지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00037927032

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

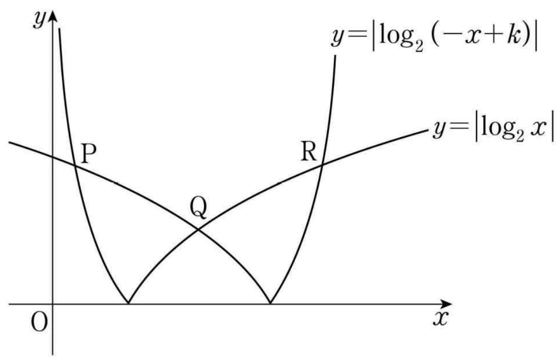
https://atom.ac/books/8588

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 2보다 큰 상수 k에 대하여 두 곡선 $y=\left|\log_2(-x+k)\right|$, $y=\left|\log_2 x\right|$가 만나는 세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하자. $x_3-x_1=2\sqrt{3}$일 때, x_1+x_3의 값은? (단, $x_1<x_2<x_3$) 〔2021년 10월 08〕

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



1. 정답 ③ 〔2021년 10월 08〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$k>2$인데 $y=\left|\log_2(-x+k)\right|$와 $y=\left|\log_2 x\right|$가 만나는 세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라고 한답니다. $x_1<x_2<x_3$이구요. $x_3-x_1=2\sqrt{3}$일 때 x_1+x_3를 구하라네요.

일단 x_1은 $y=-\log_2 x$과 $y=\log_2(-x+k)$가 만나는 점이죠? $-\log_2 x_1=\log_2(-x_1+k)$인데 $-\log_2 x_1=\log_2\dfrac{1}{x_1}$이니까 $\dfrac{1}{x_1}=-x_1+k$입니다. 정리하면 $x_1^{\ 2}-kx_1+1=0$이네요.

x_2는... 이건 일단 나중에 해봅시다. 우리가 구하는 거엔 안 들어가니까요.

x_3은 $y=\log_2 x$와 $y=-\log_2(-x+k)$가 만나는 점입니다. $\log_2 x_3=-\log_2(-x_3+k)$인데 $-\log_2(-x_3+k)=\log_2\dfrac{1}{(-x_3+k)}$이므로 $x_3=\dfrac{1}{-x_3+k}$이고 $x_3^{\ 2}-kx_3+1=0$입니다.

어? 모양이 똑같네요? 이건 결국 $x^2-kx+1=0$의 두 실근이 x_1과 x_3이라는 거잖아요? 근과 계수와의 관계에 의하여 $x_1+x_3=k$, $x_1x_3=1$입니다. 이때 $x_3-x_1=2\sqrt{3}$이니까 제곱하면 $x_3^{\ 2}-2x_3x_1+x_1^{\ 2}=12$입니다. $4x_1x_3$을 더해주면 $x_3^{\ 2}+2x_3x_1+x_1^{\ 2}=(x_3+x_1)^2=k^2=16$이죠? $k>2$이므로 $k=x_1+x_3=4$입니다. 답은 ③이네요.

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 상수이다.) 〔2021년 10월 13〕

<보 기>

ㄱ. $a^2 \le 3b$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 정답 ① 〔2021년 10월 13〕

1) 항등식은 수치대입, 계수비교,

$f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 있답니다. 역함수가 존재한다구요? 그러면 $g'(x)\geq 0$이어야겠네요. 최고차항의 계수가 1이니까 계속 증가하는 모양이거나 한 번만 $g'(x)=0$이 되면서 방향은 바꾸지 않는 모양이 되어야 역함수의 조건인 “치역=공역”과 “일대일함수”를 만족시킬 수 있을 테니까요. 따라서 $g'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$이고 판별식이 0보다 작거나 같아야 합니다. $a^2-3b\leq 0$이므로 $a^2\leq 3b$입니다. ㄱ은 맞네요!

