제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\log_3 x = 3$일 때, x의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

$x = 3^3 = 27$

4

2. $\int_0^3 (x+1)^2 dx$의 값은? [2점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

4

$\left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_0^3 = \frac{1}{3}(4^3 - 1^3) = 21$

3. 함수 $y = \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$의 주기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{\pi} = 1$

3

4. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 $n^2 - 5n$일 때, $a_1 + d$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

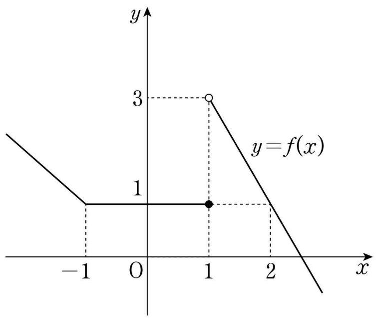
$S_n = n^2 - 5n$ $S_1 = a_1 = -4$

$a_n = 2n - 6$

2

$a_1 = -4$, $d = 2$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.) [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

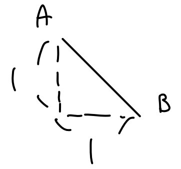
$1+a+b=0$

②

6. 곡선 $y=6^{-x}$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, 6^{-a})$, $\mathrm{B}(a+1, 6^{-a-1})$에 대하여 선분 AB는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선이다. 6^{-a}의 값은? [3점]

① $\frac{6}{5}$　② $\frac{7}{5}$　③ $\frac{8}{5}$　④ $\frac{9}{5}$　⑤ 2

①



$6^{-a}-6^{-a-1}=1$

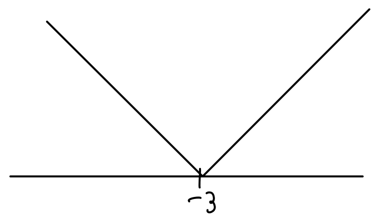
$6^{-a}=k$　$\frac{5}{6}k=1$

$k=\frac{6}{5}$

7. 두 함수 $f(x)=|x+3|$, $g(x)=2x+a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

③



$g(-3)=0$

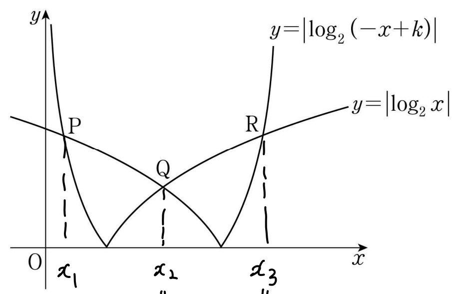
$-6+a=0$

8. 2보다 큰 상수 k에 대하여 두 곡선 $y=|\log_2(-x+k)|$, $y=|\log_2 x|$가 만나는 세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하자. $x_3-x_1=2\sqrt{3}$일 때, x_1+x_3의 값은? (단, $x_1<x_2<x_3$) [3점]

$\begin{array}{c} \| \\ k \end{array}$

3

① $\frac{7}{2}$　② $\frac{15}{4}$　③ 4　④ $\frac{17}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$



$x_1 = \frac{k}{2}-\sqrt{3}$　$x_2 = \frac{k}{2}$　$x_3 = \frac{k}{2}+\sqrt{3}$

$y=\log_2(-x+k)$, $y=\log_2 x$ 는 $x=\frac{k}{2}$ 대칭

$\log_2 x_3 = -\log_2(-x_3+k)$

$\frac{k}{2}+\sqrt{3} = \frac{1}{\frac{k}{2}-\sqrt{3}}$　　$\frac{k^2}{4}-3=1$

$k^2=16$

$k=4$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+a_{n+1}=2n$$

을 만족시킬 때, a_1+a_{22}의 값은? [4점]

5

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

$a_n+a_{n+1}=2n$　　$a_{n+2}-a_n=2$

$a_{n+1}+a_{n+2}=2n+2$

$a_1+a_{22}=$

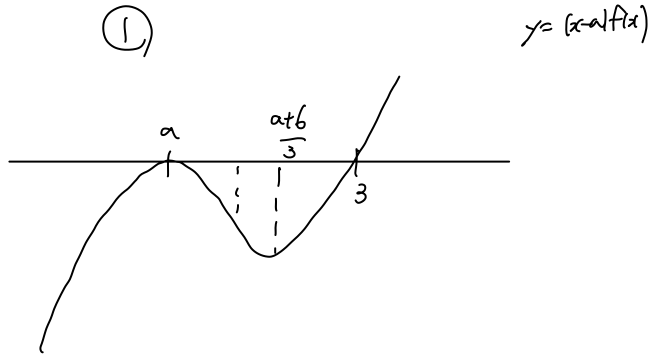
$a_1=a$　　$a+b=2$　　$a+b+2\times 10=$

$a_2=b$　　$2+20=22$

10. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3보다 작은 실수 a에 대하여 함수 $g(x)=|(x-a)f(x)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

