

지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

<https://orbi.kr/00037927032>

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

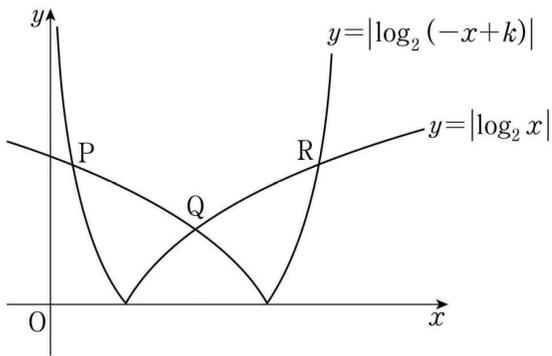
<https://atom.ac/books/8588>

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex 공통

1. 2보다 큰 상수 k 에 대하여 두 곡선 $y = |\log_2(-x+k)|$,
 $y = |\log_2 x|$ 가 만나는 세 점 P, Q, R의 x 좌표를 각각 $x_1, x_2,$
 x_3 이라 하자. $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$ 일 때, $x_1 + x_3$ 의 값은?
 (단, $x_1 < x_2 < x_3$) [2021년 10월 08]

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



1. 정답 ③ [2021년 10월 08]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$k > 2$ 인데 $y = |\log_2(-x+k)|$ 와 $y = |\log_2 x|$ 가 만나는 세 점 P, Q, R의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라고 한답니다. $x_1 < x_2 < x_3$ 이구요. $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$ 일 때 $x_1 + x_3$ 를 구하라네요.

일단 x_1 은 $y = -\log_2 x$ 과 $y = \log_2(-x+k)$ 가 만나는 점이죠? $-\log_2 x_1 = \log_2(-x_1+k)$ 인데

$-\log_2 x_1 = \log_2 \frac{1}{x_1}$ 이니까 $\frac{1}{x_1} = -x_1 + k$ 입니다. 정리하면 $x_1^2 - kx_1 + 1 = 0$ 이네요.

x_2 는... 이걸 일단 나중에 해봅시다. 우리가 구하는 거엔 안 들어가니까요.

x_3 은 $y = \log_2 x$ 와 $y = -\log_2(-x+k)$ 가 만나는 점입니다. $\log_2 x_3 = -\log_2(-x_3+k)$ 인데

$-\log_2(-x_3+k) = \log_2 \frac{1}{(-x_3+k)}$ 이므로 $x_3 = \frac{1}{-x_3+k}$ 이고 $x_3^2 - kx_3 + 1 = 0$ 입니다.

어? 모양이 똑같네요? 이걸 결국 $x^2 - kx + 1 = 0$ 의 두 실근이 x_1 과 x_3 이라는 거잖아요? 근과 계수와의 관계에

의하여 $x_1 + x_3 = k$, $x_1 x_3 = 1$ 입니다. 이때 $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$ 이니까 제곱하면 $x_3^2 - 2x_3 x_1 + x_1^2 = 12$ 입니다.

$4x_1 x_3$ 을 더해주면 $x_3^2 + 2x_3 x_1 + x_1^2 = (x_3 + x_1)^2 = k^2 = 16$ 이죠? $k > 2$ 이므로 $k = x_1 + x_3 = 4$ 입니다. 답은

③이네요.

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x 에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c 는 상수이다.) [2021년 10월 13]

—<보 기>—

ㄱ. $a^2 \leq 3b$

ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$ 이 실근을 가지면 $g'(1)=1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 정답 ① [2021년 10월 13]

1) 항등식은 수치대입, 계수비교,

$f(x)$ 와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 있습니다. 역함수가 존재한다구요? 그러면 $g'(x) \geq 0$ 이어야겠네요. 최고차항의 계수가 1이니까 계속 증가하는 모양이거나 한 번만 $g'(x) = 0$ 이 되면서 방향은 바꾸지 않는 모양이 되어야 역함수의 조건인 “치역=공역”과 “일대일함수”를 만족시킬 수 있을 테니까요. 따라서 $g'(x) = 3x^2 + 2ax + b \geq 0$ 이고 판별식이 0보다 작거나 같아야 합니다. $a^2 - 3b \leq 0$ 이므로 $a^2 \leq 3b$ 입니다. ㄱ은 맞네요!

ㄴ에서 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖냐고 물어봅니다. 이걸 식을 구해봐야겠죠?

아까 모든 실수 x 에 대하여 $2f(x) = g(x) - g(-x)$ 라고 했었잖아요. 항등식이네요? 그럼 수치대입과 계수비교를 해야죠. 여긴 식을 썼으니까 계수비교가 편할 것 같네요. 다 넣어봅시다.

$2f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c - (-x^3 + ax^2 - bx + c) = 2x^3 + 2bx$ 이고 $f(x) = x^3 + bx$ 입니다. 이걸 미분하면

$f'(x) = 3x^2 + b$ 인데 이게 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 커야 합니다. 그러면 결국 $-12b > 0$ 이고 $b < 0$ 이어야 하네요. 그런데 아까 $a^2 \leq 3b$ 라고 했었잖아요? $a^2 \geq 0$ 이니까 $0 \leq a^2 \leq 3b$ 이죠. $b \geq 0$ 인데요? ㄴ은 아닙니다.