ㄴ에서 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖냐고 물어봅니다. 이건 식을 구해봐야겠죠?
아까 모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$라고 했었잖아요. 항등식이네요? 그럼 수치대입과 계수비교를 해야죠. 여긴 식을 줬으니까 계수비교가 편할 것 같네요. 다 넣어봅시다.
$2f(x)=x^3+ax^2+bx+c-(-x^3+ax^2-bx+c)=2x^3+2bx$이고 $f(x)=x^3+bx$입니다. 이거 미분하면 $f'(x)=3x^2+b$인데 이게 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 커야 합니다. 그러면 결국 $-12b>0$이고 $b<0$이여야 하네요. 그런데 아까 $a^2\leq 3b$라고 했었잖아요? $a^2\geq 0$이니까 $0\leq a^2\leq 3b$이죠. $b\geq 0$인데요? ㄴ은 아닙니다.

ㄷ에서 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이냐고 물어봅니다. 아까 서로 다른 두 실근을 가질 때 $b<0$여야 한다고 했었죠? 이번엔 그냥 “실근”이니까 판별식이 0이 것도 포함입니다. 따라서 $b\leq 0$여야 하겠네요.
$b\geq 0$이고 $b\leq 0$인 건? $b=0$만 가능하죠. 따라서 $b=0$입니다. $0\leq a^2\leq 0$이니까 $a=0$이네요.
$g'(x)=3x^2$이고 $g'(1)=3$입니다. 아니네요! ㄷ도 아닙니다. 따라서 맞는 건 ㄱ이고 답은 ①번이네요.

3. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)dt+5 & (x<c) \\ \left|\displaystyle\int_0^x f(t)dt-\frac{13}{3}\right| & (x \ge c) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1일 때, $g(1)$의 최댓값은? 〔2021년 10월 15〕

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

3. 정답 ⑤ 〔2021년 10월 15〕

1) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 절댓값 풀기

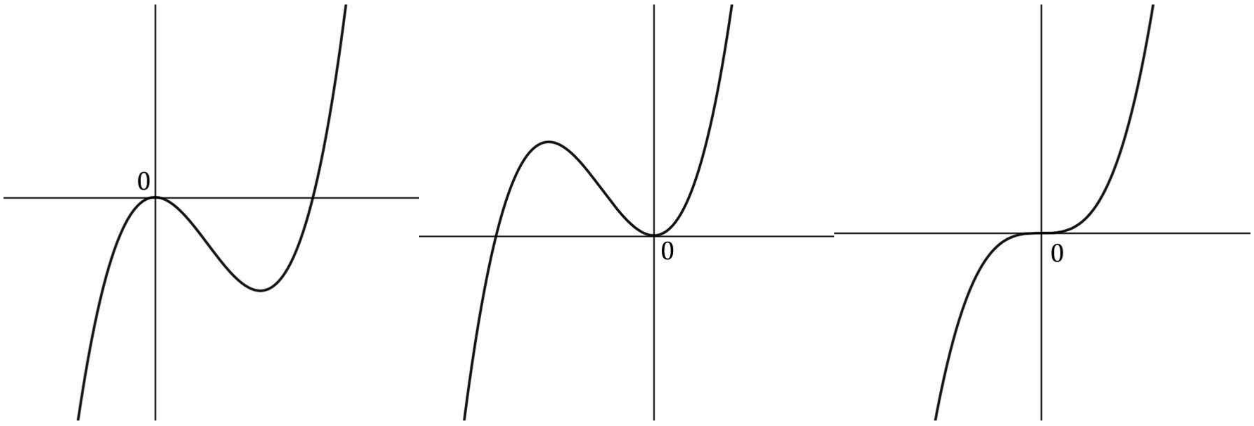
최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 $f(0)=f'(0)=0$이랍니다. 일단 $x=0$에서 x축에 접하네요. 그리고는 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1개일 때 $g(1)$의 최댓값을 구하라네요.

일단 연속이 되어야 한다는 것부터 확인해봅시다. 좌극한 우극한 함숫값이 모두 같아야 하죠? 따라서 $\int_0^c f(t)dt+5=\left|\int_0^c f(t)dt-\frac{13}{3}\right|$입니다. 절댓값이 있으니까 범위 나누고 풀어보죠. $\int_0^c f(t)dt>\frac{13}{3}$이라면 $\int_0^c f(t)dt+5=\int_0^c f(t)dt-\frac{13}{3}$입니다. 말이 안 되죠? $5=-\frac{13}{3}$은 말이 안 되잖아요. 따라서 $\int_0^c f(t)dt\le\frac{13}{3}$이고 $\int_0^c f(t)dt+5=-\int_0^c f(t)dt+\frac{13}{3}$이네요. 정리하면 $\int_0^c f(t)dt=-\frac{1}{3}$입니다. 결국 $\int_0^c f(t)dt=-\frac{1}{3}$인 c가 하나만 존재해야 한다는 거예요.

