{OB}$
(나) $\angle AOB = 90°$

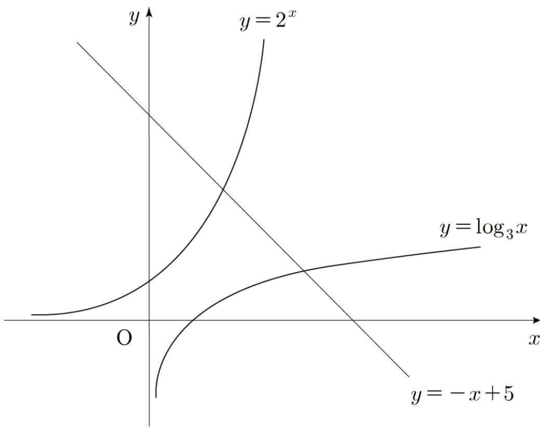
직선 OA의 기울기를 구하시오.

역시 매개 상수를 도입하면 쉽게 풀 수 있다. 또 다른 방법은 내가 k를 직접 구하기 힘들면 옆에 있는 자연수 $3, 5$로 대체해서 계산을 하도록 상황을 조작하는 것이다.

역함수 + 대칭이동을 이용하는 문제. 또한, 직각삼각형의 닮음이라는 기하적 특징을 이용하면 더 쉽게 풀 수 있다.

참고 기출 문항 - 2012년도 7월 학력평가 나형 15번

두 곡선 $y=2^x, y=\log_3 x$와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점을 각각 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

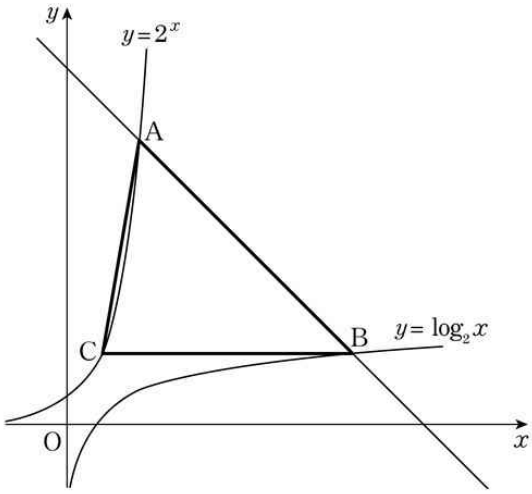


ㄱ. $a_1 > b_2$
ㄴ. $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$
ㄷ. $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_2}{b_1}$

지수함수와 로그함수가 나왔다. 게다가 기울기가 -1인 직선까지. 역함수였다면 더 좋았을텐데.. 그렇다면 역함수를 그리면 되는 것 아닌가?

참고 기출 문항 - 2015년도 10월 학력평가 A형 17번

그림과 같이 기울기가 -1인 직선이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C라 하자. 선분 AB의 길이가 $12\sqrt{2}$, 삼각형 ABC의 넓이가 84이다. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $a-\log_2 a$의 값을 구하시오.



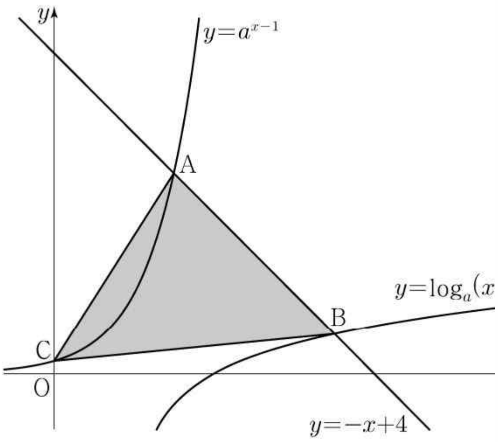
역함수와 기울기가 -1인 직선의 활용. 기울기가 -인 직선은 그 위의 점(x,y)의 합이 항상 일정하며, 기하적으로는 직각이등변삼각형을 만들어낸다. 그리고 이 문제는 요구사항의 표현이 기가 막힌다.

참고 기출 문항 - 2022학년도 9월 학력평가 공통 21번

$a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

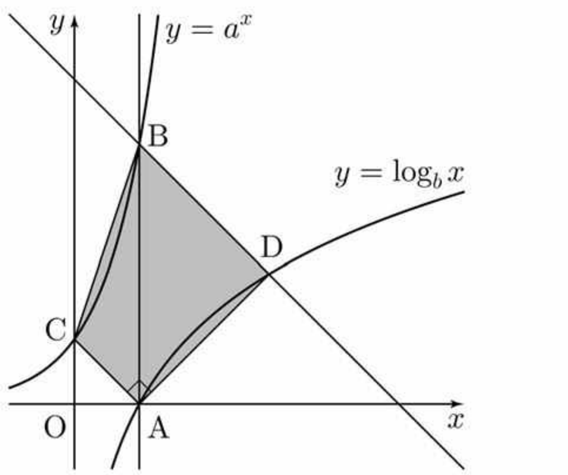
$$y=a^{x-1},\ y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오.



참고 기출 문항 - 2020학년도 사관학교 가형 16번 변형

그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 $A(1,0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 $C(0,1)$에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선$y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AC}\perp\overline{AD}$이고, 사각형 $ADBC$의 넓이가 6일 때, $(a\times b)^2$의 값을 구하시오.



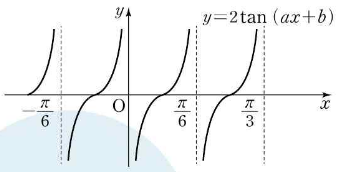
지수함수와 로그함수가 나왔다. 게다가 기울기가 -1인 직선까지. 역함수였다면 더 좋았을텐데.. 그렇다면 역함수로 만들기 위해 역으로 평행이동시켜서 복원하면 된다.

역함수와 기울기가 -1인 직선의 활용. 기울기가 -인 직선은 그 위의 점(x, y)의 합이 항상 일정하며, 기하적으로는 직각이등변삼각형을 만들어낸다. 그리고 이 문제는 요구사항의 표현이 기가 막힌다.

수능완성 22쪽 8번

08 ▸ 21054-0038

다음 그림은 함수 $y=2\tan(ax+b)$의 그래프의 일부분이다. ab의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a>0$, $0<b<\pi$이다.)



① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

수능완성 23쪽 12번

12 ▸ 21054-0042

$0\le x<2\pi$에서 함수

$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-5\cos^2 x+4\sin x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

탄젠트함수 그래프는 잘 안 나오고 있으니 3점에 갑자기 출제되면 당황스러울 수 있다. 한 번만이라도 풀고 넘어가자.

