[나승민/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학 연습 (2/4) |

나승민 (성균관대 수학과)

이투스 네오, 미래탐구목동

[할 수 있는 만큼의 최선]을 다하는 한 해 였기를.

instagram @cremath_david

한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY, 일산종로학원

결과와 상관없이 충실한 1년이었길 바랍니당.

hansungeun.com/texta.html – 공개 모의고사 페이지
써밋 N제(미적분), 써밋 N제(수학2) 출간 – 책 사주세요.

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{3}{4}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x-2} - 1}$의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

3. $\int_{-2}^{2} 6(x^3 + x^2)dx$의 값은? [3점]

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 40

4. θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta = \frac{3}{5}$일 때, $\tan\theta + \cos(\pi - \theta)$의 값은 [3점]

① $-\frac{1}{10}$ ② $-\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{20}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{3}{20}$

5. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int (x^3+2x+1)dx-\int (x^3+x)dx$$

이고 $f(1)=3$일 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

6. 부등식

$$\log_2(x+1)+\log_2(2-x)<2$$

을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=8$, $a_{10}=-10$일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{15}|$의 값은? [3점]

① 124 ② 126 ③ 128
④ 130 ⑤ 132

8. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2^{2x}-2^{a+x}+4\geq 0$이 성립한다. 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k a_{k+1}}=4\sqrt{2}\,(2^n-1)$$

일 때, a_4의 값은? [4점]

① 8 ② $8\sqrt{2}$ ③ 16
④ $16\sqrt{2}$ ⑤ 32

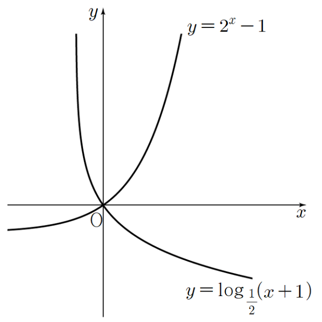
10. 함수 $f(x)=\int_{x-2}^{x+4}(t-4)^2dt$의 $x=a$일 때 최솟값 m을 갖는다. $a+m$의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

11. 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$와
곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$에 대하여

$$x_1x_2+y_1y_2=0,\quad x_1-y_2=6$$

이다. x_2+y_1의 값은? (단, x_1, x_2는 양의 정수이다.) [4점]

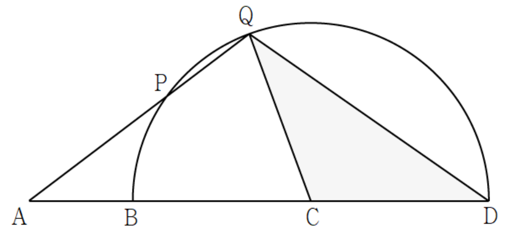


① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

12. 한 직선 위의 네 점 A, B, C, D와 선분 BD를 지름으로 하는 반원 C 위의 점 P가

$$\overline{\mathrm{AC}}=5,\quad \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10},\quad \overline{\mathrm{AP}}=3$$

를 만족시킨다. 직선 AP와 반원 C가 만나는 점 중 P가 아닌 것을 Q라고 할 때, 삼각형 CDQ의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{10}$ ② $\frac{5\sqrt{10}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$
④ $\frac{7\sqrt{10}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

13. 방정식

$$|4\sin 2x+1|=t \quad (0 \le x \le 2\pi)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 할 때,
함수 $y=f(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 모든 α를

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k$$

라 하자. $k+f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\cdots+f(\alpha_k)$의 값은? [4점]

① 25 ② 22 ③ 19
④ 16 ⑤ 13

14. 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=xf(x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $g(0) \le g(4) \le g(x)$이다.

$\int_0^4 f(x)dx=\frac{4}{3}$일 때, $f'(8)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

15. 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 함수 $y=|x-n|$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 a_n, b_n이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a_n < b_n$이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $b_6 - a_6 < 5$

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $2n < a_n + b_n$이다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $(a_n + b_n - n)^2 < a_n b_n$이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하여라. [3점]

17. $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=12$, $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{6}$인 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라. [3점]

18. 함수 $y=-x^2+6x$의 그래프와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $x=2$에 의하여 이등분될 때 m의 값을 구하여라. [3점]

19. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x-f(x)}{x^3}=1$$

을 만족시킬 때, $f(-2)$의 값을 구하여라. [3점]

20. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-2t+2, \quad v_2(t)=2t-1$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 처음으로 같아지는 순간 두 점이 만난다. 이후 $t=a$에서 두 점 P, Q가 다시 만날 때, a의 값을 구하여라. [4점]

21. 등차수열 $\{a_n\}$과 $b_1 = 2$인 수열 $\{b_n\}$는 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다.