1



$f(x)=(x-a)(x-3)$

$-32=\left(\frac{a+6}{3}-a\right)^2\left(\frac{a}{3}-1\right)$

$-32=4\left(\frac{a}{3}-1\right)^3$　　$\frac{a}{3}-1=-2$

$a=-3$

$f(x)=(x+3)(x-3)$

$f(4)=16-9=7$

11. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$는

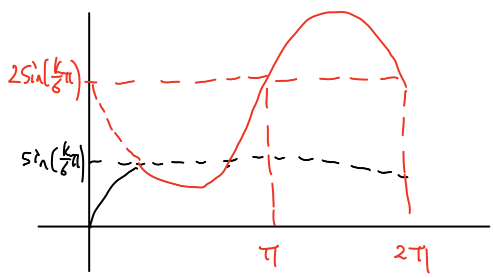
$$f(x)=\begin{cases} \sin x & \left(0 \le x \le \dfrac{k}{6}\pi\right) \\ 2\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)-\sin x & \left(\dfrac{k}{6}\pi < x \le 2\pi\right) \end{cases}$$

$y=\sin x$ 를 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 에 대해 대칭시킨 함수

이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은? [4점]

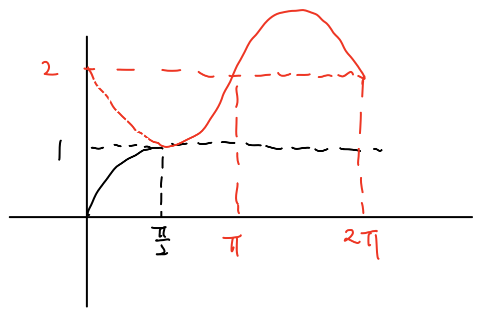
4

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



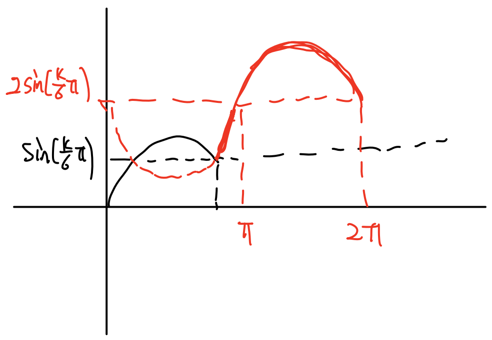
$k<3$

$a_k=2$



$k=3$

$a_k=1$



$3<k\le 5$

$a_k=2$

$2\times2+1+2\times2=9$

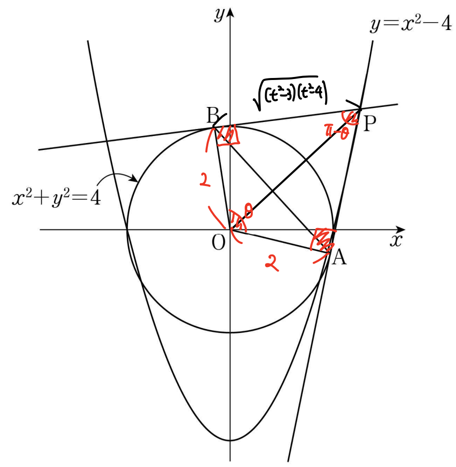
12. 곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.) [4점]

2

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2



$\overline{OP}^2=\sqrt{t^2+(t^2-4)^2}$

$\overline{PB}^2=\overline{OP}^2-4$

$=\sqrt{(t^2-3)(t^2-4)}$

$S(t)=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\theta$

$T(t)=\frac{1}{2}\cdot(t^4-7t^2+12)\cdot\sin(\pi-\theta)$

구하려는 형태에 $\frac{T(t)}{S(t)}$가 포함되어 있기에 $\sin\theta$가 지워질 것을 염두에 두었다.

미적분 선택자라면 180628에 볼 수 있는 아이디어이지만, 그렇지 않다면 생소할 수 있다.

$\lim_{t\to2+}\dfrac{\frac{1}{2}(t^2-3)(t-2)(t+2)}{2(t-2)}=1$

$\lim_{t\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(t^4-7t^2+12)}{2(t^4-2)}=\frac{1}{4}$

$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a^2 \le 3b$

ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 ~~두~~ 실근을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=$ ~~1~~이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1

$g'(x)=3x^2+2ax+b$

$a^2-3b\le 0$

$g(x)$ 역함수 존재

$2f(x)=x^3+ax^2+bx+c-(-x^3+ax^2-bx+c)$

$f(x)=x^3+bx$ $f'(x)=3x^2+b$

선지 (ㄱ)으로 인해 $0\le b$ 이므로

$f'(x)=0$은 1개 이하의 실근을 갖는다.

