

어의대 영역

공통부분

1. 최고차항의 계수가 $a(a < 0)$ 인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & (x \leq a) \\ f(x) & (a < x \leq b) \\ f(2b-x) & (b < x) \end{cases}$$

일 때, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 오직 하나의 극댓값 $\frac{3}{4}b$ 를 가지는 함수 $g(x)$ 에 대하여
 $y = |g(x) + x - 2b|$ 는 오직 한 점에서만 미분 불가능하다.
 (나) $\left\{ f'(x) \mid \frac{g(a)}{a} - g'(a) = \frac{f(x) - x}{a} \right\} = \{k, 1 - 27a^4\}$

$\int_a^{g(\frac{b}{4})} (f(x) - x) dx = S$ 일 때, $(40S)^2$ 의 값을 구하시오.

1. $\frac{1}{3^5}$ 2. $\frac{2}{3^5}$ 3. $\frac{4}{3^5}$ 4. $\frac{1}{3^3}$ 5. $\frac{16}{3^5}$

1)

2. 삼차함수 $f(x) = \frac{1}{4}(x + 4\sqrt{3})x(x - 4\sqrt{3})$ 위를 움직이는 점 P 가 있다. 중심이 $O(4, 32)$ 이고 점 P 를 지나는 원을 C 라고 한다.

(가) 원 C 와 $f(x)$ 이 $x=t$ 일 때, 만나는 점의 개수를 $h(t)$ 라고 한다.

(나) $h(x)$ 가 불연속인 점의 x 좌표를 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 이라 할 때, 어떤 α_k 에서 극한값을 가진다.
 이를 만족하는 k 를 순서대로 $k_1, k_2, \dots, k_i$ 라고 한다.

위의 조건을 만족시키는 원 C 의 반지름을 R ,

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \alpha_i^+} h(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha_i^-} h(x)} = T \text{라고 할 때, } T \text{가 최대일 때의 } \frac{mR}{T^4} - \sum_{n=k_1}^{n=k_3} h(\alpha_n) \text{의}$$

값은? 2)

미적분

- 3.
- $O(0, 0)$
- 을 중심으로 하고 반지름이 18인 원

$C: x^2 + y^2 = 324$ 위에 점 $M(18, 0)$ 이 있다,

(가) 점 O' 은 점 M 에서 출발해서 원 C 의 둘레를 따라

t 초후에 $\angle MOO' = \frac{2}{3}\pi t$ 를 만족하며 움직인다.

(나) t 초 후에 $|\overrightarrow{O'Q}| = 3 \cdot 2^t$ 을 만족한다.

위의 조건을 만족시키는 점 Q 의 자취를 C' 라고 할 때, 원 C 와 C' 은 점 A, B 에서 만난다. $\overline{AB} = 16\sqrt{2}$ 일 때, $\frac{\sqrt{3}}{144}(2\sqrt{3}\overrightarrow{O'M} - 7\overrightarrow{O'A}) \cdot (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB})$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 L, l 이라 한다. $L \times l$ 의 값은? (단, 점 A 의 x 좌표가 점 B 의 x 좌표보다 작다.)

3)

- 4.
- $f(x) \leq f'(x)$
- 이고
- $f(0) = k$
- 인 함수
- $f(x)$
- 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 0) \\ f(-x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\ln(f'(x) - f(x)) = x$

(나) 실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t-1, t+1]$ 에서의 함수 $g(x)$ 의 최솟값을 $h(t)$ 라 할 때, $h'(x) = 0$ 인 구간의 길이를 L 이라 한다.

$h(x)$ 가 실수 전체 집합에서 미분 가능할 때, 가능한 정수 L 값의 합을 S 이라 하고, L 값이 최대이고 극댓값이 존재할 때, $g(0) = a$, 극댓값을 b 라고 한다. $2a + e \times b$ 의 최솟값을 m 이라 하면, $m \times S$ 의 값은? (단, k 는 실수이며, $k > 0$ 일 때, k 는 정수이다.)

4)

- 5.
- $f(x) \leq f'(x)$
- 이고
- $f(0) = k$
- 인 함수
- $f(x)$
- 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 0) \\ f(-x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\ln(f'(x) - f(x)) = x$

(나) 실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t-1, t+1]$ 에서의 함수 $g(x)$ 의 최솟값을 $h(t)$ 라 할 때, $h'(x) = 0$ 인 구간의 길이를 L 이라 한다.

L 값이 최대이고 극댓값이 존재할 때, $g(0) = a$, 극댓값을 b 라고 한다. $2a + e \times b$ 의 최솟값은? (단, k 는 실수이며, $k > 0$

[4번 변형문항]⁵⁾

6. 정수
- a
- 와 최고차항의 계수가 1인 사차함수
- $f(x)$
- 에 대하여 함수

$g(x) = ax^2 + x$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $|f(x) - g(x)|$ $|f(x) - g(x)|$ 는 오직 한 점에 서만 미분

불가능하다.

