어의대 영역

공통부분

1. 최고차항의 계수가 $a(a<0)$인 사차함수 $f(x)$와 $(x \le a)$에서 $f(k(x))=x$를 만족하는 함수 $k(x)$에 대하여
함수 $g(x)$가

$$g(x)\begin{cases} k(x) & (x \le a) \\ f(x) & (a < x \le b) \\ f(2b-x) & (b<x) \end{cases}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고
다음 조건을 만족시킨다.

(가) 오직 하나의 극댓값 $\frac{3}{4}b$를 가지는 함수 $g(x)$에 대하여 $y=|g(x)+x-2b|$는 오직 한 점에서만 미분 불가능하다.
(나) $\left\{f'(x) \mid \frac{g(a)}{a}-g'(a)=\frac{f(x)-x}{a}\right\}=\{k, 1-27a^4\}$

$\int_a^{g\left(\frac{b}{4}\right)}(f(x)-x)dx=S$일 때, $(40S)^2$의 값을 구하시오.

1. $\frac{1}{3^5}$ 2. $\frac{2}{3^5}$ 3. $\frac{4}{3^5}$ 4. $\frac{1}{3^3}$ 5. $\frac{16}{3^5}$

[1]

2. 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{4}(x+4\sqrt{3})x(x-4\sqrt{3})$위를 움직이는 점 P가 있다. 중심이 $O(4,32)$이고 점 P를 지나는 원을 C라고 한다.

(가) 원 C와 $f(x)$이 $x=t$일 때, 만나는 점의 개수를 $h(t)$라고 한다.
(나) $h(x)$가 불연속인 점의 x좌표를 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots\cdots \alpha_m$이라 할 때, 어떤 α_k에서 극한값을 가진다.
이를 만족하는 k를 순서대로 $k_1, k_2 \cdots k_i$라고 한다.

위의 조건을 만족시키는 원 C의 반지름을 R,
$\dfrac{\lim_{x\to\alpha_i+}h(x)}{\lim_{x\to\alpha_i-}h(x)}=T$라고 할 때, T가 최대일 때의 $\frac{mR}{T^4}-\sum_{n=k_1}^{n=k_3}h(\alpha_n)$의 값은? [2]

미적분

3. $O(0,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름이 18인 원 $C: x^2+y^2=324$위에 점 $M(18,0)$이 있다,

(가) 점 O'은 점 M에서 출발해서 원 C의 둘레를 따라 t초후에 $\angle MOO'=\frac{2}{3}\pi t$를 만족하며 움직인다.
(나) t초 후에 $\lvert\overrightarrow{O'Q}\rvert=3 \cdot 2^t$을 만족한다.

위의 조건을 만족시키는 점 Q의 자취를 C'라고 할 때, 원 C와 C'은 점 A, B에서 만난다. $\overline{AB}=16\sqrt{2}$일 때, $\frac{\sqrt{3}}{144}(2\sqrt{3}\,\overrightarrow{O'M}-7\overrightarrow{O'A}) \cdot (\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB})$의 최댓값과 최솟값을 각각 L, l이라 한다. $L\times l$의 값은? (단, 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다.)

3)

(기하 관련 문제니까 풀어보시고 싶으신 분들에게만 권장드립니다.)

4. $f(x) \le f'(x)$이고 $f(0)=k$인 함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ f(-x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\ln(f'(x)-f(x))=x$
(나) 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[t-1, t+1]$에서의 함수 $g(x)$의 최솟값을 $h(t)$라 할 때, $h'(x)=0$인 구간의 길이를 L이라 한다.

$h(x)$가 실수 전체 집합에서 미분 가능할 때, 가능한 정수 L값의 합을 S이라 하고, L값이 최대이고 극댓값이 존재할 때, $g(0)=a$, 극댓값을 b라고 한다. $2a+e\times b$의 최솟값을 m이라 하면, $m\times S$의 값은? (단, k는 실수이며, $k>0$일 때, k는 정수이다.)

4)

5. $f(x) \le f'(x)$이고 $f(0)=k$인 함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ f(-x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\ln(f'(x)-f(x))=x$
(나) 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[t-1, t+1]$에서의 함수 $g(x)$의 최솟값을 $h(t)$라 할 때, $h'(x)=0$인 구간의 길이를 L이라 한다.