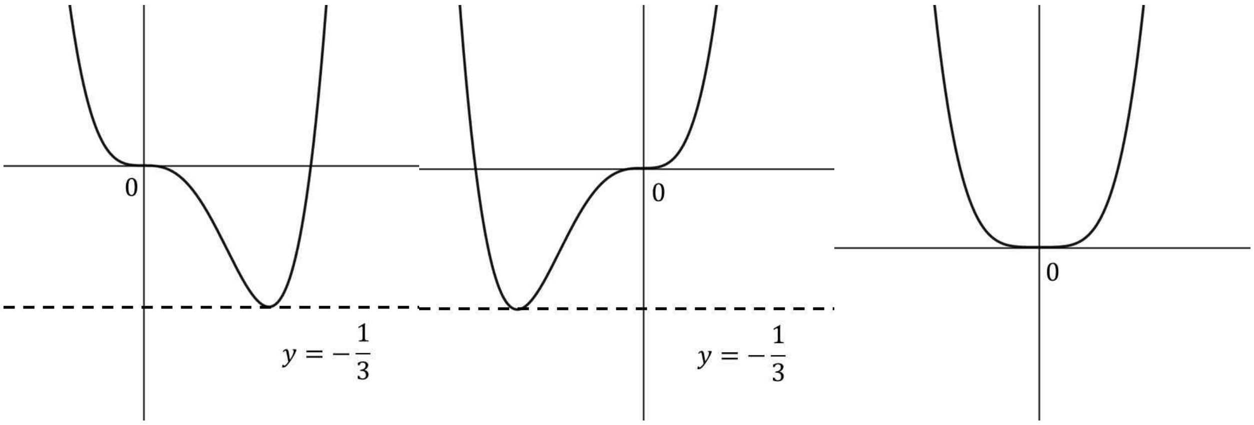
2) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

일단 $\int_0^x f(t)dt=F(x)$라 할게요. 그러면 $F(c)=-\frac{1}{3}$인 c가 하나만 존재해야 하죠? 다시 말하면 $y=F(x)$와 $y=-\frac{1}{3}$이 단 한 번만 만나야 합니다.

여기서 $F(x)$는 $f(x)$를 적분한 함수죠? $F(0)=0$이구요. $f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수인데 $x=0$에서 접하는 함수에요. 가능한 경우는



이렇게 셋 중 하나죠. 이걸 적분하고 원점을 지나도록 하면 각각



이렇게 됩니다. 이 중 가장 오른쪽 거는 안 되죠. $y=-\frac{1}{3}$과 만나지 않잖아요. 따라서 $F(x)$의 극솟값이 $-\frac{1}{3}$이어야 합니다.

3) 함수 구하기 - 인수정리

$f(x)$부터 구해봅시다. 일단 $f(x)$가 x축과 만나는 $x=0$이 아닌 점의 x좌표를 a라 할게요. 그러면 $f(x)=4x^2(x-a)=4x^3-4ax^2$이죠? 이걸 적분하고 원점을 지나게 하면 $x^4-\frac{4}{3}ax^3$입니다. $x=a$에서 극소니까 극솟값은 $-\frac{1}{3}a^4$이죠? 이게 $-\frac{1}{3}$이므로 $a^4=1$이고 $a^2=1$입니다. $a=1$이거나 $a=-1$이네요.

$y=F(x)$와 $y=-\frac{1}{3}$이 $x=c$에서 단 한 번만 만나야 하잖아요? 그러면 c도 a랑 같게 되겠네요. 극소가 되는 x좌표가 a인데 이게 c이기도 해야 $y=F(x)$와 $y=-\frac{1}{3}$이 $x=c$에서 단 한 번만 만나죠. $c=1$이거나 $c=-1$입니다.

우리는 $g(1)$의 최댓값을 구해야 하죠? 케이스를 나눠야겠어요. 만약 $c=1$이라면 그냥 넣으면 되겠네요.