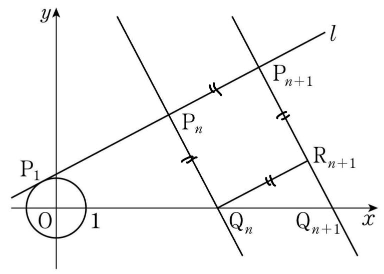
$f'(x)=0 \Rightarrow a=0,\ b=0$

$g'(1)=3$

14. 모든 자연수 n에 대하여 직선 $l: x-2y+\sqrt{5}=0$ 위의 점 P_n과 x축 위의 점 Q_n이 다음 조건을 만족시킨다.

• 직선 P_nQ_n과 직선 l이 서로 수직이다. • $\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nP_{n+1}}$이고 점 P_{n+1}의 x좌표는 점 P_n의 x좌표보다 크다.

다음은 점 P_1이 원 $x^2+y^2=1$과 직선 l의 접점일 때, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 삼각형 OQ_nP_n의 넓이를 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



자연수 n에 대하여 점 Q_n을 지나고 직선 l과 평행한 직선이 선분 $P_{n+1}Q_{n+1}$과 만나는 점을 R_{n+1}이라 하면 사각형 $P_nQ_nR_{n+1}P_{n+1}$은 정사각형이다.

직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\overline{R_{n+1}Q_{n+1}}=\boxed{(가)}\times\overline{P_nP_{n+1}}$$

이고

$$\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}=\left(1+\boxed{(가)}\right)\times\overline{P_nQ_n}$$

이다. 이때, $\overline{P_1Q_1}=1$이므로 $\overline{P_nQ_n}=\boxed{(나)}$이다.

그러므로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\overline{P_1P_n}=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{P_kP_{k+1}}=\boxed{(다)}$$

이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여 삼각형 OQ_nP_n의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{P_nQ_n}\times\overline{P_1P_n}=\frac{1}{2}\times\boxed{(나)}\times\left(\boxed{(다)}\right)$$

이다.

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nP_{n+1}}$

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(6p)+g(8p)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$$(다)=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{P_kQ_k}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}$$

5

$$f(3)+g(4)=\frac{9}{4}+\left(2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-2\right)=7$$

해석에 따라 다른 답이 나올 수 있다.

15. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)dt+5 & (x<c)\\ \left|\displaystyle\int_0^x f(t)dt-\frac{13}{3}\right| & (x\ge c)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1~~일 때~~, 이고 함수 g(x)가 연속함수일 때, $g(1)$의 최댓값은? [4점]

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

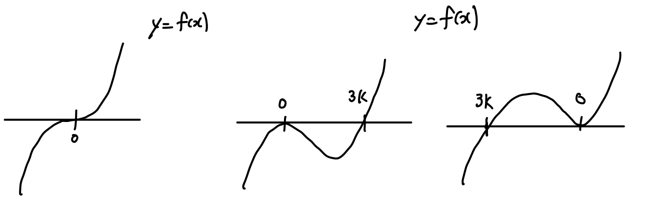
5

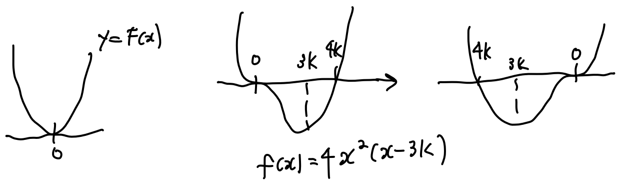
$$\int_0^c f(t)\,dt+5=-\int_0^c f(t)\,dt-\frac{13}{3}$$

$$\int_0^c f(t)\,dt=-\frac{1}{3}$$

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

$F(0)=0 \quad F'(x)=f(x)$





(X)

$f(x)=4x^2(x-3k)$

$f(3k)=-\frac{1}{3}$

$k=\frac{1}{3}$ or $k=-\frac{1}{3}$

$C=1$ $\qquad$ $C=-1$

$g(1)=-\frac{1}{3}+5=\frac{14}{3}$ $\qquad$ $g(1)=\left|\int_0^1 f(t)dt-\frac{13}{3}\right|$

$=2$

$\int_0^1 f(t)\,dt$

$=\int_0^1 4x^2(x+1)\,dx$

$=\left[x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1=\frac{7}{3}$

단답형

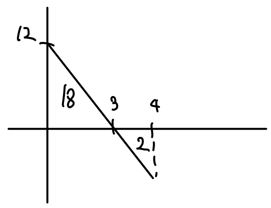
16. 함수 $f(x)=2x^2+ax+3$에 대하여 $x=2$에서의 미분계수가 18일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=4x+a$

$a+8=18$

10

17. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=12-4t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [3점]