(가) $b_{2n} = b_{2n-1} - a_{2n}$ (나) $b_{2n+1} = b_{2n} + a_{2n+2}$

$\sum_{k=1}^{5} b_k = 5b_3$이고 $\sum_{k=1}^{10} b_k = 50$일 때, $a_8 \times a_{10}$의 값을 구하여라. [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \ge 0) \\ 0 & (f(x) < 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)g(2a-x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a값들의 집합이

$$\{5\} \cup \{a \mid a \le 2\}$$

이다. $f(6)$이 가질 수 있는 모든 값의 범위가 $p \le f(6) < q$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B^c)=\frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

24. $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^5의 계수가 -8일 때, x^2의 계수를 구하면? [3점]

① -24 ② -16 ③ 8 ④ 16 ⑤ 24

25. 이산확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, 4이고
이산확률변수 Y가 갖는 값은 3, 5, 7, 9이다.
상수 a에 대하여

$$\mathrm{P}(Y=2k+1)=a\times\mathrm{P}(X=k)+\frac{a}{2}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

이고 $\mathrm{E}(X)=2$일 때, $\mathrm{E}(3Y+2)$의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

26. 어느 대학의 모집인원이 28명인 A학과는 올해 수능 4개 영역 표준점수의 총합을 기준으로 하여 성적순으로 신입생을 선발한다고 한다. 올해 A학과에 지원한 수험생이 400명이고 이들의 성적은 평균 480점, 표준편차 28점인 정규분포를 따른다고 할 때, 이 학과에 합격하기 위한 최저점수를 아래 표준정규분포표를 이용하여 구하면? [3점]

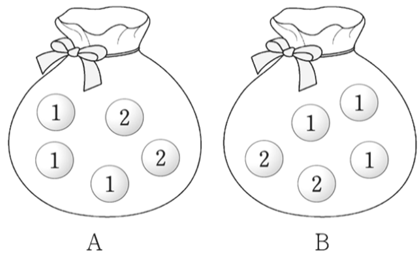
z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 518 ② 522 ③ 526 ④ 530 ⑤ 534

27. 서로 같은 사탕 4개와 서로 다른 초콜릿 3개를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 모든 학생은 사탕을 1개 이상 받고, 초콜릿을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 24 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 48

28. 두 주머니 A, B에는 각각 숫자 1이 적혀 있는 공 3개와 숫자 2가 적혀 있는 공 2개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 하나의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 하나의 공을 꺼내는 시행에서 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 1일 때 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 1이었을 확률은? [4점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

단답형

29. A, A, A, B, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 이웃하지 않게 나열되는 경우의 수를 구하여라. [4점]

30. 1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 30장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 동시에 3장을 선택할 때, 카드에 적힌 세 수의 합이 30이 되는 경우의 수를 구하여라. [4점]

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

24. 함수 $f(x)=\ln(x^2+x)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{3}{4}$　　③ $\frac{4}{5}$　　④ $\frac{5}{6}$　　⑤ $\frac{6}{7}$

25. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x = 2t^3, \quad y = 3t^2$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2\sqrt{2}$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

26. $a_1 > 0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 12, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 36$$

일 때 a_1의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

27. 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-a)^2}$의 극솟값이 1일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

28. 함수 $f(t)$는 모든 실수 t에서 연속이고

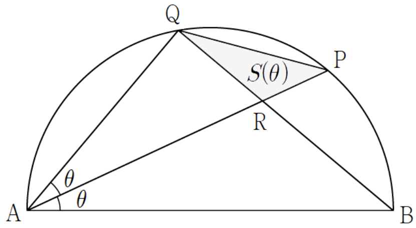
$$t^2-4t+5 \le \{f(t)\}^2 \le 2t^2-6t+6$$

이 항상 성립한다. 원점에서 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$까지의 거리의 최솟값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 C의 호 위의 두 점 P가 Q가 $\overset{\frown}{\mathrm{BP}}=\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$를 만족시킨다. 두 선분 AP와 BQ의 교점을 R, $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하여라. [4점]



30. 양의 실수 t와 함수

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 1)\\ x^2\ln x & (x>1)\end{cases}$$