$F(c)=\int_0^c f(t)dt=-\frac{1}{3}$이니까 $g(1)=\int_0^c f(t)dt+5=\left|\int_0^c f(t)dt-\frac{13}{3}\right|=\frac{14}{3}$입니다. $c=-1$이라면

$g(1)=\left|\int_0^1 f(t)dt-\frac{13}{3}\right|$인데 $f(x)=4x^3+4x^2$이므로

$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(4t^3+4t^2)dt=\left[t^4+\frac{4}{3}t^3\right]_0^1=\frac{7}{3}$입니다. $g(1)=2$이네요. 둘 중 큰 건 $\frac{14}{3}$이죠? 따라서 답은 ⑤입니다.

(논란이 있는 문제이나 저는 $g(x)$가 연속일 때 $g(1)$의 최댓값을 구해야 한다는 것으로 해석하고 해설을 작성했습니다!)

4. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. 〔2021년 10월 20〕

4. 정답 2 〔2021년 10월 20〕

1) 문제해석

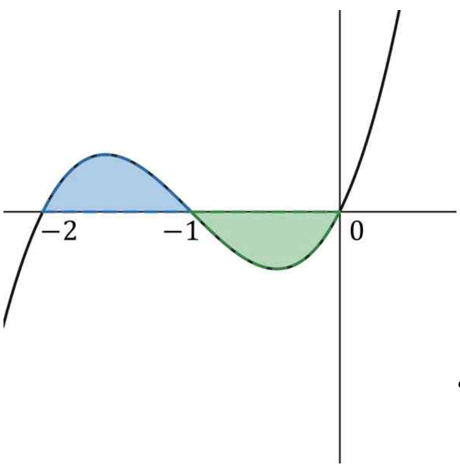
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 원점을 지나고 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨답니다. 이거 어디서 많이 봤죠?

넘기면 $f(1-x)+f(1+x)=0$이 되고 2로 나누면 $\dfrac{f(1-x)+f(1+x)}{2}=0$가 됩니다. $1-x$와 $1+x$를 더하고 2로 나누면 1이 되죠. 이 형태는 결국 $f(x)$가 (1, 0) 대칭이라는 말이 됩니다. 1에서 x만큼 떨어진 곳에서의 함숫값과 $-x$만큼 떨어진 곳에서의 함숫값의 부호가 항상 반대가 되어야 하고, 두 함숫값의 중점은 0이 되어야 하니까 둘은 점 (1, 0)을 중심으로 대칭되는 형태가 되겠죠. $f(1)=0$이겠어요.

이때 $f(0)=0$이잖아요? (1, 0)대칭인데 (0, 0)을 지나면 당연히 (2, 0)도 지나야죠. 인수정리에 의해 $f(x)=x(x-1)(x-2)$입니다.

2) 정적분 관찰

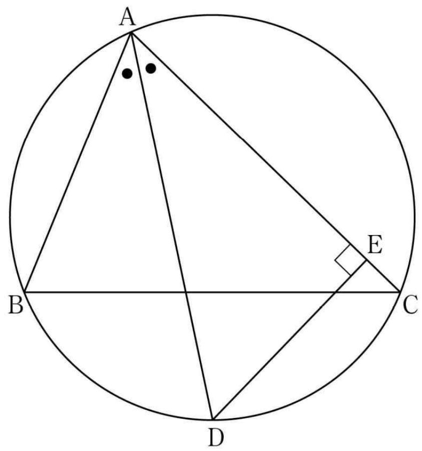
$y=f(x)$와 $y=-6x^2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 일단 만나는 부분부터 찾아봐야겠어요.
$f(x)-(-6x^2)=x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$이니까 $x=0$, $x=-1$, $x=-2$에서 만나네요. 이거 근데 그래프 그려보면



이렇게 되네요. 이거 $(-1,\ 0)$대칭이죠? x축과 만나는 점간의 간격이 모두 같잖아요. 대칭이라는 거죠. 그러면 -2에서 -1, -1에서 0까지 각각 적분할 필요없이 -1에서 0까지만 적분하고 $\times 2$해버리면 되겠어요. 대칭이니까 적분값 역시 부호가 반대가 되겠죠. 따라서

$2\left|\int_{-1}^{0} f(x)+6x^2dx\right|=2\times\left|\left[\dfrac{x^4}{4}+x^3+x^2\right]_{-1}^{0}\right|=\dfrac{1}{2}$입니다. $4S=2$입니다.

5. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$인 예각삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. 〔2021년 10월 21〕

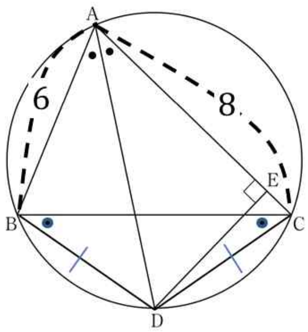


5. 정답 84 〔2021년 10월 21〕

1) 그림 있으면 그림 보면서

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC가 있는데 $\angle A$의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D라고 한답니다. 이등분되어 있는 거 보이시죠? D도 보이구요. 그리고 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 한답니다. 직각 표시도 되어 있네요. 이때 선분 AE의 길이를 k라 하고 $12k$를 구하랍니다.

일단 $\angle A$이 이등분 되어 있는데



이렇게 선분을 그어주면 원주각이 모두 같아지고, 삼각형 BDC가 이등변삼각형이 됩니다. 그러면 $\overline{BD}=\overline{DC}$이죠?

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

이번엔 특이하게 두 삼각형에 나눠서 조건들이 있네요. 일단 ABC에는 한 변의 길이가 있죠? 그리고 ACD에도 마찬가지구요. 그리고 두 삼각형에는 각이 모두 같아요. 또한 $\overline{BD}=\overline{DC}$이구요. 바로 코사인법칙을 사용해봅시다. $\angle BAD=\angle DAC=\theta$라 하고 $\overline{BD}=\overline{DC}=a$, $\overline{AD}=b$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{6^2+b^2-a^2}{2\times 6\times b}=\dfrac{8^2+b^2-a^2}{2\times 8\times b}$ 입니다. 정리하면 $b^2-a^2=48$이 나오네요. 결국 $\cos\theta=\dfrac{7}{b}$입니다.

어? 그런데 $\cos\theta=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AE}}{b}$ 잖아요? 이게 $\dfrac{7}{b}$이니까 $\overline{AE}=k=7$이네요. $12k=84$입니다.

6. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $$\lvert x(x-2)\rvert g(x)=x(x-2)(\lvert f(x)\rvert-a)$$ 이다. (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$g(3a)$의 값을 구하시오. 〔2021년 10월 22〕

6. 정답 108 〔2021년 10월 22〕

1) 조건해석, 절댓값 풀기

$a>0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있답니다. 이때 (가)조건에서 $|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$라네요. 일단 이거 해석부터 해봅시다.

절댓값부터 풀어볼까요? 절댓값 안쪽에 있는 $x(x-2)$가 0보다 크다면, 즉 $x>2$이거나 $x<0$이면 $g(x)=|f(x)|-a$입니다. $x(x-2)\le 0$이면($0\le x\le 2$이면) $g(x)=-|f(x)|+a$입니다. 정리하면 $g(x)=\begin{cases}|f(x)|-a & (x>2,\ x<0)\\ -|f(x)|+a & (0\le x\le 2)\end{cases}$입니다.

이건 무슨 함수일까요? 해석 좀 해볼게요. $x<0$이거나 $x>2$이면 $g(x)=|f(x)|-a$입니다. 이건 최고차항의 계수가 1인 삼차함수를 절댓값을 씌우고 a만큼 아래로 내린 함수에요. a는 양수니까 $-a$만큼 움직이면 아래로 내려가게 되죠. 그리고 $0\le x\le 2$이면 방금 봤던 걸 부호를 거꾸로 해서 $g(x)=-|f(x)|+a$가 됩니다. 결국 $g(x)$는 $y=|f(x)|-a$를 그린 다음에 $x<0$이거나 $x>2$에서는 그대로, $0\le x\le 2$에서는 부호를 반대로 바꾼 함수네요.