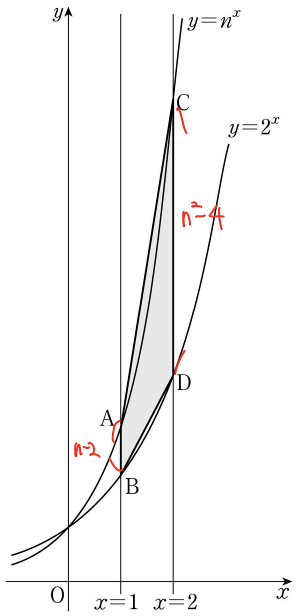


$18+2=20$

20

$n \ge 3$

18. 그림과 같이 3 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=n^x$, $y=2^x$이 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=n^x$, $y=2^x$이 직선 $x=2$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사다리꼴 ABDC의 넓이가 18 이하가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]



18

$3+4+5+6$

$=18$

$S=\frac{1}{2}(n^2+n-6)$

$\frac{1}{2}(n^2+n-6) \le 18$

$n^2+n-42 \le 0$

$\therefore 3 \le n \le 6$

19. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2}=\begin{cases} a_n-3 & (n=1, 3) \\ a_n+3 & (n=2, 4) \end{cases}$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다. 주기 6

$\sum_{k=1}^{32} a_k=112$일 때, a_1+a_2의 값을 구하시오. [3점]

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a	b	$a-3$	$b+3$	$a-6$	$b+6$

$5 \times \sum_{k=1}^{6} a_k \quad + a_1+a_2 = 112$

7

$16(a+b)=112 \qquad a+b=7$

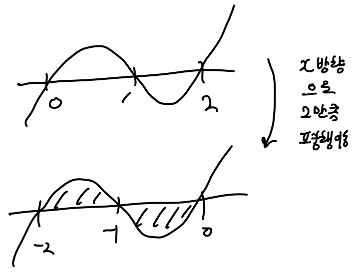
20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

$f(1-x)+f(1+x)=0$

$f(x)$는 $(1,0)$ 대칭

$f(x)=x(x-1)(x-2)$

$f(x)+6x^2=x(x+1)(x+2)$



$S=2\int_0^1 f(x)\,dx$

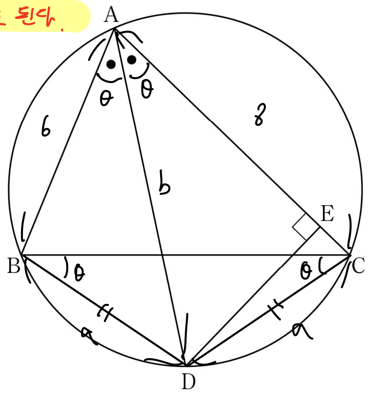
$=2\int_0^1 x^3-3x^2+2x\,dx=\frac{1}{2}$

$4\times\frac{1}{2}=2$

2

21. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점]

정 안 보이면 주어진 조건이 적기에 ∠BAC=ㅍ로 잡고 풀어도 된다.



정확한 길이가 나오는 것이 아닌 문자들의 상쇄로 목표값이 나오게 하는 문제이다. 기출 등에서 잘 나오지 않는 형태이니 너무 스트레스 받지 말자.

$\overline{AD}=b$ $\overline{AE}=b\cos\theta$

△ABD 코사인 법칙 $a^2=b^2+36-12b\cos\theta$

△ADC 코사인법칙 $a^2=b^2+64-16b\cos\theta$

7

$4b\cos\theta=28$

$b\cos\theta=7$

22. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$$
> 이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$g(3a)$의 값을 구하시오. [4점]

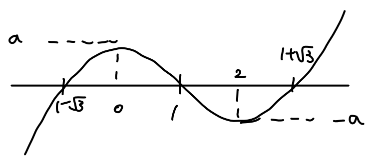
$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-a & x>2 \text{ or } x<0 \\ -|f(x)|+a & 0<x<2 \end{cases}$$

$|f(0)|=a$, $|f(2)|=a$ ⇐ $g(x)$는 연속

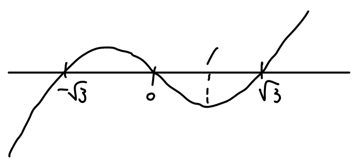
$f(0)f(2)>0$ 이라면 $g(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$ 중 적어도 한 곳에서 미분불가능하다.

(그래프 그려서 직접 확인하길 바란다.)