삼각함수의 최대, 최소 및 방부등식은 ‘삼각함수의 특징 / 치환 / 그래프의 특징 이용’이 해법이다.

참고 기출 문항 - 2018학년도 9월 평가원 가형 14번

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

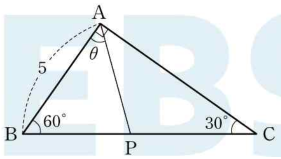
삼각함수의 최대, 최소 및 방부등식은 '삼각함수의 특징 / 치환 / 그래프의 특징 이용'이 해법이다.

수능완성 26쪽 19번

19 ▸ 21054-0049

그림과 같이 $A=90^\circ$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$이고 $\overline{AB}=5$인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 변 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $\dfrac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값을 구하시오.

(단, $0^\circ<\theta<90^\circ$)



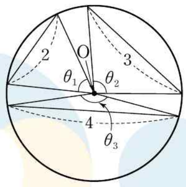
요구사항의 표현이 의미하는 바를 이해하면, 답이 3초 만에 도출된다. 사인법칙은 원으로부터 시작되기 때문이다. 원의 현 중 가장 특이한 것이 지름임을 이해하면 위 문제가 매우 쉬울 것이다.

수능완성 27쪽 26번

26 ▸ 21054-0056

그림과 같이 원에 길이가 각각 2, 3, 4인 세 개의 현이 있다. 이 세 개의 현 각각에 대응하는 중심각의 크기를 각각 θ_1, θ_2, θ_3이라 할 때, $\theta_3=\theta_1+\theta_2$가 성립한다. $\cos\theta_1$의 값은?

(단, $\theta_3<180^\circ$이고 점 O는 원의 중심이다.)

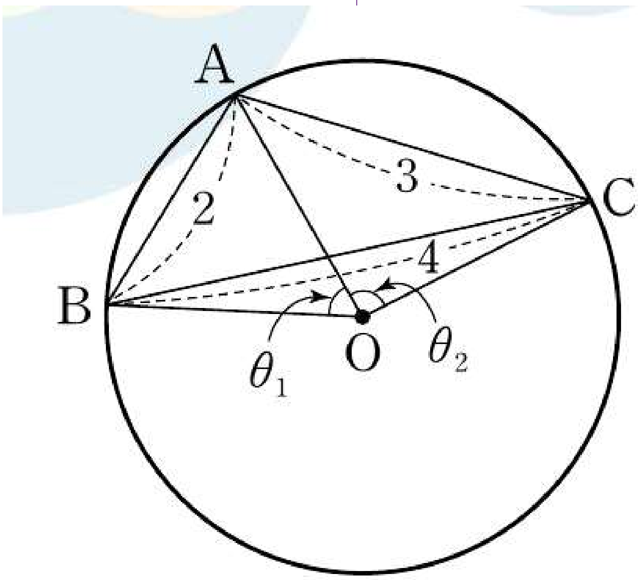


① $\dfrac{15}{32}$ ② $\dfrac{17}{32}$ ③ $\dfrac{19}{32}$

④ $\dfrac{21}{32}$ ⑤ $\dfrac{23}{32}$

위 문항은 연계 교재의 그림이 그대로 나온다면 연계 교재 안 본 사람들은 여기서 멘탈이 나갈 수도 있다. 3점짜리로 다음 페이지의 그림이 나오는 것이 좋을 것이다. 다만, 위 그림과 다음 페이지의 그림이 상호변환 가능하다는 것은 꼭! 알아두자.

27쪽 26번 예상 출제 그림



수능완성 32쪽 3번

03 ▸ 21054-0065

자연수 d에 대하여 모든 항이 정수이고, 공차가 $2d$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $|a_4|>|a_5|$를 만족시킬 때, a_4a_5가 최솟값을 갖도록 하는 a_1의 값을 $f(d)$라 하자. $f(2)+f(3)$의 값은?

① -31 ② -33 ③ -35
④ -37 ⑤ -39

참고 기출 문항 - 2022학년도 9월 평가원 공통 13번

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합을 구하시오.

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

자연수, 정수 조건.

등차수열은 일차함수와, 등차수열의 합은 이차함수와 연결지어 기하적으로 볼 수 있어야 한다. 거기에 등차중항의 원리 + 자연수 조건을 가미한 문제.

참고 기출 문항 - 2021년도 고3 7월 학력평가 공통 21번

공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \le d$
(나) 어떤 자연수 k $(k \ge 3)$에 대하여
세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \le a_{16} \le 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오.

자연수, 정수 조건 + (가)를 이용한 부등식 확장.

참고 기출 문항 - 2022학년도 사관학교 공통 15번

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n} = a_3 \times a_n + 1, a_{2n+1} = 2a_n - a_2$
이다.

$a_1 = m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값을 구하시오. (답은 음수입니다.)

점화식은 이웃한 항 사이의 관계입니다. 2020 수능 나형 21번처럼 a_{2n}과 a_{2n+1}의 관계를 관찰하며, 정수 조건을 이용해 간단한 인수분해를 하면 그닥 어렵지 않은 문제입니다.

참고 기출 문항 - 2019학년도 수능 나형 29번

첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오.

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$

(다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

자연수, 음의 정수 조건을 이용한 검증에 등차중항을 이용한 대칭성을 가미.

수능완성 34쪽 8번

08 ▸ 21054-0070

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\log_2 a_n$으로 정의하자. 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, b_{15}의 값은?

(가) $b_3+b_5+b_7=15$
(나) $b_4+b_6+b_8=21$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

참고 기출 문항 - 2010년도 3월 학력평가 나형 15번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$b_n=\log_3 a_n$$

수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{11}의 값을 구하시오.

(가) $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{15}+b_{17}=36$
(나) $b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{16}+b_{18}=45$

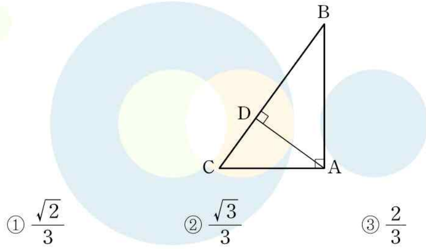
'$\log_a$(등비수열)=등차수열'임을 알고 있다면 매우 쉬운 문제. 거기에 등차중항의 원리를 이용한 대칭성을 이용하면 된다.