ㄷ에서 $f'(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g'(1) = 1$ 이냐고 물어봅니다. 아까 서로 다른 두 실근을 가질 때 $b < 0$ 여야 한다고 했었죠? 이번엔 그냥 “실근”이니까 판별식이 0이 것도 포함입니다. 따라서 $b \leq 0$ 여야 하겠네요.

$b \geq 0$ 이고 $b \leq 0$ 인 건? $b = 0$ 만 가능하죠. 따라서 $b = 0$ 입니다. $0 \leq a^2 \leq 0$ 이니까 $a = 0$ 이네요.

$g'(x) = 3x^2$ 이고 $g'(1) = 3$ 입니다. 아니네요! ㄷ도 아닙니다. 따라서 맞는 건 ㄱ이고 답은 ①번이네요.

3. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$ 을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt+5 & (x < c) \\ \left| \int_0^x f(t)dt - \frac{13}{3} \right| & (x \geq c) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c 의 개수가 1일 때, $g(1)$ 의 최댓값은? [2021년 10월 15]

- ① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

3. 정답 ⑤ [2021년 10월 15]

1) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 절댓값 풀기

최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$ 가 있는데 $f(0)=f'(0)=0$ 입니다. 일단 $x=0$ 에서 x 축에 접하네요. 그리고는 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c 의 개수가 1개일 때 $g(1)$ 의 최댓값을 구하라네요.

일단 연속이 되어야 한다는 것부터 확인해봅시다. 좌극한 우극한 함숫값이 모두 같아야 하죠? 따라서

$$\int_0^c f(t)dt + 5 = \left| \int_0^c f(t)dt - \frac{13}{3} \right| \text{입니다. 절댓값이 있으니까 범위 나누고 풀어보죠. } \int_0^c f(t)dt > \frac{13}{3} \text{ 이라면}$$

$$\int_0^c f(t)dt + 5 = \int_0^c f(t)dt - \frac{13}{3} \text{입니다. 말이 안 되죠? } 5 = -\frac{13}{3} \text{ 은 말이 안 되잖아요. 따라서}$$

$$\int_0^c f(t)dt \leq \frac{13}{3} \text{ 이고 } \int_0^c f(t)dt + 5 = -\int_0^c f(t)dt + \frac{13}{3} \text{ 이네요. 정리하면 } \int_0^c f(t)dt = -\frac{1}{3} \text{입니다. 결국}$$

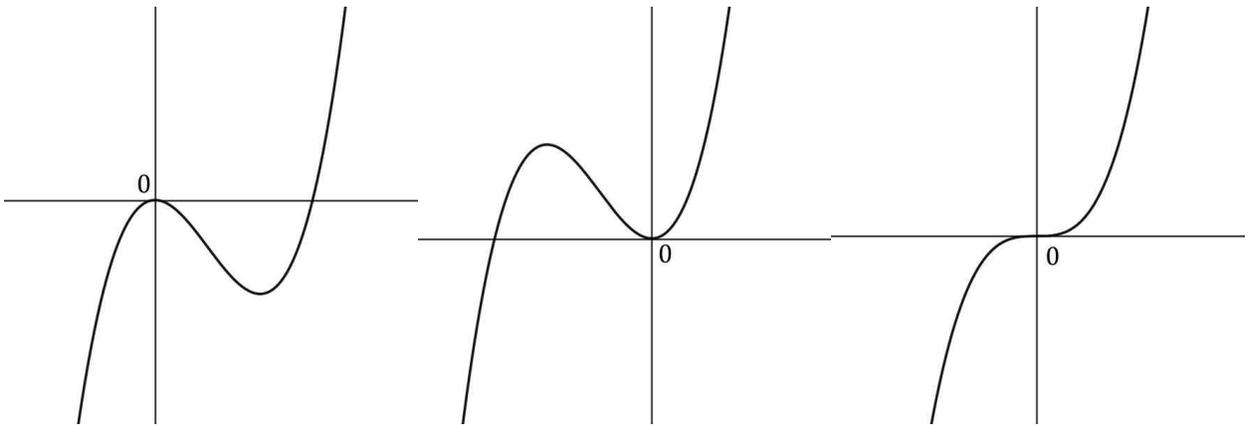
$$\int_0^c f(t)dt = -\frac{1}{3} \text{인 } c \text{가 하나만 존재해야 한다는 거예요.}$$

2) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

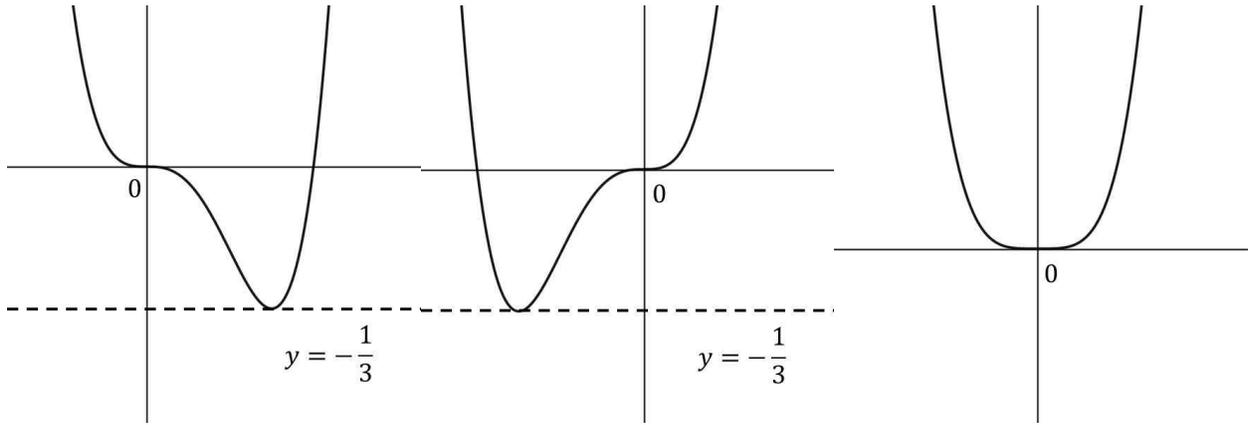
일단 $\int_0^x f(t)dt = F(x)$ 라 할게요. 그러면 $F(c) = -\frac{1}{3}$ 인 c 가 하나만 존재해야 하죠? 다시 말하면 $y = F(x)$ 와

$y = -\frac{1}{3}$ 이 단 한 번만 만나야 합니다.

여기서 $F(x)$ 는 $f(x)$ 를 적분한 함수죠? $F(0)=0$ 이구요. $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수인데 $x=0$ 에서 접하는 함수예요. 가능한 경우는



이렇게 셋 중 하나죠. 이걸 적분하고 원점을 지나도록 하면 각각



이렇게 됩니다. 이 중 가장 오른쪽 거는 안 되죠. $y = -\frac{1}{3}$ 과 만나지 않잖아요. 따라서 $F(x)$ 의 극솟값이 $-\frac{1}{3}$ 이어야 합니다.

3) 함수 구하기 - 인수정리

$f(x)$ 부터 구해봅시다. 일단 $f(x)$ 가 x 축과 만나는 $x=0$ 이 아닌 점의 x 좌표를 a 라 할게요. 그러면

$$f(x) = 4x^2(x-a) = 4x^3 - 4ax^2 \text{이죠? 이걸 적분하고 원점을 지나게 하면 } x^4 - \frac{4}{3}ax^3 \text{입니다. } x=a \text{에서}$$

극소니까 극솟값은 $-\frac{1}{3}a^4$ 이죠? 이게 $-\frac{1}{3}$ 이므로 $a^4 = 1$ 이고 $a^2 = 1$ 입니다. $a = 1$ 이거나 $a = -1$ 이네요.

$y = F(x)$ 와 $y = -\frac{1}{3}$ 이 $x=c$ 에서 단 한 번만 만나야 하잖아요? 그러면 c 도 a 랑 같게 되겠네요. 극소가 되는

x 좌표가 a 인데 이게 c 이기도 해야 $y = F(x)$ 와 $y = -\frac{1}{3}$ 이 $x=c$ 에서 단 한 번만 만나죠. $c = 1$ 이거나

$c = -1$ 입니다.

우리는 $g(1)$ 의 최댓값을 구해야 하죠? 케이스를 나눠야겠어요. 만약 $c = 1$ 이라면 그냥 넣으면 되겠네요.

$$F(c) = \int_0^c f(t)dt = -\frac{1}{3} \text{이니까 } g(1) = \int_0^c f(t)dt + 5 = \left| \int_0^c f(t)dt - \frac{13}{3} \right| = \frac{14}{3} \text{입니다. } c = -1 \text{이라면}$$

$$g(1) = \left| \int_0^1 f(t)dt - \frac{13}{3} \right| \text{인데 } f(x) = 4x^3 + 4x^2 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (4t^3 + 4t^2)dt = \left[t^4 + \frac{4}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{7}{3} \text{입니다. } g(1) = 2 \text{이네요. 둘 중 큰 건 } \frac{14}{3} \text{이죠? 따라서 답은}$$

⑤입니다.

(논란이 있는 문제이나 저는 $g(x)$ 가 연속일 때 $g(1)$ 의 최댓값을 구해야 한다는 것으로 해석하고 해설을 작성했습니다!)

4. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$ 를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=-6x^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값을 구하시오. [2021년 10월 20]

4. 정답 2 [2021년 10월 20]

1) 문제해석

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 있는데 원점을 지나고 $f(1-x) = -f(1+x)$ 를 만족시킨답니다. 이거 어디서 많이 봤죠?

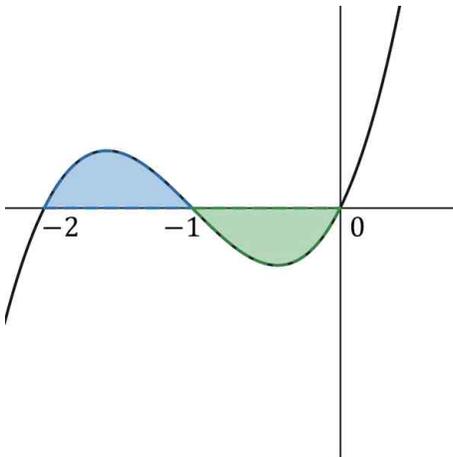
넘기면 $f(1-x) + f(1+x) = 0$ 이 되고 2로 나누면 $\frac{f(1-x) + f(1+x)}{2} = 0$ 가 됩니다. $1-x$ 와 $1+x$ 를 더하고 2로 나누면 1이 되죠. 이 형태는 결국 $f(x)$ 가 (1, 0) 대칭이라는 말이 됩니다. 1에서 x 만큼 떨어진 곳에서의 함숫값과 $-x$ 만큼 떨어진 곳에서의 함숫값의 부호가 항상 반대가 되어야 하고, 두 함숫값의 중점은 0이 되어야 하니까 둘은 점 (1, 0)을 중심으로 대칭되는 형태가 되겠죠. $f(1) = 0$ 이겠어요.