$y=f(x)$



$y=f(x+1)=x(x^2-3)$



$f(2)=-2=-a$

$a=2$

$g(6)=|f(6)|-2$

$=5\times22-2=108$

108

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{5}{12}\right)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$60 \times \frac{5}{12} = 25$ ④

24. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6} \quad \frac{3}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$P(A^c) = \frac{2}{3}$, $P(A) = \frac{1}{3}$ ②

$P(B) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

25. 같은 종류의 공책 10권을 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 줄 때, A와 B가 각각 2권 이상의 공책을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 공책을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 76 ② 80 ③ 84 ④ 88 ⑤ 92

3

$a + b + c + d = 10$

$\geq 2 \quad \geq 2 \quad \geq 0 \quad \geq 0$

${}_{9}C_{3} = 84$

26. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 두 수 a, b의 최대공약수가 홀수일 확률은? [3점]

여사건 이용 : 최대공약수 짝수

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

여사건 : a, b에 각각 2, 4, 6 가능

$1 - \frac{3 \times 3}{36} = \frac{3}{4}$

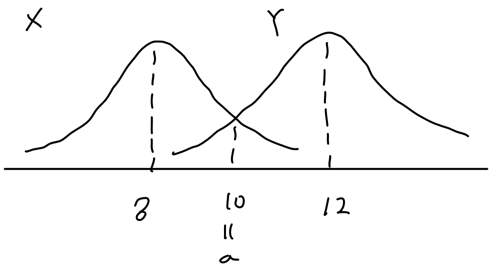
5

27. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8, 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(12, 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 a라 할 때, $\mathrm{P}(8 \le Y \le a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1359 ② 0.1587 ③ 0.2417
④ 0.2857 ⑤ 0.3085

1



$P(8 \le Y \le 10) = P(-2 \le Z \le -1) = 0.1359$

28. 집합 $X=\{x \mid x$는 8 이하의 자연수$\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f가 4 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(2n-1)<f(2n)$일 때, $f(1)=f(5)$일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{5}{28}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

2

$f(1) < f(2)$
$f(3) < f(4)$
$f(5) < f(6)$
$f(7) < f(8)$

$$\frac{({}_8C_2)^2 \times \left(\sum_{k=1}^{7} k^2\right)}{({}_8C_2)^4} = \frac{5}{28}$$

f(1), f(5) 값	f(2), f(6) 선택시
1	2 ~ 8
⋮	⋮
6	7 ~ 8
7	8

단답형

29. 숫자 1, 2, 3 중에서 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 6개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 같은 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

_ _ _ V _ _ V

숫자개수 조합		숫자분배		V에 들어가는 숫자의 종류수		나머지 자리	
(4,1,1)	⇒	$\frac{3!}{2!}$	×	1	×	$\frac{4!}{2!}$	= 36
(3,2,1)	⇒	3!	×	[1 × $\frac{4!}{3!}$ + 1 × $\frac{4!}{2!}$]			= 96
(2,2,2)	⇒	$\frac{3!}{3!}$	×	3	×	$\frac{4!}{2!2!}$	= 18

$36+96+18 = 150$

150

30. 주머니에 12개의 공이 들어 있다. 이 공들 각각에는 숫자 1, 2, 3, 4 중 하나씩이 적혀 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 4개의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, 확률변수 X는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\mathrm{P}(X=4)=16\times\mathrm{P}(X=16)=\frac{1}{81}$
>
> (나) $\mathrm{E}(X)=9$

$\mathrm{V}(X)=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

한번 던질 때 확률변수 Y

Y	1	2	3	4
$P(Y=y)$	$\frac{1}{3}$	p	q	$\frac{1}{6}$

$p+q=\frac{1}{2}$

표본크기 4인 표본평균 $\bar{Y}$

$X = 4\bar{Y}$

$E(X) = 4E(\bar{Y}) = 4E(Y) = 9$

$E(Y) = \frac{9}{4}$ $\quad \begin{cases} 2p+3q = \frac{5}{4} \\ p+q = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow p=\frac{1}{4},\ q=\frac{1}{4}$

$V(X) = 16V(\bar{Y}) = 4V(Y)$

$V(Y) = E(Y^2)-\{E(Y)\}^2 = \frac{25}{4}-\frac{81}{16} = \frac{19}{16}$

$V(X) = 4\times\frac{19}{16} = \frac{19}{4}$

23

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\int_{2}^{4} \frac{6}{x^2}dx$의 값은? [2점] 1

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$\left[-\frac{6}{x}\right]_2^4 = -\frac{3}{2}+3 = \frac{3}{2}$

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n}{n}=0$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=4$

$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{1}{n}}=3$

25. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>2)$에서의 위치 $(x,\,y)$가

$$x=t\ln t,\ \ y=\frac{4t}{\ln t}$$

이다. 시각 $t=e^2$에서 점 P의 속력은? [3점]