아무래도 왼쪽의 수능완성 문항은 이것을 참고해서 낸 것이 확실하다. 역시 같은 원리를 이용하면 된다.

수능완성 36쪽 15번

15 ▸ 21054-0077

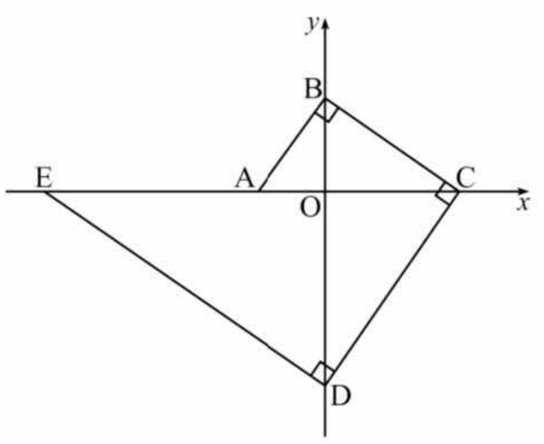
그림과 같이 ∠A가 직각인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\sin C$의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

참고 기출 문항 - 2006년도 3월 학력평가 나형 14번

그림과 같이 좌표축 위에 다섯 개의 점 A, B, C, D, E에 대하여 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{BC}\perp\overline{CD}$, $\overline{CD}\perp\overline{DE}$가 성립한다. 세 선분 AO, OC, EA의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 AB의 기울기는 k이다 k^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점, $\overline{OA}<\overline{OB}$이다.)

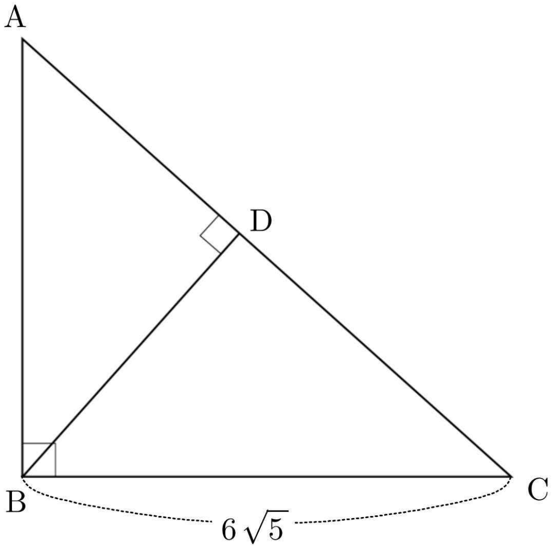


직각삼각형의 직각에서 빗변에 내린 수선은 세 개의 닮은 직각삼각형을 만들면서 특정한 등비수열을 도형 내부에 생기게 한다.

좌측의 문제와 동일한 원리

참고 기출 문항 - 2010년도 고3 4월 학력평가 가형 25번

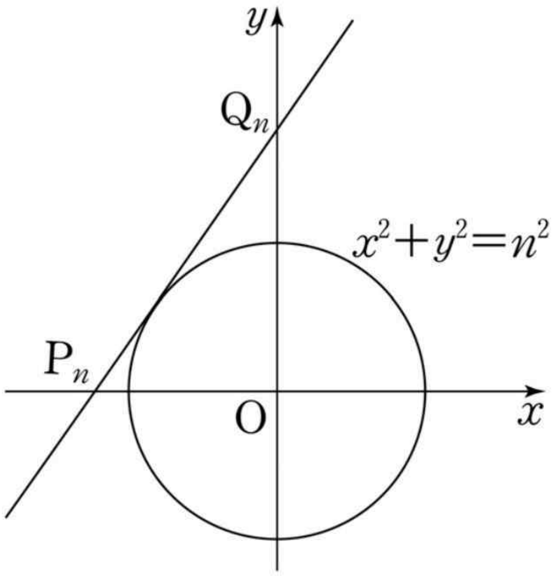
그림과 같이 $\angle B = 90^\circ$ 이고 선분 BC의 길이가 $6\sqrt{5}$ 인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 선분 AD, CD, AB의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때 선분AC의 길이를 구하시오



이전 페이지 문제들과 동일한 원리

참고 기출 문항 - 2011학년도 9월 평가원 가형 9번

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n = \overline{P_nQ_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{2n^2}$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



엄밀히 말하면 수열의 극한이기에 공통에 넣으면 안되는 문제이지만, 그냥 함수의 극한이랑 동일시하고 푸셔도 됩니다. 마찬가지로 직각삼각형에서의 등비중항의 원리를 이용하면 됩니다.

수2-유형편

수능완성 47쪽 5번

05 ▸ 21054-0101

실수 전체의 집합에서 정의되어 있는 함수 $f(x)$가 임의의 정수 a에 대하여 $a-1\le x<a$일 때,

$f(x)=ax$

이다. $\lim_{x\to(p+2)-} f(x)-\lim_{x\to p+} f(x)=157$일 때, 정수 p의 값은?

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

실제 수능날에 이렇게 나오면 중위권 이하는 문제 독해 자체를 못할 것 같아서 실은 문제. '임의의 정수 a에 대하여'는 '모든 정수 a에 대하여'라고 읽어야 한다. 이는 집합과 명제 단원에서 배운다. 그리고 '점에서의 극한'은 그 근처에서 대입만!

수능완성 51쪽 18번

18 ▸ 21054-0114

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)f(x)}{x+2}=0$일 때, $f(3)$의 값은?

① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

분모의 극한값이 0으로 가고 분자가 0으로 가지 않으면 $\frac{\text{상수}}{0}$꼴이라서 수렴하는 값이 나오지 않는다. 따라서 분자도 0이어야 한다. 그런데, 극한값이 0으로 수렴한다면? 분자의 0으로 가는 인수가 한 개 이상 분모보다 더 많은 것이다.

수능완성 51쪽 20번

20 ▸ 21054-0116

최고차항의 계수가 소수인 자연수 a인 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=8$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 근이 음이 아닌 서로 다른 세 정수일 때, $a+f(5)$의 값은?

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

최고차항의 계수비와 최저차항의 계수비 + 소수 조건 및 음 아닌 정수 조건을 통해 최신 트렌드를 잘 조합한 문제이다.

참고 기출 문항 - 2015학년도 6월 평가원 A형 21번

최고차항 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(5)$의 값을 구하시오.

(가) $g(1)=0$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)\ (n=1,2,3,4)$

함수의 극한값이 수렴하는 값으로 존재한다는 건 $\frac{0}{0}$꼴이라는 것이다. 그런데, 그 값이 0이라는 것은 분자에 반드시 0으로 수렴하는 인수의 개수가 분모보다 1개 이상 더 많아야 한다는 것이다.