L값이 최대이고 극댓값이 존재할 때, $g(0)=a$, 극댓값을 b라고 한다. $2a+e\times b$의 최솟값은? (단, k는 실수이며, $k>0$

[4번 변형문항] 5)

6. 정수 a와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=ax^2+x$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$에 대하여 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 오직 한 점에서만 미분 불가능하다.
(나) $x>3$에서 $f''(x)>2a$이고, $1<x<3$에서 $f''(x)<2a$이다.

$f(0)$이 최대일 때, $g(x)$의 최솟값을 m이라 한다. 가능한 $-\frac{1}{36m}$값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$는? (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, $f(1)g(1)<0$이다.)

6)

7. 열린 구간 $(0,2)$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{2}x)$와

$g(x)=\frac{e^{x-1}}{x}$가 두 점 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 만난다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\beta$)

<보 기>

ㄱ. $\frac{11}{6}<\alpha+\beta<\frac{13}{6}$

ㄴ. $\frac{\alpha e^2}{\beta}<\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$

ㄷ. $\frac{e^{\alpha-\beta}}{\alpha^2}+\frac{e^{\beta-\alpha}}{\beta^2}>\frac{16}{(\alpha+\beta)^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7)

1)

$f(a)=f^{-1}(a)=a, f'(a)=f^{-1\prime}(a)=1$

$f'(b)=0$

$g(x)+x-2b=g(x)-(-x+2b)$

직선 $y=-x+2b$는 $y=x$를 $x=b$에 대해 축대칭한 직선

$y=|g(x)+x-2b|$가 미분 불가능한 점의 개수는 $y=|f(x)-x|$가 미분 불가능한 점의 개수와 같다.

$h(x)=f(x)-x$라 할 때, $h(x)$는 최고차항의 계수가 a인 사차함수

$h(x)$는 $x=a$에서 접하고 미분 불가능한 점이 하나이므로,

$h(x)=a(x-a)^3(x-\beta)$
$f(x)=h(x)+x=a(x-a)^3(x-\beta)+x$
$f'(x)=3a(x-a)^2(x-\beta)+a(x-a)^3+1=a(x-a)^2(4x-3\beta-a)+1$

$\frac{g(a)}{a}-g'(a)=\frac{f(x)-x}{a} \Rightarrow f(x)-x=0$

$h(x)=0$의 두 근이므로, $x=a$와 $x=\beta$가 된다.

$f'(a)=1$인데, $a<0$이므로 $1-27a^4\neq 1$이다. 즉, $k=1$

그러므로 $f'(\beta)=1-27a^4 \Rightarrow \beta=-2a$

$f(b)=\frac{3}{4}b, f'(b)=0$

$f'(b)=a(b-a)^2(4b+5a)+1=0$ $\qquad \therefore a(b-a)^2=-\frac{1}{4b+5a}$

$f(b)=a(b-a)^3(b+2a)+b=\frac{3}{4}b$

$\Rightarrow -\frac{(b-a)(b+2a)}{4b+5a}=-\frac{1}{4}b$

$\Rightarrow (b-a)(b+2a)=\frac{1}{4}b(4b+5a)$ $\qquad \therefore b=-8a$

$f'(b)=a(-9a)^2(-27a)+1=0$ $\qquad \therefore a^4=\frac{1}{3^5}$

$$\int_a^{g(\frac{b}{4})}(f(x)-x)dx=\int_a^{g(\frac{b}{4})}a(x-a)^3(x+2a)dx=\int_a^{g(\frac{b}{4})}\{a(x-a)^4+3a^2(x-a)^3\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}a(x-a)^5+\frac{3}{4}a^2(x-a)^4\right]$$

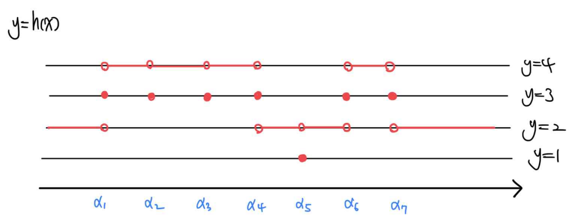
$(g(\frac{b}{4})=g(-2a)=-2a\ ,\ a^4=\frac{1}{3^5})$

$(\frac{1}{5}a(-3a)^5+\frac{3}{4}a^2(-3a)^4)-0=-\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{20}a^2$

$\therefore S=\frac{1}{20}a^2$

$(40S)^2=\frac{4}{a^4}=\frac{4}{3^5}$ 답: 3

2)



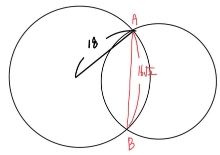
$m=7, i=3$
T가 최대일 때는, $t=1, t=6$일 때인데, 두 경우 모두 $(4,-32)$를 지날 때 이므로, R값은 같다.