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{11}$

$p\left(t\ln t,\ \frac{4t}{\ln t}\right)$

$v\left(\ln t+1,\ \frac{4\ln t-4}{(\ln t)^2}\right)$ ④

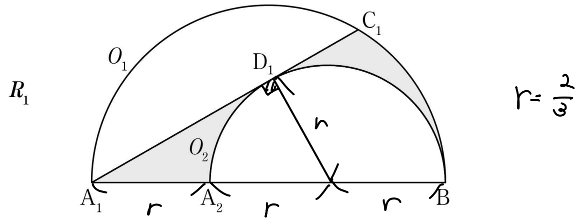
$t=e^2$

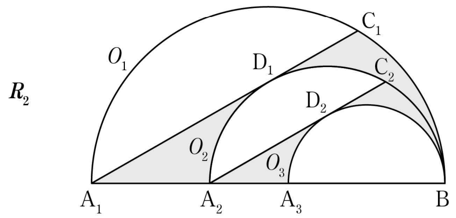
$v(3,\ 1)$

26. 그림과 같이 길이가 2인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 O_1이 있다. 호 BA_1 위에 점 C_1을 $\angle BA_1C_1=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_2B를 지름으로 하는 반원 O_2가 선분 A_1C_1과 접하도록 선분 A_1B 위에 점 A_2를 잡는다. 반원 O_2와 선분 A_1C_1의 접점을 D_1이라 할 때, 두 선분 A_1A_2, A_1D_1과 호 D_1A_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 두 호 BC_1, BD_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 BA_2 위에 점 C_2를 $\angle BA_2C_2=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_3B를 지름으로 하는 반원 O_3이 선분 A_2C_2와 접하도록 선분 A_2B 위에 점 A_3을 잡는다. 반원 O_3과 선분 A_2C_2의 접점을 D_2라 할 때, 두 선분 A_2A_3, A_2D_2와 호 D_2A_3으로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 두 호 BC_2, BD_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]





① $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{10}$ ② $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$ ③ $\frac{8\sqrt{3}-\pi}{20}$

④ $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{10}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}-\pi}{20}$

②

초항 : $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\pi=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}\right)=$

$\frac{9\sqrt{3}}{20}-\frac{\pi}{10}=\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$

27. 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$이다. $f(x)$는 감소함수
(나) 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이고 최솟값은 -2이다. $f(-1)=1$, $f(3)=-2$

$\int_{-1}^{3} f(x)dx = 3$일 때, $\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)dx$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx$ $\qquad x=f(t)$, $dx = f'(t)\,dt$

$= -\int_{-1}^{3} t f'(t)\,dt$

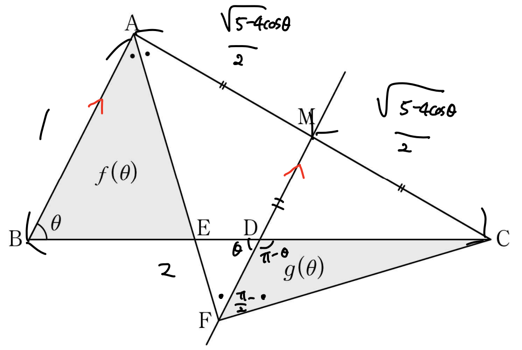
$= \left[-t f(t)\right]_{-1}^{3} + \int_{-1}^{3} f(t)\,dt$

$= -3f(3) - f(-1) + 3 = 8$

5

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\angle BAC$의 이등분선이 두 직선 BC, DM과 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\angle CBA = \theta$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \pi$) [4점]

$\overline{AC}^2 = 5 - 4\cos\theta$



△CMD, △CAB 1:2 닮음

$\overline{CD}=1$

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

3

$\overline{BE} = 2 \times \frac{1}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

$\overline{DF} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}} = \frac{1-\overline{BE}}{\overline{BE}} = \frac{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}{2} - 1$

△ABE ∽ △FDE

$g(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}{2} - 1\right)\sin\theta$

$f(\theta) = \frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

$\frac{1}{4}\lim_{\theta\to 0} \frac{\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-1\right)\left(\sqrt{5-4\cos\theta}+1\right)}{\theta^2}$

$= \frac{1}{4}\lim_{\theta\to 0} \frac{4-4\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$

단답형

주기 $\frac{2\pi}{a}$

29. 함수 $f(x)=\sin(ax)\ (a\neq 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)dx \ge \frac{1}{2}$

(나) $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^{3\pi}|f(x)+t|dx=\int_0^{3\pi}|f(x)-t|dx$$

이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)dx = \left[-\frac{1}{a}\cos ax\right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{2}{a}$

$\frac{2}{a}\ge\frac{1}{2}$ ∴ $0<a\le 4$

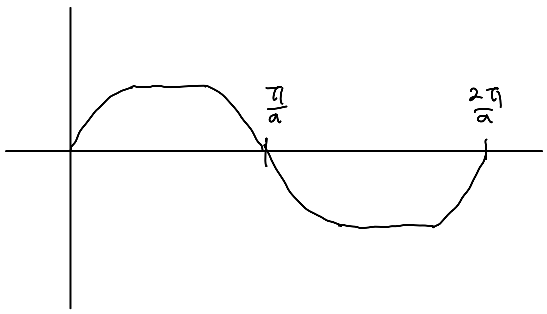
$\int_0^{3\pi} |f(x)+t|-|f(x)-t|\,dx = 0$

$g(x)=|f(x)+t|-|f(x)-t|$

$-1\le \sin ax < -t$ $-2t$

$-t\le \sin ax<t$ $2\sin ax$

$t<\sin ax\le 1$ $2t$



$3\pi = \frac{2n}{a}\pi$, $a=\frac{2}{3}n$

$0<\frac{2}{3}n\le 4$ $\sum_{n=1}^{6}\frac{2}{3}n = \frac{2}{3}\times 21 = 14$

$0<n\le 6$

14

30. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$

(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)$는 원점 대칭

$f(0)=0$

$f^{-1}(0)=0$

$g(2)=g(0)=0 \rightarrow f(2)=f^{-1}(2)$ ↓ $f(2)=-2$

⇒ 18년 10월 가형 21번과 동일한 Idea 이다.