참고 기출 문항 - 2009학년도 수능 가형 11번

다항함수 $f(x)$와 두 자연수 m, n이
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b$, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$
를 모두 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 고르시오. (단, a, b는 실수이다.)

ㄱ. $m \geq n$
ㄴ. $ab \geq 9$
ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am = bn$이다.

최고차항의 계수비와 최저차항의 계수비.

참고 기출 문항 - 2020학년도 6월 평가원 나형 20번

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

최고차항의 계수비와 최저차항의 계수비를 이용해 경우의 수를 차수별로 분류하여 검증하면 된다.

참고 기출 문항 - 2020학년도 수능 나형 14번

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

이전 페이지 문제들과 동일.

참고 기출 문항 - 2015학년도 6월 평가원 나형 29번

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오.

마찬가지로 최고차항의 계수비와 최저차항의 계수비로 풀 수 있는데, 이 대신에 오른쪽 조건에서 함숫값과 미분계수를 이용해서 풀 수도 있다. 거기에 합성함수의 극한은 덤.

수능완성 61쪽 3번

03 ▸ 21054-0137

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$
(나) $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)g(2+3h) - f(2+h)g'(2)}{h} = 6$

$g'(2)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

자칫하면 변화율이 안 보인다고 당황할 수 있어서 실었다. (가) 조건을 (나)와 연결시켜서 함수의 극한을 이용하면 된다. 미분계수의 기본 개념은 '변화율의 극한'임을 알아두자. 참고) 미분계수를 답으로 묻는 문제는 1. 변화율의 극한 2. 도함수의 함숫값 3. 접선의 기울기 이 3가지 안에서 반드시 답이 나온다.

수능완성 66쪽 17번

17 ▸ 21054-0151

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 최댓값은?

(가) $f(0) = f'(1)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq f'(1)$
(다) 열린구간 $(-1, 2)$에 속하는 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $(x_1 - x_2)\{f(x_1) - f(x_2)\} \leq 0$이다.

① -31 ② -33 ③ -35
④ -37 ⑤ -39

함수의 증감여부를 지금까지는 역함수의 존재, $y=t$와의 교점 개수 함수의 연속성 등 다양하게 물어왔으나, 올해 연계교재는 담담하게 부등식을 통해 그냥 정의를 뽑아내게 하고 있다. 이 문제는 그래프 원툴인 학생들에게는 어려울 수 있는데, 항상 '식과 그래프 관점을 동시에 쓰는 사람이 수학을 잘한다.'라는 것을 인지하기를 바란다.

참고 기출 문항 - 2022학년도 수능특강 수2 55쪽 레벨 2 4번

함수 $f(x)=x^3-ax^2+ax$가 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\}>0$을 만족시키도록 하는 모든 정수 a의 개수를 구하시오.

참고 기출 문항 - 2022학년도 수능특강 수2 56쪽 레벨 2 5번

함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-1)x+3$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오, (단, a는 상수다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x)=x$인 함수 $g(x)$가 존재한다.
(나) $f(1)=5$

이 친구는 모든 실수 x에 대하여 증가함수의 정의를 묻고 있다. 수능완성 문제를 풀기 전에 이 녀석을 풀어봤다면 훨씬 잘 풀렸을 것.

역함수의 존재를 간단하게 개념으로 포장한 문제. 연속함수에서 역함수가 존재한다는 것은 일대일대응이므로 증가 또는 감소함수라는 것.

참고 기출 문항 - 2016학년도 사관학교 A형 14번

실수 t에 대하여 x에 대한 방정식
$2x^3+ax^2+6x-3=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

x축에 평행한 직선과의 교점 개수가 일정함을 통해 증가함수임을 묻고 있다.

참고 기출 문항 - 2019학년도 9월 평가원 나형 30번

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x)=x$의 모든 실근이 $0, 1, a, 2, b$
$f'(1)<0, f'(2)<0, f'(0)-f'(1)=6$일 때,
$f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1<a<2<b$)

합성해서 원래 정의역인 x가 나온다는 것은 그 좌표들은 그 좌표만 보았을 때는 역함수라는 것. 이러한 점들은 1. $y=x$위에 있는 점이거나, 2. $y=x$에 대칭으로 있는 점밖에 없다.

수능완성 67쪽 21번

21 ▸ 21054-0155

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-f'(-x)$이다.
(나) $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $y=f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가질 때 세 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$, $(2,\ f(2))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는? (단, $\alpha\neq2$, $\beta\neq2$)

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

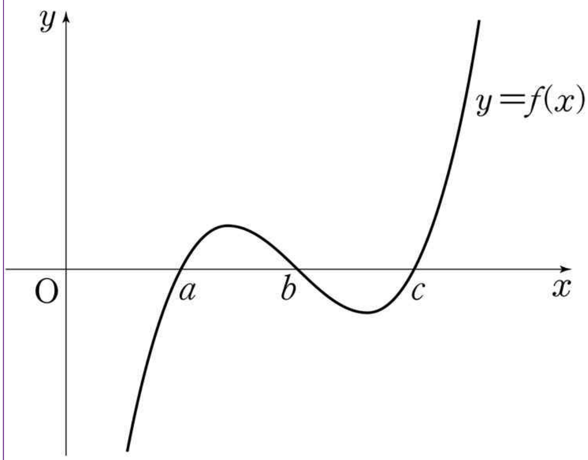
도함수가 기함수이므로 원함수는 우함수. 거기에 극값의 차를 도함수의 적분을 통해 구하게 만들었다. 극값의 차는 도함수의 넓이를 이용해 구하자!

참고 기출 문항 - 2013학년도 9월 평가원 가형 13번

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f(x)$는

$$\int_a^b f(x)dx=3,\ \int_a^c f(x)dx=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 고르시오.



ㄱ. $F(b)=F(a)+3$
ㄴ. $F(a)=F(c)$
ㄷ. $-3<F(a)<0$이면 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

'원함수의 극값의 차는 도함수의 넓이'라는 개념을 평가원은 이미 개념적으로 설명하는 문제로 출제했었다. 사실상 원리를 설명해준 것이나 마찬가지.

참고 기출 문항 - 2020학년도 9월 평가원 나형 17번

함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고, $f(-2)>0$일 때 $f(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

참고 기출 문항 - 2017년도 10월 학력평가 나형 20번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'\left(\dfrac{11}{3}\right)<0$

(나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 35를 갖는다.