이때 $f(0) = 0$ 이잖아요? (1, 0)대칭인데 (0, 0)을 지나면 당연히 (2, 0)도 지나야죠. 인수정리에 의해 $f(x) = x(x-1)(x-2)$ 입니다.

2) 정적분 관찰

$y = f(x)$ 와 $y = -6x^2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 일단 만나는 부분부터 찾아봐야겠어요.

$f(x) - (-6x^2) = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$ 이니까 $x = 0, x = -1, x = -2$ 에서 만나네요. 이거 근데 그래프 그려보면

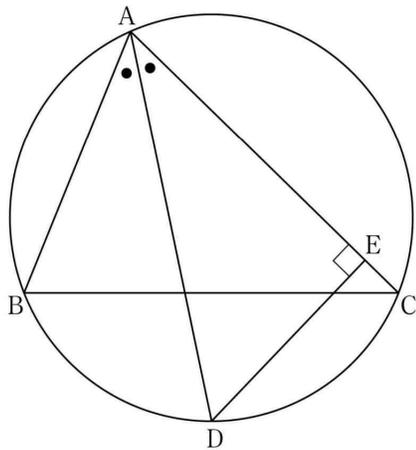


이렇게 되네요. 이거 (-1, 0)대칭이죠? x 축과 만나는 점간의 간격이

모두 같잖아요. 대칭이라는 거죠. 그러면 -2에서 -1, -1에서 0까지 각각 적분할 필요없이 -1에서 0까지만 적분하고 $\times 2$ 해버리면 되겠어요. 대칭이니까 적분값 역시 부호가 반대가 되겠죠. 따라서

$$2 \left| \int_{-1}^0 f(x) + 6x^2 dx \right| = 2 \times \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 \right]_{-1}^0 \right| = \frac{1}{2} \text{입니다. } 4S = 2 \text{입니다.}$$

5. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$ 인 예각삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선과 삼각형 ABC 의 외접원이 만나는 점을 D , 점 D 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 E 라 하자. 선분 AE 의 길이를 k 라 할 때, $12k$ 의 값을 구하시오. [2021년 10월 21]

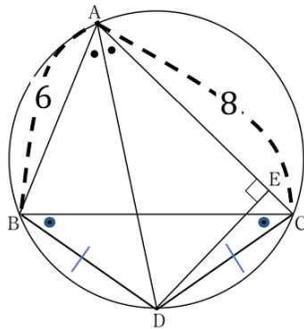


5. 정답 84 [2021년 10월 21]

1) 그림 있으면 그림 보면서

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$ 인 예각삼각형 ABC가 있는데 $\angle A$ 의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D라고 한답니다. 이등분되어 있는 거 보이시죠? D도 보이구요. 그리고 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 한답니다. 직각 표시도 되어 있네요. 이때 선분 AE의 길이를 k 라 하고 $12k$ 를 구하랍니다.

일단 $\angle A$ 이 이등분 되어 있는데



이렇게 선분을 그어주면 원주각이 모두 같아지고, 삼각형 BDC가

이등변삼각형이 됩니다. 그러면 $\overline{BD}=\overline{DC}$ 이죠?

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

이번엔 특이하게 두 삼각형에 나눠서 조건들이 있네요. 일단 ABC에는 한 변의 길이가 있죠? 그리고 ACD에도 마찬가지로요. 그리고 두 삼각형에는 각이 모두 같아요. 또한 $\overline{BD}=\overline{DC}$ 이구요. 바로 코사인법칙을 사용해봅시다. $\angle BAD = \angle DAC = \theta$ 라 하고 $\overline{BD} = \overline{DC} = a$, $\overline{AD} = b$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{6^2 + b^2 - a^2}{2 \times 6 \times b} = \frac{8^2 + b^2 - a^2}{2 \times 8 \times b} \text{입니다. 정리하면 } b^2 - a^2 = 48 \text{이 나오네요. 결국 } \cos \theta = \frac{7}{b} \text{입니다.}$$

어? 그런데 $\cos \theta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{b}$ 잖아요? 이게 $\frac{7}{b}$ 이니까 $\overline{AE} = k = 7$ 이네요. $12k = 84$ 입니다.

6. 양수 a 에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$|x(x-2)|g(x) = x(x-2)(|f(x)| - a)$$

이다.

(나) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 과 $x=2$ 에서 미분가능하다.

$g(3a)$ 의 값을 구하시오. [2021년 10월 22]

6. 정답 108 [2021년 10월 22]

1) 조건해석, 절댓값 풀기

$a > 0$ 이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 있습니다. 이때 (가)조건에서 $|x(x-2)|g(x) = x(x-2)(|f(x)| - a)$ 라네요. 일단 이거 해석부터 해봅시다.