2) 미분가능은 연속 확인 + 미분계수 확인

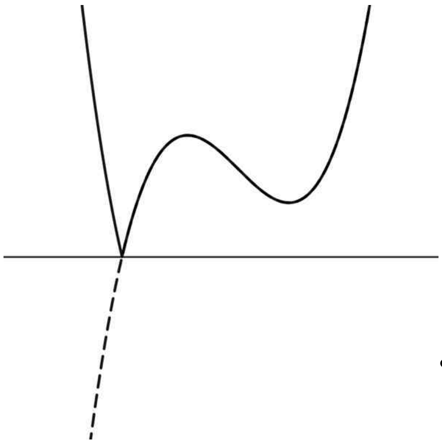
(나)조건에서 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하답니다. 음.. 이건 그래프를 그려봐야겠어요. 왜 하필 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다고 했을까요? 거기에 $g(x)$가 변하는 경계 역시 $x=0$과 $x=2$이구요. 매우매우 수상해요.

일단 연속부터 확인해볼까요? $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$ 미분가능이니까 연속이어야 합니다. 따라서 좌극한 우극한 함숫값이 모두 같아야 하죠! $x=0$부터 확인해보면 $|f(0)|-a=-|f(0)|+a$이고 $|f(0)|=a$입니다. 이거 이렇게 되면 $g(0)=0$이네요? $x=2$도 확인해보면 $|f(2)|-a=-|f(2)|+a$이고 $|f(2)|=a$입니다. 이것도 $g(2)=0$이네요.

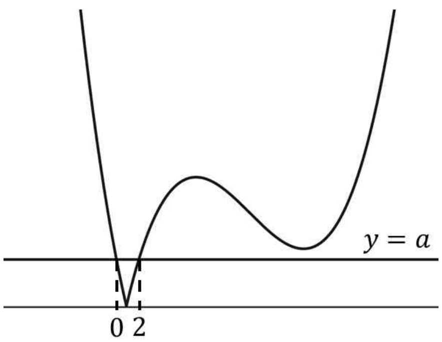
일단 중요한 거 두 가지가 나왔어요. 일단 $|f(0)|=a$과 $|f(2)|=a$입니다. 절댓값을 씌웠을 때 값이 같다는 거예요. 그리고 $g(0)=0$, $g(2)=0$이라는 겁니다. 이거 토대로 그래프 그려봅시다.

3) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

만약 $f(x)$와 $|f(x)|$가

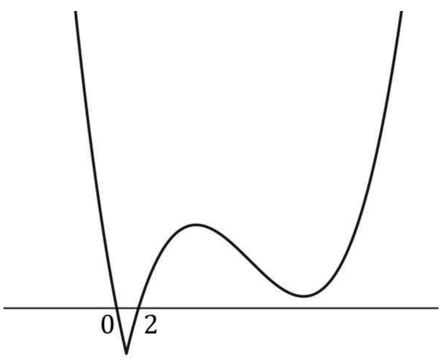


이렇게 생겼다고 가정해봅시다. 그러면 우리는 $y=a$를 설정하고 $x=0$과 $x=2$를 설정해야 해요. 만약



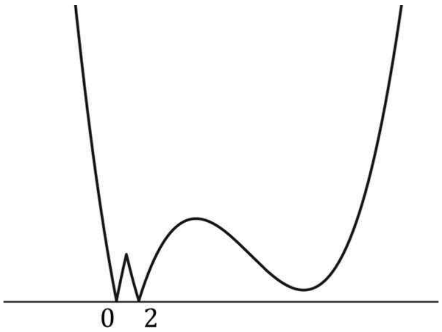
이렇게 설정했다고 해봅시다. 아까 우리 $g(x)$를 어떻게 해석했었죠?

$y=|f(x)|-a$를 그린 다음에 $x<0$이거나 $x>2$에서는 그대로, $0 \leq x \leq 2$에서는 부호를 반대로 바꾼 함수라고 했었잖아요. 그럼 먼저 저 $y=|f(x)|$를 a만큼 아래로 내리면



이렇게 되구요, 이 상태에서 $x<0$이거나 $x>2$에서는 그대로,

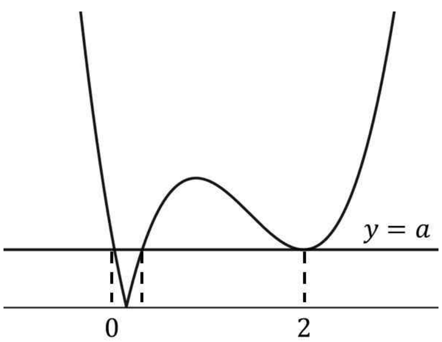
$0 \leq x \leq 2$에서는 부호를 반대로 바꿔주면?