에 대하여 부등식

$$mx\le f(x)+t$$

가 항상 성립하는 m의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 실수 a에 대하여 $g(a)\times e=f(e)+a$가 성립할 때, $\frac{a}{g'(a)}\times g\left(\frac{6}{e^3}\right)$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

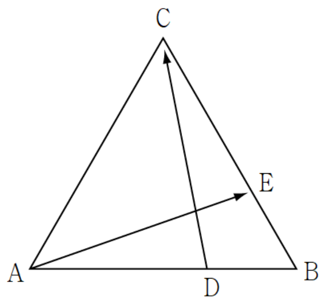
23. 타원 $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$의 장축의 길이는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

24. 좌표공간의 구 $x^2+y^2+z^2-2x-4y=9$과 z축이 만나는 두 점 사이의 거리는? [3점]

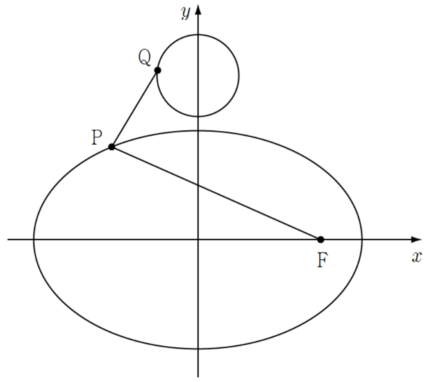
① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

25. 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 E라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2$의 값은? [3점]



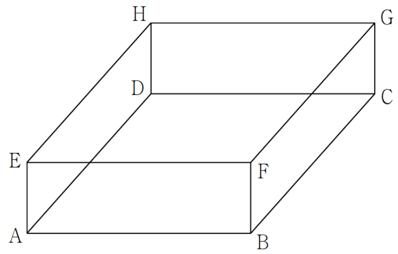
① 64 ② 60 ③ 56 ④ 52 ⑤ 48

26. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 위를 움직이는 점 P와 원 $x^2+(y-4)^2=1$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은? [3점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=8$, $\overline{AE}=2$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 선분 HF 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 AEP의 둘레의 길이의 최솟값은? [3점]



① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

28. $\overline{AB}=5$인 정사각형 ABCD가 있다. 선분 CD 위를 움직이는 점 X와 부채꼴 ABD의 호 BD 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AY}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 R이라 하자. 호 BD 위의 한 점 E와 영역 R에 속하여 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최솟값이 5일 때, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값은? [4점]

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

단답형

29. 좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a,\ 0)\,(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\,(c>a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

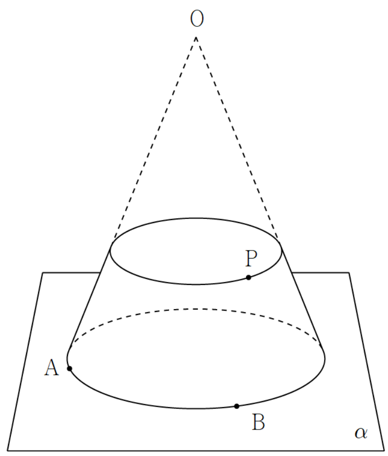
$$\overline{\mathrm{AF}}=8,\quad \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}},\quad \overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{PF}}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{10}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 정수이다.) [4점]

30. 그림과 같이 꼭짓점이 O, 평면 α 위에 놓여 있는 밑면 C의 반지름의 길이가 6인 원뿔을 α와 평행한 한 평면으로 잘라서 생기는 원뿔대가 있다. 밑면 C의 둘레 위의 두 점 A, B와 원뿔대의 C가 아닌 밑면의 둘레 위를 움직이는 점 P에 대하여 평면 ABP와 평면 α가 이루는 예각의 크기가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q, 최소가 되도록 하는 점 P를 R라 할 때, Q, R이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 Q의 평면 α에 내린 수선의 발은 선분 AB의 중점이다.
(나) 삼각형 ABR의 넓이는 $16\sqrt{10}$이다.
(다) 평면 ABR와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 45°이다.