(나) $x > 3$ 에서 $f''(x) < 2a$ 이고, $1 < x < 3$ 에서 $f''(x) < 2a$ 이다.

$f(0)$ 이 최대일 때, $g(x)$ 의 최솟값을 m 이라 한다. 가능한 $-\frac{1}{36m}$ 값의 합을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 는? (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, $f(1)g(1) < 0$ 이다.)

6)

7. 열린 구간 $(0, 2)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x)$ 와

$g(x) = \frac{e^{x-1}}{x}$ 가 두 점 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 만난다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha < \beta$)

<보 기>

$$\neg. \frac{11}{6} < \alpha + \beta < \frac{13}{6}$$

$$\neg. \frac{\alpha e^2}{\beta} < \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\beta)}{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)}$$

$$\neg. \frac{e^{\alpha-\beta}}{\alpha^2} + \frac{e^{\beta-\alpha}}{\beta^2} > \frac{16}{(\alpha+\beta)^2}$$

① $\neg$

② $\neg$

③ $\neg, \neg$

④ $\neg, \neg$

⑤ $\neg, \neg, \neg$

7)

1)

$$f(a) = f^{-1}(a) = a, f'(a) = f^{-1'}(a) = 1$$

$$f'(b) = 0$$

$$g(x) + x - 2b = g(x) - (-x + 2b)$$

직선 $y = -x + 2b$ 는 $y = x$ 를 $x = b$ 에 대해 축대칭한 직선

$y = |g(x) + x - 2b|$ 가 미분 불가능한 점의 개수는 $y = |f(x) - x|$ 가 미분 불가능한 점의 개수와 같다.

$h(x) = f(x) - x$ 라 할 때, $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 a 인 사차함수

$h(x)$ 는 $x = a$ 에서 접하고 미분 불가능한 점이 하나이므로,

$$h(x) = a(x-a)^3(x-\beta)$$

$$f(x) = h(x) + x = a(x-a)^3(x-\beta) + x$$

$$f'(x) = 3a(x-a)^2(x-\beta) + a(x-a)^3 + 1 = a(x-a)^2(4x-3\beta-a) + 1$$

$$\frac{g(a)}{a} - g'(a) = \frac{f(x)-x}{a} \Rightarrow f(x)-x=0$$

$h(x) = 0$ 의 두 근이므로, $x = a$ 와 $x = \beta$ 가 된다.

$f'(a) = 1$ 인데, $a < 0$ 이므로 $1 - 27a^4 \neq 1$ 이다. 즉, $k = 1$

그러므로 $f'(\beta) = 1 - 27a^4 \Rightarrow \beta = -2a$

$$f(b) = \frac{3}{4}b, f'(b) = 0$$

$$f'(b) = a(b-a)^2(4b+5a) + 1 = 0 \quad \therefore a(b-a)^2 = -\frac{1}{4b+5a}$$

$$f(b) = a(b-a)^3(b+2a) + b = \frac{3}{4}b$$

$$\Rightarrow -\frac{(b-a)(b+2a)}{4b+5a} = -\frac{1}{4}b$$

$$\Rightarrow (b-a)(b+2a) = \frac{1}{4}b(4b+5a) \quad \therefore b = -8a$$

$$f'(b) = a(-9a)^2(-27a) + 1 = 0 \quad \therefore a^4 = \frac{1}{3^5}$$

$$\int_a^{g(\frac{b}{4})} (f(x) - x) dx = \int_a^{g(\frac{b}{4})} a(x-a)^3(x+2a) dx = \int_a^{g(\frac{b}{4})} \{a(x-a)^4 + 3a^2(x-a)^3\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}a(x-a)^5 + \frac{3}{4}a^2(x-a)^4 \right]$$

$$(g(\frac{b}{4}) = g(-2a) = -2a, a^4 = \frac{1}{3^5})$$

$$(\frac{1}{5}a(-3a)^5 + \frac{3}{4}a^2(-3a)^4) - 0 = -\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{20}a^2$$

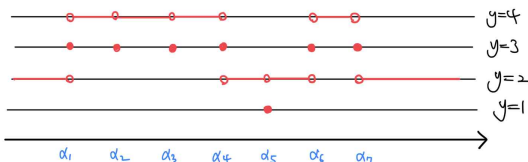
$$\therefore S = \frac{1}{20}a^2$$

$$(40S)^2 = \frac{4}{a^4} = \frac{4}{3^5}$$

답: 3

2)

$$y = h(x)$$



$$m = 7, i = 3$$

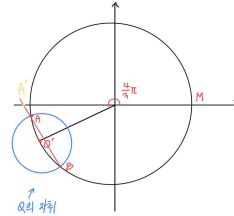
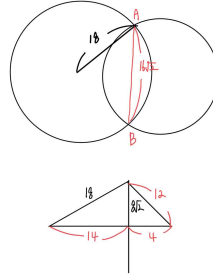
T 가 최대일 때는, $t = 1, t = 6$ 일 때인데, 두 경우 모두 $(4, -32)$ 를 지날 때 이므로, R 값은 같다.