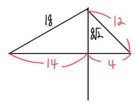
$R=32,\ T=2$

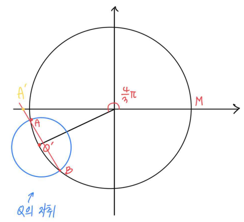
$\frac{mR}{T^4}-\sum_{n=k_1}^{n=k_3}h(\alpha_n)=\frac{7\times 32}{16}-(3+3+2)=6$

답: 6

3)







$\overline{AB}=16\sqrt{2}$일 때, $t=2$, $\angle MOO'=\frac{4}{3}\pi$

$\overline{AB}$의 중점을 N이라 하면,

$\frac{\sqrt{3}}{144}(2\sqrt{3}\overrightarrow{O'M}-7\overrightarrow{O'A})\cdot(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB})=\frac{\sqrt{3}}{144}(2\sqrt{3}\overrightarrow{O'M}-7\overrightarrow{O'A})\cdot(2\overrightarrow{QN})=\frac{\sqrt{3}}{72}(2\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{ON}|=14,\ \angle NOM=\frac{2}{3}\pi \Rightarrow 14\times\tan(\frac{1}{3}\pi)=14\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{O'A}|:|\overrightarrow{O'A'}|=12:14\sqrt{3}=2\sqrt{3}:7$

$\overrightarrow{A'M}=\overrightarrow{O'M}-\frac{7}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{O'A}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(2\sqrt{3}\overrightarrow{O'M}-7\overrightarrow{O'A})$

$\frac{\sqrt{3}}{72}(2\sqrt{3}\overrightarrow{O'M}-7\overrightarrow{O'A})\cdot(\overrightarrow{O'N}-\overrightarrow{O'Q})=\frac{1}{12}\overrightarrow{A'M}\cdot(\overrightarrow{O'N}-\overrightarrow{O'Q})$

$\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{O'N}=(\overrightarrow{A'O'}+\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM})\cdot\overrightarrow{O'N}=0+72+36=108$

$-|\overrightarrow{A'M}||\overrightarrow{O'Q}|\leq\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{O'Q}\leq|\overrightarrow{A'M}||\overrightarrow{O'Q}|$

$-168\sqrt{3}\leq\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{O'Q}\leq 168\sqrt{3}$

$L=9+14\sqrt{3},\ l=9-14\sqrt{3}$

$|L\times l|=|(9+14\sqrt{3})(9-14\sqrt{3})|=507$

답: 507

4)

$\ln(f'(x)-f(x))=x$

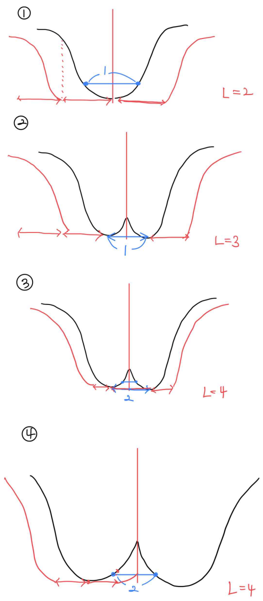
$f'(x)-f(x)=e^x$

$(f'(x)-f(x))e^{-x}=1$

$f(x)e^{-x}=x+C\ (f(0)=k)$

$f(x)e^{-x}=x+k$

$\therefore f(x)=(x+k)e^x$



실수 전체 집합에서 미분 가능할 때는 1, 2, 3번 경우 모두 가능하므로, $S=2+3+4=9$

L값이 최대이고 극댓값이 존재하려면, $L=4$인 4번 경우이다.

$g(0)=f(0)=k$

$h(x)$의 극댓값은 y축으로부터 1만큼 떨어진 지점, $h(-1)$이다.

$h(-1)=f(-1)=(k-1)e^{-1}$

$2a+e\times b=2k+(k-1)=3k-1$

4번 경우의 그래프가 나오려면, $f'(0)\neq 0 \Rightarrow -k<0 \Rightarrow k>0$

이를 만족하는 최솟값은 $k=1$일 때, 즉, $m=2$

$m\times S=2\times 9=18$

답: 18

5) $\ln(f'(x)-f(x))=x$

$f'(x)-f(x)=e^{x}$

$(f'(x)-f(x))e^{-x}=1$

$f(x)e^{-x}=x+C\ (f(0)=k)$

$f(x)e^{-x}=x+k$

$\therefore f(x)=(x+k)e^{x}$

L값이 최대이고 극댓값이 존재하려면, $L=4$인 4번 경우이다.