(다) 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(0)$의 값을 구하시오.

삼차함수의 극값의 차는 도함수인 이차함수의 넓이 공식과 같다. 그리고 삼차함수의 최고차항 계수가 1이고, 극값의 차가 4라면 그 함수는 극대, 변곡, 극소, 교점의 좌표가 간격이 모두 1이다.

마찬가지로 극값의 차가 4이다.

참고 기출 문항 - 2020학년도 6월 평가원 나형 30번

최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1 \text{ 또는 } t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

참고 기출 문항 - 2015년도 고2 9월 학력평가 A형 30번

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-20$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t<-4 \text{ 또는 } t>0) \\ 2 & (t=-4 \text{ 또는 } t=0) \\ 3 & (-4<t<0) \end{cases}$$

이다. $f(9)$의 값을 구하시오.

-1과 3은 딱 4만큼 차이 난다.. 벌써 극값의 차를 통해 '극대-변곡점-극소-교점'간 x좌표가 1씩 차이 날 것을 예상할 수 있다.

극값의 차가 4이다. 비율 관계를 이루는 점들 x좌표 차가 1씩이다.

참고 기출 문항 - 2019년도 10월 학력평가 나형 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $a, b(a<b)$뿐이다. (나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

ㄱ. $f'(a)=0$ ㄴ. $b=a+3$ ㄷ. $f(0)=16$이면 $a^2+b^2=18$이다.

개형 두 개만 비교해보면 그래프를 확정할 수 있고, 극값의 차가 4이다.

수능완성 67쪽 22번

22 ▸ 21054-0156

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(가) $f(1)=f'(1)=0$

(나) 0이 아닌 실수 k에 대하여 함수 $|g(x)-3|$은 $x=k$, $x=-k$에서만 미분가능하지 않다.

(다) 열린구간 $(0, 1)$에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)>0$이다.

보기

ㄱ. $f(0)>0$이면 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㄴ. 함수 $g(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $f(2)$의 최댓값은 19이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

항상 식과 그래프는 같이 가는 것이 좋다. 위 문제는 $f'(0)=0$임을 (나)에서 뽑아내고 $x=1$에서 중근을 가지는 것을 통해 사차함수의 개형을 4가지로 분류할 수 있다. 이때 실수하지 않는 사고는 '각각을 그려놓고 그때마다 풀지 말고, 모든 가능한 개형을 다 그려놓고 그중에서 고르자.'이다. 이 문제는 기출 사차함수는 전부 참고 기출 문제이다.

수능완성 71쪽 33번

33 ▸ 21054-0167

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은 $y=2x+1$이다.

(나) 방정식 $f(x)-2x=3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\{f(0)\}^3$의 값은?

① $\frac{21}{2}$ ② $\frac{23}{2}$ ③ $\frac{25}{2}$
④ $\frac{27}{2}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

평행한 두 접선을 주었다. 이는 점대칭을 이용하라는 것이며, 차의 함수를 통해 축과의 관계로 바꾸어서 극대와 극소를 관찰하면 된다. 게다가 이때 극값의 차를 이용할 수도 있다. 이 문제의 킬링포인트 중 하나는, 삼차함수의 비율 관계를 이용할 때, 좌표를 잘 두는 것이다. 극점을 단순히 α라고 두기라도 한다면 갑자기 계산이 미쳐날뛴다..

참고 기출 문항 - 2017학년도 9월 평가원 나형 20번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선은 점 $(2, f(2))$를 지난다.

참고 기출 문항 - 2018학년도 6월 평가원 나형 20번

함수

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1\ (k>0)$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

삼차함수와 접선은 뭐다? 비율관계다!

삼차함수와 접선은 뭐다? 비율관계다!

참고 기출 문항 - 2018학년도 6월 평가원 나형 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오.

삼차함수와 접선은 뭐다? 비율관계다! + 이차함수의 대칭성

참고 기출 문항 - 2016년도 고2 11월 학력평가 나형 30번

좌표평면에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

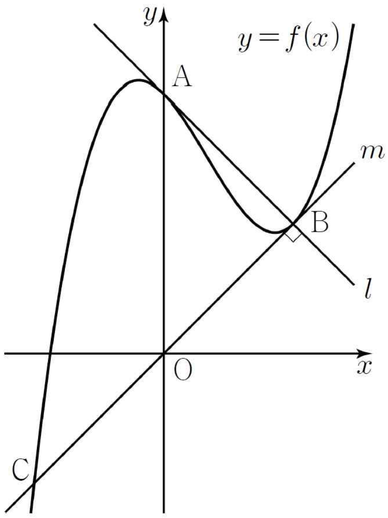
(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 27을 가진다.
(나) 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=-3$에서만 미분가능하지 않다.
(다) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오.

삼차함수와 접선은 뭐다? 비율관계다!

참고 기출 문항 - 2016학년도 사관학교 A형 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기를 구하시오. (단, $f(0)>0$이다.)



삼차함수와 접선은 뭐다? 비율관계다! + 수직인 두 접선 > 그래프를 통한 이해

참고 기출 문항 - 2020학년도 수능 나형 30번

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0, f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

삼차함수와 접선은 뭐다? 비율관계다! + 수직인 두 접선 확장판. > 그래프를 통한 이해

참고 기출 문항 - 2022학년도 6월 평가원 공통 22번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4, f'(1)=1, f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$x-f(x)=t$라고 놓으면 (가) 조건에서의 두 근을 α, β라고 했을 때 $t=\alpha, t=\beta$가 성립한다. 그러므로, $x-f(x)=\alpha$ 또는 $\beta \Rightarrow f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$이 성립한다. 이는 삼차함수와 직선의 관계를 묻는 것이다. 당연히 접선일 때부터 찾으시는 게 좋습니다.

수능완성 72쪽 22번

38 ▸ 21054-0172

사차함수 $f(x)=(x-1)^3(x-3)$과 이차함수 $g(x)=(x-k)^2+m$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $(f\circ g)(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\ge(f\circ g)(2)$가 성립한다.

모든 실수 k의 값의 곱은? (단, m은 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

합성함수를 그리는 사람은 없을 것이다. $g(x)=t$이면, $f(t)=0$을 만족하는 근은 $t=1$ 또는 $t=3$이므로 $g(x)=1$ 또는 $g(x)=3$이 서로 다른 세 실근을 가진다는 것이다. 따라서 접할 때를 묻는 것이다. (나) 조건은 사차함수의 비율 관계인 3:1을 이용하면 간단하다. 6평 22번 참고 문항.