이렇게 됩니다. 이게 $g(x)$에요. $x=0$과 $x=2$에서 미분가능한가요?

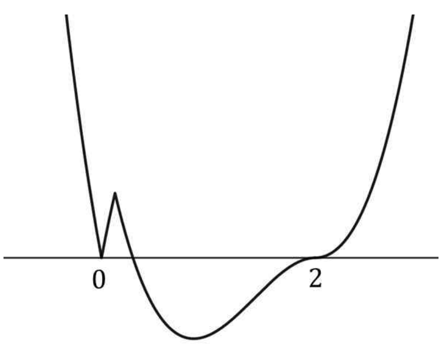
아닌데요?

이거 혹시 접하지 않는 부분에서 $x=0$과 $x=2$를 설정하면 미분불가능해지는 거 아닐까요? 이번엔 접하는 부분이 있도록 해봅시다.



이렇게 해봅시다. 이러면 $x=0$과 $x=2$를 설정하는 경우의 수가

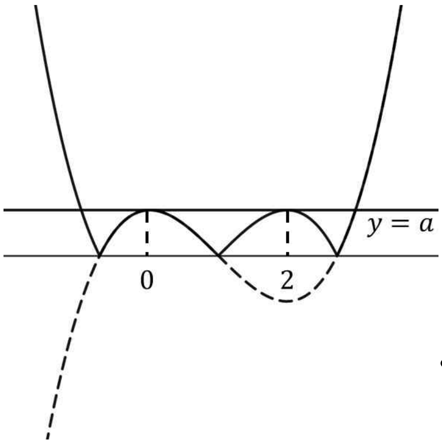
많아져요. 그런데 우리는 접하는 부분을 보려고 하는 거니까 그림과 같이 설정해볼게요. 그러면 a만큼 내리고 $x<0$이거나 $x>2$에서는 그대로, $0 \leq x \leq 2$에서는 부호를 반대로 바꿔주면



이렇게 됩니다. 예상이 맞았네요. 접하지 않았던 $x=0$에서는 미분불가능,

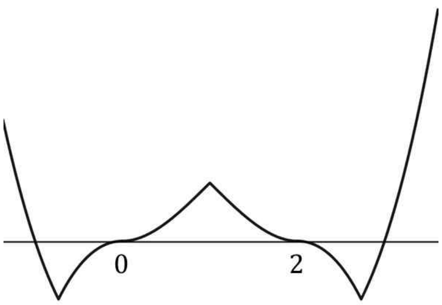
접했던 $x=2$에서는 미분가능이에요. 결국 우리는 $y=|f(x)|$과 $y=a$가 접하는 두 점을 각각 $x=0$, $x=2$로 설정하면 됩니다.

이러면 쉬워지죠. 삼차함수를 절댓값을 씌워 접어 올린 함수가 $y=a$와 두 번 접하게 되는 경우는 뭔가요?



이거죠. 해볼까요? 일단 a만큼 내리고 $x<0$이거나 $x>2$에서는 그대로,

$0 \le x \le 2$에서는 부호를 반대로 바꿔주면



이렇게 됩니다. $x=0$, $x=2$에서는 미분가능 맞네요!

4) 함수 구하기 - 삼차함수의 비율 관계

위와 같은 삼차함수의 특징이 뭔가요? 극댓값과 극솟값의 부호만 반대고 절댓값이 같은 함수 말이에요.
변곡점이 x축 위에 있어야 합니다. 극댓값과 극솟값의 중점은 변곡점에서의 함숫값인데 극댓값과 극솟값을 더하면 0이 되니까 변곡점에서의 함숫값 역시 0이 되죠. 또한 변곡점의 x좌표는 $x=0$과 $x=2$의 중간인 $x=1$입니다. 따라서 $f(x)$는 $f(1)=0$이어야 하는 거죠.

이건 도함수부터 적분해서 올라오는 게 편하겠네요. $f'(0)=f'(2)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$입니다. 적분하면 $f(x)=x^3-3x^2+C$인데 $f(1)=0$이니까 $f(x)=x^3-3x^2+2$이네요. 극댓값은 2이니까 $a=2$입니다.

이제 $g(3a)=g(6)$을 구해봅시다. $g(6)=|f(6)|-2=108$이네요.