$$R = 32, T = 2$$

$$\frac{mR}{T^4} - \sum_{n=k_1}^{n=k_2} h(\alpha_n) = \frac{7 \times 32}{16} - (3 + 3 + 2) = 6$$

답: 6

3)



$$\overline{AB} = 16\sqrt{2} \text{ 일 때, } t = 2, \angle MOO' = \frac{4}{3}\pi$$

$\overline{AB}$ 의 중점을 N 이라 하면,

$$\frac{\sqrt{3}}{144} (2\sqrt{3}\overline{O'M} - 7\overline{O'A}) \cdot (\overline{QA} + \overline{QB}) = \frac{\sqrt{3}}{144} (2\sqrt{3}\overline{O'M} - 7\overline{O'A}) \cdot (2\overline{QN}) = \frac{\sqrt{3}}{72} (2\sqrt{3}\overline{O'M} - 7\overline{O'A}) \cdot \overline{QN}$$

$$|\overline{ON}| = 14, \angle NOM = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow 14 \times \tan(\frac{1}{3}\pi) = 14\sqrt{3}$$

$$|\overline{OA}| : |\overline{OA'}| = 12 : 14\sqrt{3} = 2\sqrt{3} : 7$$

$$\overline{A'M} = \overline{O'M} - \frac{7}{2\sqrt{3}}\overline{O'A} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2\sqrt{3}\overline{O'M} - 7\overline{O'A})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{72} (2\sqrt{3}\overline{O'M} - 7\overline{O'A}) \cdot (\overline{O'N} - \overline{O'Q}) = \frac{1}{12} \overline{A'M} \cdot (\overline{O'N} - \overline{O'Q})$$

$$\overline{A'M} \cdot \overline{O'N} = (\overline{A'O'} + \overline{O'O} + \overline{OM}) \cdot \overline{O'N} = 0 + 72 + 36 = 108$$

$$-|\overline{A'M}| |\overline{O'Q}| \leq \overline{A'M} \cdot \overline{O'Q} \leq |\overline{A'M}| |\overline{O'Q}|$$

$$-168\sqrt{3} \leq \overline{A'M} \cdot \overline{O'Q} \leq 168\sqrt{3}$$

$$L = 9 + 14\sqrt{3}, l = 9 - 14\sqrt{3}$$

$$|L \times l| = |(9 + 14\sqrt{3})(9 - 14\sqrt{3})| = 507$$

답: 507

4)

$$\ln(f'(x) - f(x)) = x$$

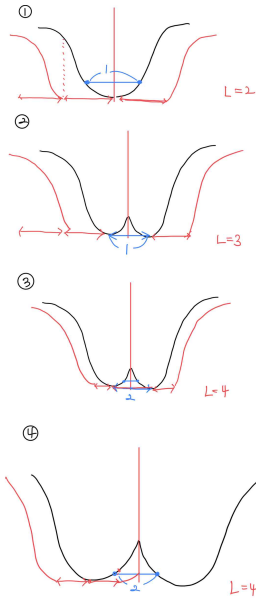
$$f'(x) - f(x) = e^x$$

$$(f'(x) - f(x))e^{-x} = 1$$

$$f(x)e^{-x} = x + C \quad (f(0) = k)$$

$$f(x)e^{-x} = x + k$$

$$\therefore f(x) = (x + k)e^x$$



실수 전체 집합에서 미분 가능할 때는 1, 2, 3번 경우 모두
가능하므로, $S=2+3+4=9$
 L 값이 최대이고 극댓값이 존재하려면, $L=4$ 인 4번 경우이다.
 $g(0)=f(0)=k$
 $h(x)$ 의 극댓값은 y 축으로부터 1만큼 떨어진 지점, $h(-1)$ 이다.
 $h(-1)=f(-1)=(k-1)e^{-1}$
 $2a+e \times b=2k+(k-1)=3k-1$
4번 경우의 그래프가 나오려면, $f'(0) \neq 0 \Rightarrow -k < 0 \Rightarrow k > 0$
이를 만족하는 최솟값은 $k=1$ 일 때, 즉, $m=2$
 $m \times S=2 \times 9=18$

5) $\ln(f'(x)-f(x))=x$

$$f'(x)-f(x)=e^x$$

$$(f'(x)-f(x))e^{-x}=1$$

$$f(x)e^{-x}=x+C \quad (f(0)=k)$$

$$f(x)e^{-x}=x+k$$

$$\therefore f(x)=(x+k)e^x$$

L 값이 최대이고 극댓값이 존재하려면, $L=4$ 인 4번 경우이다.

$$g(0)=f(0)=k$$

$h(x)$ 의 극댓값은 y 축으로부터 1만큼 떨어진 지점, $h(-1)$ 이다.