절댓값부터 풀어볼까요? 절댓값 안쪽에 있는 $x(x-2)$ 가 0보다 크다면, 즉 $x > 2$ 이거나 $x < 0$ 이면 $g(x) = |f(x)| - a$ 입니다. $x(x-2) \leq 0$ 이면 ($0 \leq x \leq 2$ 이면) $g(x) = -|f(x)| + a$ 입니다. 정리하면

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)| - a & (x > 2, x < 0) \\ -|f(x)| + a & (0 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{입니다.}$$

이건 무슨 함수일까요? 해석 좀 해볼게요. $x < 0$ 이거나 $x > 2$ 이면 $g(x) = |f(x)| - a$ 입니다. 이건 최고차항의 계수가 1인 삼차함수를 절댓값을 씌우고 a 만큼 아래로 내린 함수예요. a 는 양수니까 $-a$ 만큼 움직이면 아래로 내려가게 되죠. 그리고 $0 \leq x \leq 2$ 이면 방금 봤던 걸 부호를 거꾸로 해서 $g(x) = -|f(x)| + a$ 가 됩니다. 결국 $g(x)$ 는 $y = |f(x)| - a$ 를 그린 다음에 $x < 0$ 이거나 $x > 2$ 에서는 그대로, $0 \leq x \leq 2$ 에서는 부호를 반대로 바꾼 함수네요.

2) 미분가능은 연속 확인 + 미분계수 확인

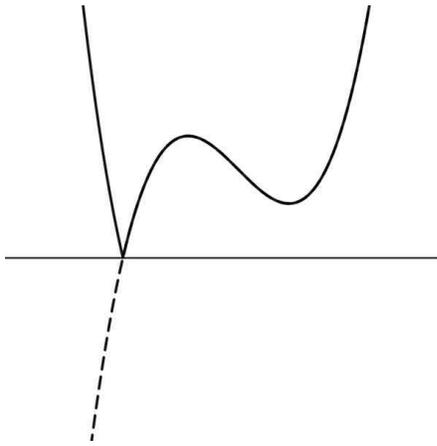
(나)조건에서 $g(x)$ 는 $x = 0$ 과 $x = 2$ 에서 미분가능하답니다. 음.. 이걸 그래프를 그려봐야겠어요. 왜 하필 $x = 0$ 과 $x = 2$ 에서 미분가능하다고 했을까요? 거기에 $g(x)$ 가 변하는 경계 역시 $x = 0$ 과 $x = 2$ 이구요. 매우매우 수상해요.

일단 연속부터 확인해볼까요? $g(x)$ 는 $x = 0$ 과 $x = 2$ 미분가능이니까 연속이어야 합니다. 따라서 좌극한 우극한 함숫값이 모두 같아야 하죠! $x = 0$ 부터 확인해보면 $|f(0)| - a = -|f(0)| + a$ 이고 $|f(0)| = a$ 입니다. 이거 이렇게 되면 $g(0) = 0$ 이네요? $x = 2$ 도 확인해보면 $|f(2)| - a = -|f(2)| + a$ 이고 $|f(2)| = a$ 입니다. 이것도 $g(2) = 0$ 이네요.

일단 중요한 거 두 가지가 나왔어요. 일단 $|f(0)| = a$ 과 $|f(2)| = a$ 입니다. 절댓값을 씌웠을 때 값이 같다는 거예요. 그리고 $g(0) = 0$, $g(2) = 0$ 이라는 겁니다. 이거 토대로 그래프 그려봅시다.

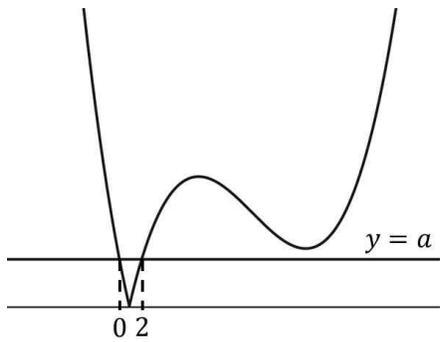
3) 함수 보이면 관찰 \rightarrow 그래프 그리기

만약 $f(x)$ 와 $|f(x)|$ 가



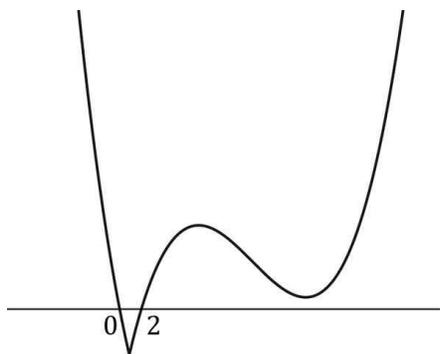
이렇게 생겼다고 가정해봅시다. 그러면 우리는 $y = a$ 를 설정하고

$x = 0$ 과 $x = 2$ 를 설정해야 해요. 만약



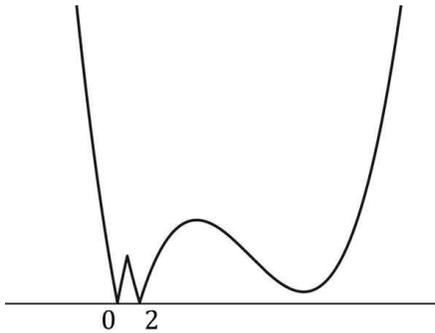
이렇게 설정했다고 해봅시다. 아까 우리 $g(x)$ 를 어떻게 해석했었죠?