$g(0)=f(0)=k$

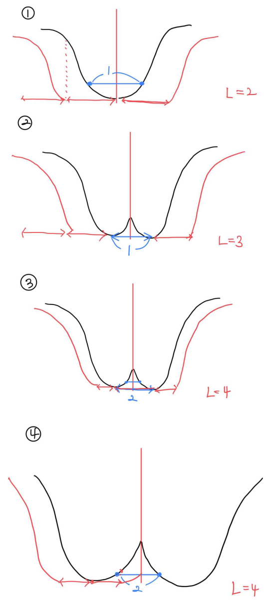
$h(x)$의 극댓값은 y축으로부터 1만큼 떨어진 지점, $h(-1)$이다.

$h(-1)=f(-1)=(k-1)e^{-1}$

$2a+e\times b=2k+(k-1)=3k-1$

4번 경우의 그래프가 나오려면, $f'(0)\neq 0 \Rightarrow -k<0 \Rightarrow k>0$

이를 만족하는 최솟값은 $k=1$일 때, 즉, 최솟값은 2이다.



답:18

6)

(가)조건에 의해, $|f(x)-g(x)|$가 오직 한 점에서만 미분불가능 해야 하므로, $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면,

$h(x)=(x-\alpha)^3(x-\beta)$ or $(x-\alpha)(x-\beta)^3$이다.

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-2ax$

$h''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)-2a$

따라서 (나)조건에 의해 $h(x)$는 $x=3$에서 우측 변곡점을 가짐을 알 수 있다.

그래프 개형을 추론해 보면, $h(x)$는 우측에서 삼중근을 가져야 하므로 $h(x)=(x-\alpha)(x-3)^3$

$f(0)=h(0)$, 따라서 $h(0)$이 최대일 때이다.

여기서 (나)조건에 따라 좌측 변곡점의 x좌표를 x_1이라 하면, $x_1\leq 1$이다.

x_1가 작아질수록 극소를 가지는 x좌표과 극솟값도 작아지므로, $h(0)$이 최대일 때는 x_1가 최대일 때, 즉, $x_1=1$일 때이다.

$h(x)=(x-\alpha)(x-3)^3$

$h''(x)=6(x-3)(2x-\alpha-3)$

$h''(1)=0$

$\therefore \alpha=-1,\ h(x)=(x+1)(x-3)^3$

$g(1)=a+1,\ f(1)=h(1)+g(1)=a-15$

$f(1)g(1)<0 \Rightarrow -1<a<15$

$g(x)=a(x+\frac{1}{2a})-\frac{1}{4a}$

$\sum_{a=0}^{14}\frac{a}{9}=\frac{1}{9}\times\frac{14\times 15}{2}=\frac{35}{3}$

$p+q=38$

답: 38

7)

ㄱ)

$\frac{1}{3}<\alpha<\frac{1}{2},\quad \frac{3}{2}<\beta<\frac{5}{3}\quad \Rightarrow\quad \frac{10}{6}<\alpha+\beta<\frac{13}{6}$ (O)

ㄴ)

$2\sin(\frac{\pi}{2}a)=\frac{e^{a-1}}{a},\ 2\sin(\frac{\pi}{2}b)=\frac{e^{b-1}}{b}$

$\Rightarrow e^2e^a<e^b \Rightarrow e^2<e^{b-a} \neq (b-a<2)$ (X)

ㄷ)

구간 $(0,2)$에서 $g(x)$는 아래로 볼록

$$\Rightarrow \frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}>g(\frac{\alpha+\beta}{2})\Rightarrow \frac{\frac{e^{\alpha-1}}{\alpha}+\frac{e^{\beta-1}}{\beta}}{2}>\frac{e^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}}{\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\Rightarrow \beta e^{\alpha}+\alpha e^{\beta}>\frac{4\alpha\beta\times e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\alpha+\beta}$$

$$\Rightarrow \beta e^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}}+\alpha e^{\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}}>\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

$(\alpha>0,\beta>0)$이므로 위의 식을 양변 제곱하면 ㄷ과 같은 식이 나온다. (O)

답: ④