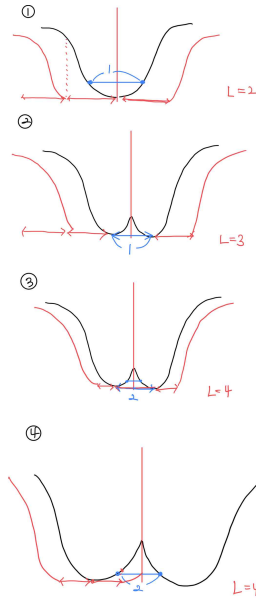
$$h(-1)=f(-1)=(k-1)e^{-1}$$

$$2a+e \times b=2k+(k-1)=3k-1$$

4번 경우의 그래프가 나오려면, $f'(0) \neq 0 \Rightarrow -k < 0 \Rightarrow k > 0$

이를 만족하는 최솟값은 $k=1$ 일 때, 즉, 최솟값은 2이다.

답: 18



답: 18

6)

(가)조건에 의해, $|f(x)-g(x)|$ 가 오직 한 점에서만 미분불가능 해야 하므로,
 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면,
 $h(x)=(x-\alpha)^3(x-\beta)$ or $(x-\alpha)(x-\beta)^3$ 이다.
 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-2ax$
 $h''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)-2a$

따라서 (나)조건에 의해 $h(x)$ 는 $x=3$ 에서 우측 변곡점을 가짐을 알 수 있다.

그래프 개형을 추론해 보면, $h(x)$ 는 우측에서 삼중근을 가져야 하므로 $h(x)=(x-\alpha)(x-3)^3$

$f(0)=h(0)$, 따라서 $h(0)$ 이 최대일 때이다.

여기서 (나)조건에 따라 좌측 변곡점의 x 좌표를 x_1 이라 하면,

$x_1 \leq 1$ 이다.

x_1 가 작아질수록 극소를 가지는 x 좌표와 극솟값도 작아지므로,

$h(0)$ 이 최대일 때는 x_1 가 최대일 때, 즉, $x_1=1$ 일 때이다.

$$h(x)=(x-\alpha)(x-3)^3$$

$$f(0)=h(0), \text{ 따라서 } h(0) \text{이 최대일 때이다.}$$

여기서 (나)조건에 따라 좌측 변곡점의 x 좌표를 x_1 이라 하면,

$x_1 \leq 1$ 이다.

x_1 가 작아질수록 극소를 가지는 x 좌표와 극솟값도 작아지므로,

$h(0)$ 이 최대일 때는 x_1 가 최대일 때, 즉, $x_1=1$ 일 때이다.

$$h(x)=(x-\alpha)(x-3)^3$$

$$h''(x)=6(x-3)(2x-\alpha-3)$$

$$h''(1)=0$$

$$\therefore \alpha=-1, h(x)=(x+1)(x-3)^3$$

$$g(1)=a+1, f(1)=h(1)+g(1)=a-15$$

$$f(1)g(1) < 0 \Rightarrow -1 < a < 15$$

$$g(x)=a(x+\frac{1}{2a})-\frac{1}{4a}$$

$$\sum_{a=0}^{14} \frac{a}{9} = \frac{1}{9} \times \frac{14 \times 15}{2} = \frac{35}{3}$$

$$p+q=38$$

7)

답: 38

㉑)

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} < \beta < \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{10}{6} < \alpha + \beta < \frac{13}{6} \quad (O)$$

㉒)

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) = \frac{e^{a-1}}{a}, \quad 2\sin\left(\frac{\pi}{2}b\right) = \frac{e^{b-1}}{b}$$

$$\Rightarrow e^2 e^a < e^b \Rightarrow e^2 < e^{b-a} \neq (b-a < 2) \quad (X)$$

㉓)

구간 $(0, 2)$ 에서 $g(x)$ 는 아래로 볼록

$$\Rightarrow \frac{g(\alpha) + g(\beta)}{2} > g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Rightarrow \frac{\frac{e^{\alpha-1}}{\alpha} + \frac{e^{\beta-1}}{\beta}}{2} > \frac{e^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}}{\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\Rightarrow \beta e^\alpha + \alpha e^\beta > \frac{4\alpha\beta \times e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\alpha + \beta}$$

$$\Rightarrow \beta e^{\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}} + \alpha e^{\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}} > \frac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

$(\alpha > 0, \beta > 0)$ 이므로 위의 식을 양변 제곱하면 ㉒과 같은 식이 나온다. (O)

답: ㉔