$y = |f(x)| - a$ 를 그린 다음에 $x < 0$ 이거나 $x > 2$ 에서는 그대로, $0 \leq x \leq 2$ 에서는 부호를 반대로 바꾼 함수라고 했었잖아요. 그럼 먼저 저 $y = |f(x)|$ 를 a 만큼 아래로 내리면



이렇게 되구요, 이 상태에서 $x < 0$ 이거나 $x > 2$ 에서는 그대로,

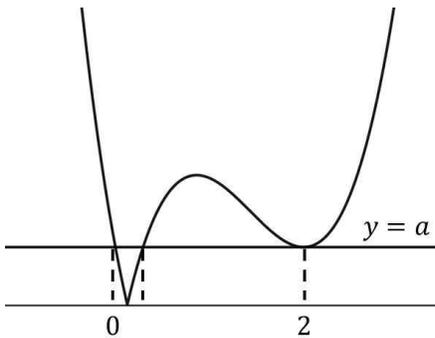
$0 \leq x \leq 2$ 에서는 부호를 반대로 바꿔주면?



이렇게 됩니다. 이게 $g(x)$ 예요. $x=0$ 과 $x=2$ 에서 미분가능한가요?

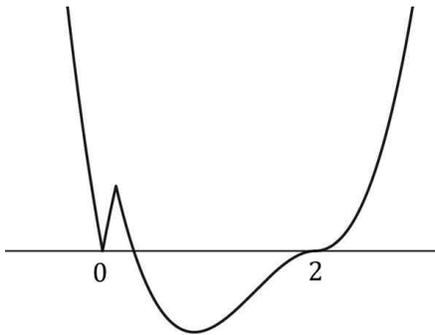
아닌데요?

이거 혹시 접하지 않는 부분에서 $x=0$ 과 $x=2$ 를 설정하면 미분불가능해지는 거 아닐까요? 이번엔 접하는 부분이 있도록 해봅시다.



이렇게 해봅시다. 이러면 $x=0$ 과 $x=2$ 를 설정하는 경우의 수가

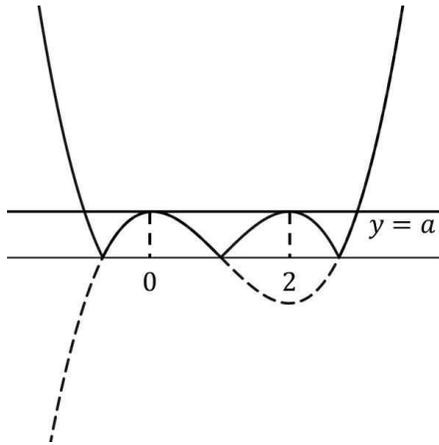
많아져요. 그런데 우리는 접하는 부분을 보려고 하는 거니까 그림과 같이 설정해볼게요. 그러면 a 만큼 내리고 $x < 0$ 이거나 $x > 2$ 에서는 그대로, $0 \leq x \leq 2$ 에서는 부호를 반대로 바꿔주면



이렇게 됩니다. 예상이 맞았네요. 접하지 않았던 $x=0$ 에서는 미분불가능,

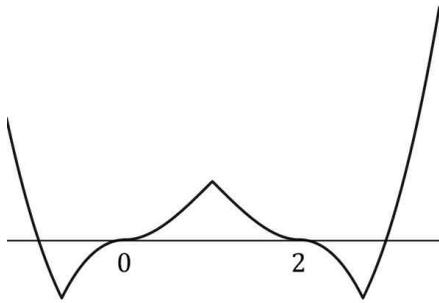
접했던 $x=2$ 에서는 미분가능이에요. 결국 우리는 $y=|f(x)|$ 과 $y=a$ 가 접하는 두 점을 각각 $x=0$, $x=2$ 로 설정하면 됩니다.

이러면 쉬워지죠. 삼차함수를 절댓값을 씌워 접어 올린 함수가 $y = a$ 와 두 번 접하게 되는 경우는 뭔가요?



이거죠. 해볼까요? 일단 a 만큼 내리고 $x < 0$ 이거나 $x > 2$ 에서는 그대로,

$0 \leq x \leq 2$ 에서는 부호를 반대로 바꿔주면



이렇게 됩니다. $x = 0, x = 2$ 에서는 미분가능 맞네요!

4) 함수 구하기 - 삼차함수의 비율 관계

위와 같은 삼차함수의 특징이 뭔가요? 극댓값과 극솟값의 부호만 반대로 절댓값이 같은 함수 말이에요.

변곡점이 x 축 위에 있어야 합니다. 극댓값과 극솟값의 중점은 변곡점에서의 함수값인데 극댓값과 극솟값을 더하면 0이 되니까 변곡점에서의 함수값 역시 0이 되죠. 또한 변곡점의 x 좌표는 $x = 0$ 과 $x = 2$ 의 중간인 $x = 1$ 입니다. 따라서 $f(x)$ 는 $f(1) = 0$ 이어야 하는 거죠.

이건 도함수부터 적분해서 올라오는 게 편하겠네요. $f'(0) = f'(2) = 0$ 이므로 인수정리에 의하여

$f'(x) = 3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$ 입니다. 적분하면 $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$ 인데 $f(1) = 0$ 이니까

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 이네요. 극댓값은 2이니까 $a = 2$ 입니다.