참고 기출 문항 - 2022학년도 6월 평가원 공통 22번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4,\ f'(1)=1,\ f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$x-f(x)=t$라고 놓으면 (가) 조건에서의 두 근을 α,β라고 했을 때 $t=\alpha, t=\beta$가 성립한다. 그러므로, $x-f(x)=\alpha$ 또는 $\beta \Rightarrow f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$이 성립한다. 이는 삼차함수와 직선의 관계를 묻는 것이다. 당연히 접선일 때부터 찾으시는 게 좋습니다.

수능완성 77쪽 6번

06 ▸ 21054-0181

함수 $f(x)=(x+1)(x-2)$에 대하여 $-1\leq a\leq 0$에서 정의된 함수 $g(a)$가 다음과 같다.

$$g(a)=\int_{a}^{a+3}|f(x)|dx$$

함수 $g(a)$의 최댓값과 최솟값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

미적분의 기본 정리를 이용해서 도함수 $g'(a)$를 $f(a)$에 대하여 나타내고 관찰하는 것이 목적입니다. 이처럼 정적분으로 정의된 함수는 도함수를 통해 관계를 파악하는 것이 가장 많이 출제됩니다.

참고 기출 문항 - 2013학년도 수능 나형 21번

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

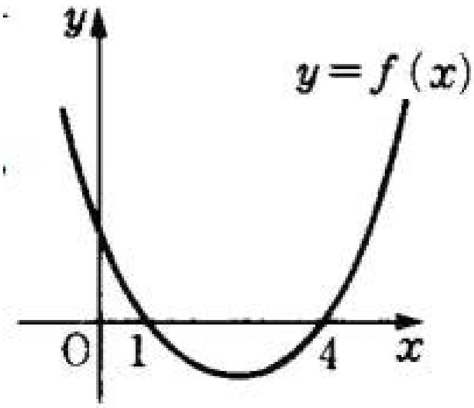
미적분의 기본 정리를 이용한 도함수 관찰

참고 기출 문항 - 1994학년도 수능

그림은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{x}^{x+1} f(t)dt$$

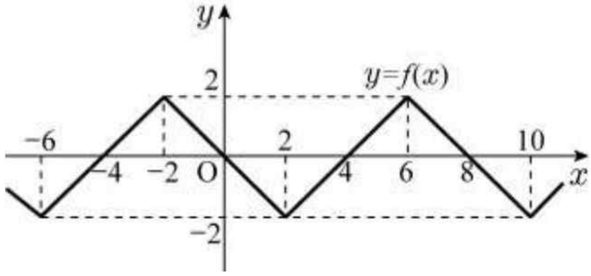
라 할 때, $g(x)$의 최솟값은 $g(a)$이다. a의 값을 구하시오.



미적분의 기본 정리를 이용한 도함수 관찰

참고 기출 문항 - 2010학년도 10월 학력평가 가형 9번

실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같다.



실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{x}^{x+2} f(t)dt$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

ㄱ. $g(-1)=0$
ㄴ. 함수 $g(x)$는 열린구간 $(-2, 2)$에서 감소한다.
ㄷ. $-4 \le x \le 6$에서 방정식 $g(x)=2$의 모든 실근의 합은 4이다.

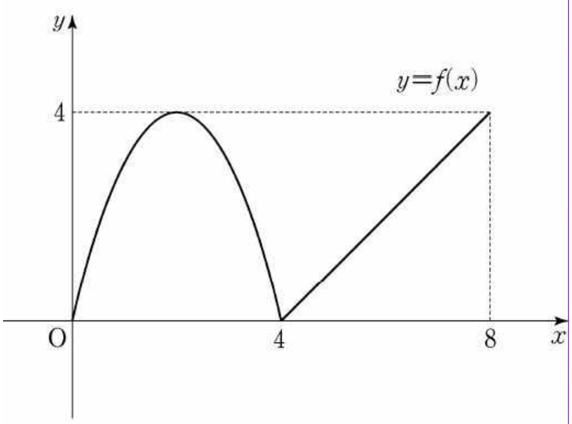
미적분의 기본 정리를 이용한 도함수 관찰

참고 기출 문항 - 2017학년도 9월 평가원 나형 29번

구간 $[0, 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8)\end{cases}$$

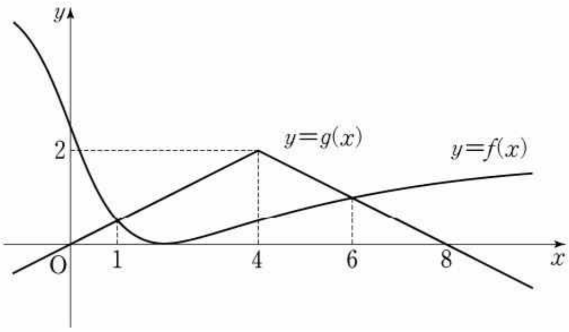
이다. 실수 $a\,(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.



미적분의 기본 정리를 이용한 도함수 관찰

참고 기출 문항 - 2017학년도 6월 평가원 가형 20번 변형

연속함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$의 그래프가 그림과 같다.



$\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$, $\int_0^6 f(x)dx=3$, $\int_0^8 f(x)dx=6$일 때, $0 \le a \le 8$인 a에 대해 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값을 구하시오.

미적분의 기본 정리를 이용한 도함수 관찰

수능완성 79쪽 12번

12 ▸ 21054-0187

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^x f(t)dt = g(x)(x-1) + a(x^2-1) + b$

(나) $g(x) = x^2 - x\int_0^1 f(t)dt$

함수 $f(x)$의 최솟값이 1일 때, $f(1)+g(-1)$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

정적분 함수에서 아래끝의 상수를 대입하는 것은 함수와 축의 교점을 찾는 것입니다. 그렇다면 조건 (가)는 항등식이니까 수치 대입을 통해 함수와 축의 교점을 하나 더 찾을 수 있지 않나요? 이는 (나) 조건과도 연결됩니다.

참고 기출 문항 - 2014학년도 9월 평가원 A형 28번

다항함수 $f(x)$에 대하여
$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2x\int_0^1 f(t)dt$$
일 때, $f(0)=a$라 하자. $60a$의 값을 구하시오.

항등식에서 조건의 표현을 통한 수치 대입.