설명

만약 $f(2)=f^{-1}(2)=k$ $(k\neq -2)$ 라면 $f(x)$가 원점대칭 이므로 $f(-2)=-k$ 이다.

$f(k)=2$, $f(-2)=-k$ 의 기울기는 1 인데 $f(x)$는 감소함수이므로 모순이다. 따라서 $f(2)=-2$ 이다.

$f(2)=-\frac{8a+2b}{5}=-2$

$4a+b=5$

$g'(2)=f'(2)-\frac{1}{f'(-2)}=f'(2)-\frac{1}{f'(2)}$

($f'(x)$는 우함수! $g'(x)$도 우함수!)

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(-2)f'(2)=\left(f'(2)-\frac{1}{f'(2)}\right)f'(2)=\{f'(2)\}^2-1$

$f'(2)=k$

$k-\frac{1}{k}=-5k^2+5$

$5k^3+k^2-5k-1=0$

$(k-1)(k+1)(5k+1)=0$

∴ $k=-1$ or $k=-\frac{1}{5}$

$f'(x)=-\frac{(3ax^2+b)(x^2+1)-(ax^3+bx)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$k=-1$ 일때

$1=\frac{5\times(12a+b)+4\times(-8a-2b)}{25}$

$25=28a-3b$, $5=4a+b$ → $a=1$, $b=1$ 모순

$k=-\frac{1}{5}$ 일때

$5=28a-3b$, $5=4a+b$ → $a=\frac{1}{2}$, $b=3$

$4\left(3-\frac{1}{2}\right)=10$

10

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(m-2,\ 3)$과 $\vec{b}=(2m+1,\ 9)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은? [2점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

$m-2 : 3 = 2m+1 : 9$

③

$3 \times (m-2) = 2m+1$

$m = 7$

24. 좌표공간의 두 점 $A(-1,\ 1,\ -2)$, $B(2,\ 4,\ 1)$에 대하여 선분 AB가 xy평면과 만나는 점을 P라 할 때, 선분 AP의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

①

$(-1,\ 1,\ -2)$ +3 +3 +3

$(2,\ 4,\ 1)$ −1 −1 −1

$(1,\ 3,\ 0)$

$\overline{AP} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$

25. 양수 a에 대하여 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$과 포물선 $y^2=ax$에 동시에 접할 때, 포물선 $y^2=ax$의 초점의 x좌표는? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

②

$y=\frac{1}{2}x+5$

$\frac{a}{2}=5$

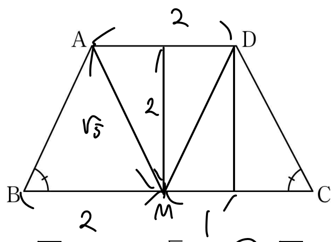
$a=10$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

26. 그림과 같이 변 AD가 변 BC와 평행하고 $\angle \mathrm{CBA}=\angle \mathrm{DCB}$인 사다리꼴 ABCD가 있다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=2,\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=4,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2\sqrt{5}$$

일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$의 값은? [3점]



$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{5}$

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

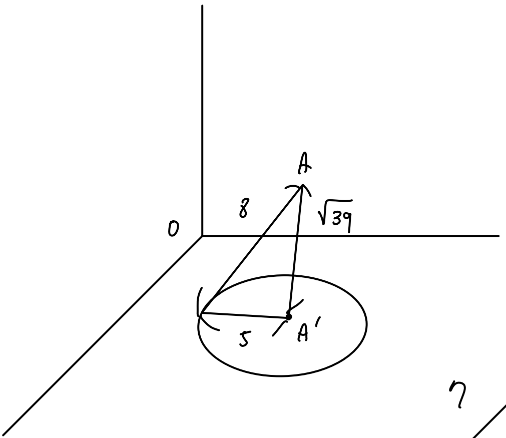
$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

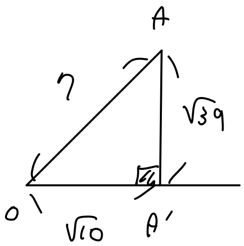
④

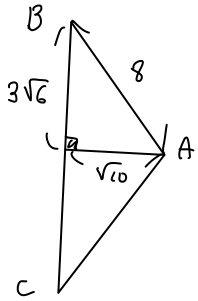
27. 좌표공간에 $\overline{\mathrm{OA}}=7$인 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 8인 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이가 25π이다. 구 S와 z축이 만나는 두 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 BC의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $2\sqrt{46}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{13}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