이제 $g(3a) = g(6)$ 을 구해봅시다. $g(6) = |f(6)| - 2 = 108$ 이네요.

확통

7. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 할 때, 두 수 a, b 의 최대공약수가 홀수일 확률은?
[2021년 10월 확통 26]

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

7. 정답 ⑤ [2021년 10월 확통 26]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수 a, b 의 최대공약수가 홀수일 확률을 구합니다.

일단 구하는 경우의 수는 $\frac{\text{두 눈의 최대공약수 홀수}}{\text{주사위 두 번 던지기}}$ 이네요.

주사위 두 번 던지는 경우의 수는 $6^2 = 36$ 이죠? a, b 의 최대공약수가 홀수라는 건 어떤 의미일까요? 그럼 일단 아무거나 해봅시다. 홀수라는 게 있으니까 짝수랑 홀수랑 나눠서 접근하는 게 편하겠죠?

홀수+홀수면 당연히 최대공약수도 홀수일 거구요. 짝수+짝수이면 당연히 최대공약수도 짝수일 거예요. 홀수+짝수만 확인해보면 되겠네요. 1과 2 해봅시다. 최대공약수는 1이니까 홀수네요. 1과 4, 1과 6도 마찬가지로요. 2와 3이면? 최대공약수는 1로 홀수구요. 2와 5도 마찬가지입니다. 이거 홀수+짝수면 무조건 최대공약수가 홀수인가봐요. 조금 더 해볼까요?

3과 4면 최대공약수는 1, 3과 6이면 최대공약수는 3으로 모두 홀수입니다. 4와 5도 최대공약수는 1로 홀수구요, 5와 6도 최대공약수는 1로 홀수입니다. 끝났네요. 우린 결국 짝수+짝수인 경우만 전체에서 빼면 됩니다. 나머지 경우는 모두 최대공약수가 홀수니까요.

6이하의 짝수는 3개니까 $3 \times 3 = 9$ 입니다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{36-9}{36} = \frac{3}{4}$ 입니다. 답은 ⑤이네요.

8. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f 가 4 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $f(2n-1) < f(2n)$ 일 때, $f(1) = f(5)$ 일 확률은? [2021년 10월 확통 28]

- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{5}{28}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

8. 정답 ② [2021년 10월 확통 28]

1) 자연수 보이면 숫자 넣기, 조건부확률 A 일 때 B 일 확률 $= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$

$$\frac{A \text{이고 } B \text{일 경우의수}}{A \text{일 경우의수}}$$

$X = \{x | x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 인데 X 에서 X 로의 함수 f 중에서 하나를 임의로 선택한답니다. 이때 4 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $f(2n-1) < f(2n)$ 일 때, $f(1)=f(5)$ 일 확률을 구하라네요. 구하는 확률은

$$\frac{f(1)=f(5)}{f(2n-1) < f(2n)}$$
 이죠?

일단 $f(2n-1) < f(2n)$ 인 경우부터 볼게요. 이거 자연수 각각 넣어보면

$f(1) < f(2)$, $f(3) < f(4)$, $f(5) < f(6)$, $f(7) < f(8)$ 이죠? 이러면 $f(1)$ 과 $f(2)$, $f(3)$ 과 $f(4)$, $f(5)$ 와 $f(6)$, $f(7)$ 과 $f(8)$ 을 각각 짝지어서 각 묶음마다 1부터 8까지의 8개 중에서 2개를 고르게 하면 됩니다. 그러면 자동적으로 순서가 정해지니까요. 이걸 ${}_8C_2 = 28$ 을 네 번 반복하는 거니까 28^4 입니다.

이제 분자로 가봅시다. $f(1) < f(2)$, $f(3) < f(4)$, $f(5) < f(6)$, $f(7) < f(8)$ 를 충족하면서 $f(1)=f(5)$ 를 만족시켜야 해요. 일단 이거랑 상관없는 $f(3)$, $f(4)$, $f(7)$, $f(8)$ 은 그냥 그대로 고르면 됩니다. 28^2 이네요.

이제 $f(1)=f(5) < f(2)$, $f(6)$ 을 확인해야 합니다. $f(1)=f(5)=1$ 이라면? $f(2)$ 와 $f(6)$ 은 2부터 8까지 고르면 되죠. 경우의 수는 $7 \times 7 = 49$ 입니다. $f(1)=f(5)=2$ 이면 3부터 8까지 고르면 되고 $6 \times 6 = 36$ 입니다. 패턴이 보이죠? 다음은 $5 \times 5 = 25$ 일 거고 이런 식으로 쭉루룩 가면 $f(1)=f(5)=7$ 일 때를 마지막으로 전체 경우의 수는 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$ 입니다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{28^2 \times 140}{28^4} = \frac{5}{28}$ 입니다. 답은 ②이네요.