참고 기출 문항 - 2020학년도 사관학교 나형 27번

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{1}^{x}(2x-1)f(t)dt=x^3+ax+b$$

일 때, $40\times f(1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

참고 기출 문항 - 2022학년도 9월 평가원 공통 11번

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_{1}^{x}f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_{0}^{1}f(t)dt$일 때, $a+f(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

항등식에서 수치 대입으로 교점 찾기.

항등식에서 조건의 표현을 통한 수치 대입.

참고 기출 문항 - 2022학년도 사관학교 공통 22번

일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

항등식에서 수치 대입으로 교점 찾기 + 접할 때부터 관찰 + 비율 관계

수1-실모편

수능완성 실모 2회 21번

21 ▸ 21054-1051

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 공차가 3인 등차수열이다.
(나) $a_{20}=32$

$\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

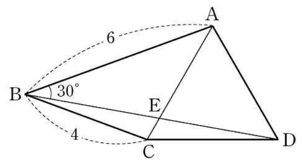
(가) 조건에 항 몇 개만 대입해서 나열하거나 $n+1$ 평행이동시키면 $a_{n+2}-a_n=3$임을 알 수 있습니다. 20번째 항을 주었으니, 역추적하시면 되겠습니다. 초항이 있으니 홀수 항들은 간단하게 구할 수 있겠구요!

수능완성 실모 3회 21번

21 ▸ 21054-1081

그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선이 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\angle ABE=30°$이고 삼각형 ACD가 정삼각형일 때, 삼각형 AED의 외접원의 지름의 길이는 $\frac{q(\sqrt{21}-3)}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



이 문제는 도형이 어려운 학생들에게는 꽤나 까다로울 것이다. $\overline{AD}$라는 한 변에서 뻗어나가는 각은 $30°$인 $\angle ABD$와 $60°$인 $\angle ACD$가 있다. 두 각의 관계를 보면, 원주각과 중심각이 떠오르지 않는가? $\overline{AD}$가 현인 외접원이 떠오를 것이다. 이런 걸 어떻게 푸냐고? 앞으로 원주각을 이용하는 도형 문제가 나오면, 원을 지운 채 다시 풀어봐라. 항상 역과정으로도 해볼 줄 알아야 한다.

수능완성 실모 4회 11번

11 ▸ 21054-1101

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3=3$, $b_2=6$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+3}-a_{n+1}=b_{n+2}-b_n=b_{n+3}-b_{n+1}$$
이다.

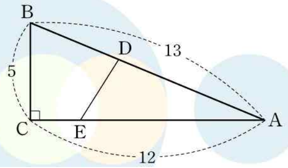
$\sum_{k=1}^{8}(a_{k+1}-b_{k+1})=48$일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_{2k}-b_{2k+1})$의 값은? [4점]

① 118 ② 120 ③ 122
④ 124 ⑤ 126

수능완성 실모 5회 21번

21 ▸ 21054-1141

그림과 같이 $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=12$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB 위의 한 점 D와 변 AC 위의 한 점 E에 대하여 선분 DE가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 선분 DE의 길이의 최솟값을 m이라 하자. m^2의 값을 구하시오. [4점]



이 문제는 (나)의 점화식을 (가) 조건에 맞게 두 개를 연립, <보기> 다음의 조건에 맞게 두 개를 연립하면 풀리는 문제입니다. 항상 조건 독해하실 때 조건 사이의 관계를 관찰하는 것은 좋은 습관입니다.

직각삼각형을 주었으니 각 A의 사인, 코사인 값은 꽁으로 얻었다. 우리가 구하고자 하는 변은 m, 게다가 m^2이 요구사항이므로 $\overline{DE}$의 대각인 각 A를 포함하는 삼각형에서 넓이가 15라는 조건과 코사인 법칙 조건을 이용하면 답은 쉽게 나온다.

수능완성 실모 5회 20번

20 ▸ 21054-1140

공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때 $S_{15}=S_{10}$이 성립한다. $a_n+25>0$을 만족시키는 n의 최댓값이 19일 때, $\sum_{k=1}^{20}|a_k|$의 값을 구하시오. [4점]

등차수열의 합은 이차함수입니다. 대칭성이 보이네요.

수2-실모편

수능완성 실모 1회 22번

22 ▸ 21054-1022

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 0을 갖는다.
> (나) $g'(x)=f(x)+(x-2)f'(x)$
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{3}{4}$을 갖는다.

$f(1)+g(1)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(나) 조건은 대놓고 $g(x)$가 무엇인지를 알려주는 조건이다. 이는 수능특강과 기출에도 동일하게 출제되었으니, 참고 기출과 연결 지어서 공부하자.

참고 기출 문항 - 2020학년도 9월 평가원 나형 21번

함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대해 함수 $g(x)$를
$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$
라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 모두 고르시오.(단, a, b는 상수이다.)

> ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.
> ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)dx=-1$이다.
> ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이 문제 ㄱ은 사실상 ㄷ을 맞히라고 출제자가 배려한 조건이다. ㄷ은 $g(x)$에 대한 사잇값 정리보다는 $h'(x)$에 대한 평균값 정리, 그중 가장 기본적인 상태인 롤의 정리에 대한 묻는 문제이다.

참고 기출 문항 - 올해 수능특강 86쪽 레벨 3 1번

다항함수 $f(x)$와 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

(가) $f(1)=3, g(0)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)+xf'(x)=3x^2-6x+4+g'(x)$이다.
(다) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(p, 0)$ $(p \neq 0)$에서 x축에 접한다.

(나) 조건이 똑같쥬? + 계수 비교 좀만 잘하시면 나머지 조건이랑 연결해서 쉽게 풀 수 있습니다.

수능완성 실모 2회 22번

22 ▸ 21054-1052

$f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 다음과 같이 정의한다.

$$g_n(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ f(1) & (1\le x<2) \\ f(x-1) & (2\le x<3) \\ f(2) & (3\le x<4) \\ f(x-2) & (4\le x<5) \\ \vdots & \vdots \\ f(n) & (2n-1\le x<2n) \\ f(x-n) & (x\ge 2n) \end{cases}$$

함수 $g_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$과 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립할 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g_n(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $b_n=a_{n+p}$일 때, 수열 $\{b_n\}$이 등차수열을 이루게 하는 자연수 p의 최솟값은 5이다.

(나) $\int_0^{q+1} g_6(x)\,dx=\int_0^{q} g_5(x)\,dx$를 만족시키는 자연수 q의 최솟값은 11이다.