5







28. 삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$, $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=3$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=-2|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$

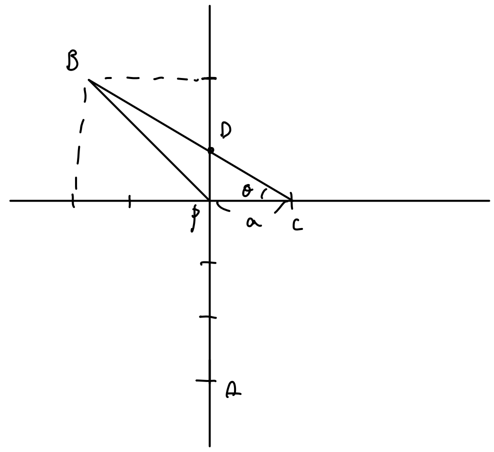
$\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 이루는 각 $\frac{3}{4}\pi$

$\frac{\sqrt{2}}{4}|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|$

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{PD}}$이다. 실수 k의 값은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

1



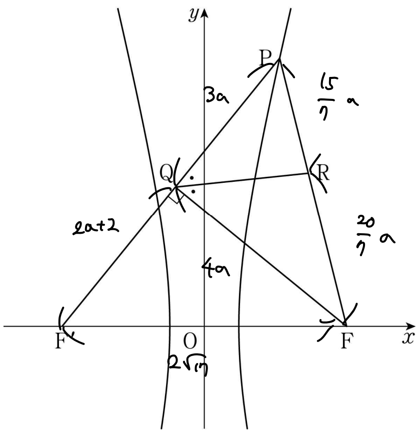
$\tan\theta = \frac{2}{3}$

$\overline{PD} = \frac{2}{3}a$

$\overline{AD} = \frac{11}{3}a$

단답형

29. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 Q라 하고, ∠FQP의 이등분선이 선분 PF와 만나는 점을 R라 하자. $4\overline{PR}=3\overline{RF}$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이고, $\angle F'PF<90°$이다.) [4점]

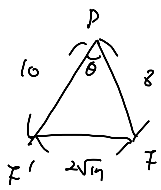


$17=4a^2+(a+1)^2$

$5a^2+2a-16=0$

$(a+2)(5a-8)=0$

$a=\frac{8}{5}$



$\cos\theta=\frac{25+16-17}{2\cdot5\cdot4}=\frac{3}{5}$

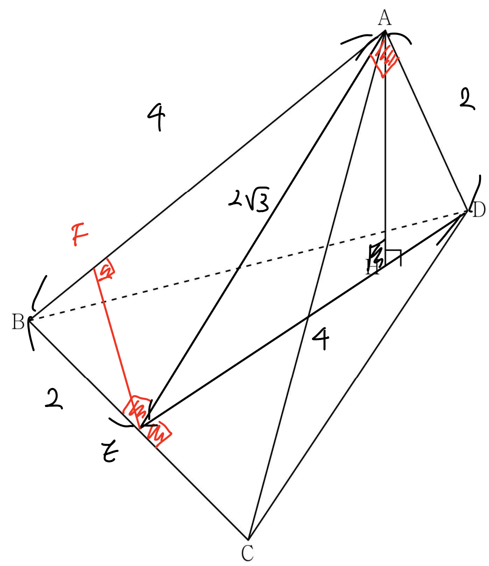
$\frac{1}{2}\cdot10\cdot8\cdot\frac{4}{5}=32$

32

30. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

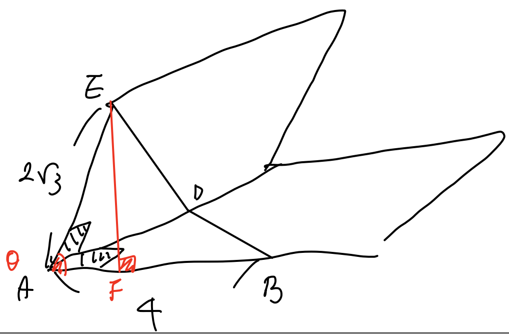
> (가) ∠AEH = ∠DAH ⇒ $\angle EAD=\frac{\pi}{2}$
>
> (나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{DE}=4$이다.
>
> ⇓ $\angle DEC=\frac{\pi}{2}$

삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\angle AEB=\frac{\pi}{2}$ ⇒ 삼수선 정리

$\triangle DBE$에서 $\overline{BD}=2\sqrt{5}$ ⇒ $\triangle ABD$는 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형



$\triangle AHD=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{EF}=\sqrt{3}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$

7

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.