9. 주머니에 12개의 공이 들어 있다. 이 공들 각각에는 숫자 1, 2, 3, 4 중 하나씩이 적혀 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 4개의 수의 합을 확률변수 X 라 할 때, 확률변수 X 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) P(X=4) = 16 \times P(X=16) = \frac{1}{81}$$

$$(나) E(X) = 9$$

$V(X) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [2021년 10월 확통 30]

9. 정답 23 [2021년 10월 확통 30]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

주머니에 12개의 공이 들어 있는데 이 공 각각에는 1, 2, 3, 4 중 하나가 적혀 있습니다. 이 중 하나를 꺼내서 공에 적혀 있는 수를 확인한 후에 다시 넣는 걸 4번 반복해서 4개 수의 합을 X 라고 한다네요. 이거 보니까 1, 2, 3, 4이 각각 몇 개인지는 아직 모르는 것 같아요. 계속 가봅시다.

(가)조건에서 $P(X=4)=16 \times P(X=16)=\frac{1}{81}$ 이랍니다. 정리하자면 $P(X=4)=\frac{1}{81}$ 이고

$P(X=16)=\frac{1}{81 \times 16}$ 이라는 거죠?

$X=4$ 라는 건 어떤 의미인가요? 4번 반복한 수의 합이 4라는 건데 이걸 모든 경우에서 1을 뽑아야 가능한 거네요. 일단 최소한 1개는 존재합니다. 근데 정확한 개수는 몰라요.

이거 그러면 하기 전에 1의 개수를 a , 2의 개수를 b , 3의 개수를 c , 4의 개수를 d 라고 할게요. 그러면 $a+b+c+d=12$ 이죠? 총 12개니까요.

$X=4$ 가 되기 위해서는 12개 중에서 1이 적힌 공만 4번 뽑아야 해요. 그러면 확률은 $\left(\frac{a}{12}\right)^4$ 이네요. 이게

$\frac{1}{81}=\left(\frac{1}{3}\right)^4$ 이니까 $\frac{a}{12}=\frac{1}{3}$ 이고 $a=4$ 입니다. 1이 적힌 공은 4개이네요.

$X=16$ 이라는 거는요? 4가 적힌 공만 4번 뽑아야죠. 확률은 $\left(\frac{d}{12}\right)^4$ 인데 이게 $\frac{1}{81 \times 16}=\left(\frac{1}{3 \times 2}\right)^4$ 이니까

$\frac{d}{12}=\frac{1}{6}$ 이고 $d=2$ 입니다. 4가 적힌 공은 2개입니다.

(나)조건에서 $E(X)=9$ 이랍니다. 음...

일단 X 는 어떻게 가능한가요? 4부터 16까지의 자연수가 가능해요. 4, 5, 6, ..., 16이 가능한 거죠. 그럼 이거 다 계산해야 하나요?

아니죠. 생각해 보세요. 모집단에서 임의추출한 표본의 평균을 \bar{X} 라 할 때 $E(X)=E(\bar{X})$ 가 성립하죠? 이 상황도 마찬가지로 아닌가요? 12개의 공 중에서 하나를 뽑는 시행을 모집단이라 하면 그 중에서 4번을 임의추출해서

더하면 그게 X 가 되죠. 그러면 12개의 공 중에서 하나를 뽑아 그 수를 확률변수 Y 라 하면 Y 의 평균과 $\frac{X}{4}$ 의

평균은 같아지는 거 아닌가요? X 는 4번 뽑아 더했으니까 4를 나눠주면 사실상 이게 표본평균인 \bar{Y} 와 같으니까 위에서 설명했던 논리가 적용되죠. 따라서 우리는 Y 의 평균을 구하면 됩니다.

$$E(Y) = E\left(\frac{X}{4}\right) = \frac{E(X)}{4} = \frac{9}{4} \text{이네요.}$$

그런데 이때

Y	1	2	3	4	
$P(Y=y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{b}{12}$	$\frac{c}{12}$	$\frac{1}{6}$	

이잖아요. 1과 4는 위에서 구했었죠. 12개 중에서 1이 적힌 공은 4개니까 1을 뽑을 확률은 $\frac{4}{12}$ 가 되고, 4가 적힌 공은 2개니까 4를 뽑을 확률은 $\frac{2}{12}$ 가 되죠. 남은 공은 6개니까 b 와 c 를 더하면 6이 되겠죠?

$b+c=6$ 입니다.

이제 평균을 구해봅시다. $1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{b}{12} + 3 \times \frac{c}{12} + 4 \times \frac{1}{6} = 1 + \frac{2b+3c}{12} = \frac{9}{4}$ 이고 $\frac{2b+3c}{12} = \frac{5}{4}$ 이니까 $2b+3c=15$ 입니다. 이걸 아까 구한 $b+c=6$ 과 연립하면 $b=3, c=3$ 이 나오네요.

이때 $V(X)$ 를 구하렵니다. 이걸 아까 구한 논리로 또 하면 되겠죠? $V(X) = V(4\bar{Y}) = 16V(\bar{Y})$ 인데

$$V(\bar{Y}) = \frac{V(Y)}{n} = \frac{V(Y)}{4} \text{이므로 } V(X) = V(4\bar{Y}) = 16V(\bar{Y}) = 4V(Y) \text{이네요.}$$

$$E(Y) = \frac{9}{4} \text{ 이고 } E(Y^2) = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{9}{4} + \frac{8}{3} = \frac{25}{4} \text{이므로}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{25}{4} - \frac{81}{16} = \frac{19}{16} \text{입니다. 따라서 } V(X) = 4V(Y) = \frac{19}{4} \text{이네요. } p=4, q=19 \text{이니까}$$

$p+q=23$ 입니다.