(다) $\int_0^{20} g_6(x)\,dx-\int_0^{14} f(x)\,dx=21$

수능날 마주치지 않길 기도합시다. 가 아니라, 각 구간의 양 끝이 미분이 어느 순간 가능한 지점이 있다면, 등차수열이 나올 수 없겠죠? a_6부터 등차수열이어야 하므로 $f'(6)=0$입니다. 이처럼 차근차근 (나) 조건에서도 간단하게 $\int_{11}^{12} f(6)dx$가 0임을 알아내고 함수식과 그림을 적당히 활용해서 (다) 조건이 의미하는 바만 알아내면 됩니다.

수능완성 실모 3회 22번

22 ▸ 21054-1082

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만난다.

(나) 방정식 $f(x)=-k$ $(5<k<6)$은 중근을 가진다.

자연수 n에 대하여 집합 S_n을

$$S_n=\{a\,|\,a\text{는 함수 } |f(x)+n|\text{의 극댓값}\}$$

이라 하자. 집합 $S_1\cup S_2\cup S_6$의 모든 원소의 합이 17이 되도록 하는 상수 k에 대하여 $100k$의 값을 구하시오. [4점]

22번 치고 너무 쉬운 문제라서 당황스럽다. 절댓값함수의 극댓값은 '기존의 극댓값 또는 원래는 극솟값이던 것이 뒤집어 올려지면서 극대가 되는 경우' 단 두 가지밖에 없다. 합집합에서 포함배제 원리를 이용하도록 했다면 더 끔찍하고 악랄한 문제가 나올 수 있을 것 같다. 미래에는 나오지 않을까?

수능완성 실모 4회 15번

15 ▸ 21054-1105

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=1$
> (나) $f'(0)=f'(1)=-3$
> (다) $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지며
> $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이다.

$f(2)$의 값은? [4점]

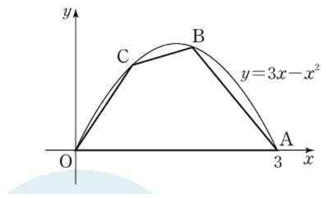
① -21 ② -19 ③ -17
④ -15 ⑤ -13

삼차함수에서 (가), (나) 조건을 통해 변곡점이 $x=\frac{1}{2}$임을 알고, 접선의 방정식을 뺀 차의 함수를 나타낸 후 (다)에서 극값의 차와 이차방정식의 근과 계수의 관계를 통해 $f(x)$의 최고차항 계수에 대한 이차방정식을 풀면 -2또는 -6이 나올 것이다. 도함수 $f'(x)$가 서로 다른 두 실근을 지녀야 하므로 판별식이 양수임을 이용하면 최고차항 계수를 결정할 수 있다.

수능완성 실모 4회 19번

19 ▸ 21054-1109

그림과 같이 두 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(3, 0)$과 곡선 $y=3x-x^2$ $(0<x<3)$ 위를 움직이는 서로 다른 두 점 B, C에 대하여 사각형 OABC의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 B, C의 좌표를 각각 $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{C}(\gamma, \delta)$라 하자. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하시오. (단, $0<\gamma<\alpha<3$) [3점]



사각형의 넓이는 삼각형으로 구한다. 점 B의 x좌표가 α이면, 점 C에서의 접선의 기울기가 직선 $\overline{OB}$의 기울기와 같을 때, 넓이가 최대가 되고, 이때의 점 C의 x좌표는 $\frac{\alpha}{2}$이다. 한 마디로, 접선일 대가 최대이고 이차함수의 평균값정리에 의해 평균이 접점일 때다.

수능완성 실모 4회 22번

22 ▸ 21054-1112

15 이하인 두 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$과 곡선 밖의 점 $\mathrm{P}(b, 0)$이 있다. 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 세 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 p, 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 두 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

삼차함수에 그을 수 있는 접선의 개수는 평가원에도 1번, 학평에서는 여러 번 출제된 소재이다. 슬슬 나올 때가 되기도 했고, 출제되면 어려운 소재이니 기출과 연결지어 공부해보자. 접선의 개수는 1. 접선의 방정식의 실근의 개수 2. 그래프를 통한 관찰 이 두 가지 내에서 반드시 풀린다.

참고 기출 문항 - 2015년도 10월 학력평가 A형 29번

함수 $f(x)=x^3+3x^2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정수 a의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.

(가) 점 $(-4, a)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 세 개 있다.
(나) 세 접선의 기울기의 곱은 음수이다.

접선의 개수와 부호. 세 기울기의 곱이 음수이니, 음수인 기울기가 홀수 개 > 1개 또는 3개일 것이다. 이는 그림으로 관찰하거나 접선의 방정식을 풀면 된다.

참고 기출 문항 - 2019학년도 수능 나형 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,0)$에서의 접선은 모두 x축이다. (나) 점 $(2,0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다. (다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

특정한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수가 2개라는 것은 매우 특이한 조건이다. 삼차함수 위의 점이거나, 아니면 변곡접선 위의 점이니까.

참고 기출 문항 - 2019년도 7월 학력평가 나형 21번

좌표평면 위의 점 $(0,t)$를 지나고 곡선

$$y=x^3-ax^2+3x-5 \ (a\text{는 자연수})$$

에 접하는 서로 다른 모든 직선의 개수를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$에 대해 합성함수 $g(t)=(f\circ f)(t)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a의 최솟값을 m이라 할 때, $m+g(m)$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 t에 대하여 $g(t)>1$ (나) 함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

변곡접선과 합성함수의 그림을 그리는 것에 대한 이해가 없으면 절대 풀 수 없는 문제이다. 변곡접선 위에서는 그을 수 있는 접선의 개수 2개임을 명심하자. 나형치고는 매우 어려운 문제.

수능완성 실모 5회 15번

15 ▸ 21054-1135

삼차함수 $f(x)=x^3+kx$에 대하여 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0이 아닌 임의의 실수 a에 대하여

$$f'(a)=\frac{f(a)-f(g(a))}{a-g(a)}$$

(나) 방정식 $f'(x)\times f'(g(x))=k^2$의 실근 중 0이 아닌 두 실근의 곱은 $-\frac{5}{4}$이다.

0이 아닌 실수 x에 대하여 $g(x)\neq x$일 때, $g(k)$의 값은? (단, k는 음의 상수이다.) [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

(가) 조건은 $(a,f(a))$에서의 미분계수와 $(a,f(a)),(g(a),f(g(a))$ 사이의 평균변화율이 같다고 제시하는 것이다. 이를 그래프로 나타내보면 삼차함수의 비율 관계에 의해 $g(a)=-2a$임을 알 수 있다. 나머지는 매우 쉽다.