$\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{BQ}}$의 값을 구하여라. (단, 꼭짓점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발은 밑면 C의 중심이고, $\overline{\mathrm{AB}}>8$이다.) [4점]



[나승민/한성은 모의고사 수능 연습(2/4) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	①	03	④	04	③	05	⑤
06	②	07	④	08	②	09	⑤	10	⑤
11	③	12	③	13	①	14	②	15	①
16	4	17	12	18	2	19	27	20	4
21	24	22	80						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	⑤	25	②	26	②	27	①
28	④	29	96	30	61				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	④	25	③	26	②	27	⑤
28	②	29	2	30	12				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	②	25	①	26	④	27	③
28	④	29	18	30	84				

COMMENT 10

$y=(t-4)^2$을 구간의 길이 6만큼 적분해서 최소가 되려면
구간을 $[1,\ 7]$로 잡아야 하는 각이다. 따라서 $a=3$이다.

COMMENT 11

$x_1x_2+y_1y_2=0$는 $\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-1$이므로 $\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$이다. 곡선 $y=2^x-1$를 직선 $y=x$에 대하여
대칭이동시킨 다음 x축에 대하여 대칭이동시키면 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$가 된다.

대충 $\mathrm{P}(a,\ 2^a-1)$이면 $\mathrm{Q}(2^a-1,\ -a)$이다. 직선 OP와 곡선 $y=2^x-1$가 만나는 점을 P가 유일하므로 가능.
$x_1-y_2=2a=6$에서 $a=3$이다. $x_2+y_1=2(2^a-1)=14$이다.

COMMENT 12

삼각형 ACP에서 코사인을 돌리면 $\cos(\angle\mathrm{PAC})=\dfrac{4}{5}$이다.

삼각형 ACQ에서 코사인을 돌리면 $\overline{\mathrm{AQ}}=5$이고, $\sin(\angle\mathrm{QCA})=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$이다.

삼각형 CDQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{CQ}}\times\sin(\angle\mathrm{QCD})=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$이다.

※ 점 C에서 현 PQ에 수선의 발, 점 Q에서 선분 BD에 수선의 발 내려서 풀어도 좋다.

COMMENT 13

$\alpha_1=0,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=3,\ \alpha_4=5$이다. $k=4$이고
$f(\alpha_1)=4,\ f(\alpha_2)=9,\ f(\alpha_3)=6,\ f(\alpha_4)=2$이므로 답은 25이다.

COMMENT 14

$g(0)=0,\ g'(0)=0$이고 (나)의 조건에서
함수 $g(x)$는 $x=0,\ x=4$에서 최솟값을 갖는다.
따라서 양수 k에 대하여 $g(x)=kx^2(x-4)^2$이다.

$f(x)=kx(x-4)^2$이고 $\displaystyle\int_0^4 kx(x-4)^2dx=\frac{64k}{3}$이므로 $k=\dfrac{1}{16}$이다.

$f'(x)=\dfrac{3}{16}x^2-x+1$이므로 $f'(8)=5$이다.

COMMENT 15

기역 : $a_6=4$이고 곡선 $y=\log_2 x$는 두 점 $(9,\ 3)$, $(10,\ 4)$ 사이를 지나기에 $9<b_6<10$이다.
니은 : $\log_2 a_n=n-a_n$, $\log_2 b_n=b_n-n$이고 $\log_2 a_n<\log_2 b_n$이므로 $n-a_n<b_n-n$이다.

디귿 : 두 교점의 중점의 y좌표는 $\dfrac{\log_2 a_n+\log_2 b_n}{2}=\log_2\sqrt{a_nb_n}$이다.

점 $(n,\ 0)$을 직선 $x=\dfrac{a_n+b_n}{2}$에 대하여 대칭이동시킨 점은 $(a_n+b_n-n,\ 0)$이다.

여기서 위로 그으면 $\log_2(a_n+b_n-n)$의 값이 $\log_2\sqrt{a_nb_n}$ 보다 크다.

COMMENT 21

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. $b_{2n+1}=b_{2n-1}+2d$이고 $b_{2n+2}=b_{2n}$이다. $b_{2n}=b$라 하자.

$\sum_{k=1}^{5} b_k=(b_1+b_3+b_5)+(b_2+b_4)=3b_3+2b$에서 $b_3=b$이다.

$\sum_{k=1}^{10} b_k=(b_1+b_3+b_5+b_7+b_9)+(b_2+b_4+b_6+b_8+b_{10})=5b_5+5b=50$이므로 $b_5=10-b$이다.

세 수 $b_1=2$, $b_3=b$, $b_5=10-b$가 등차수열을 이루므로 $b=4$이다. $d=1$이구요, $a_2=-2$이다.

$a_n=n-4$이므로 $a_8a_{10}=4\times6=24$이다.

COMMENT 22

$f(x)=0$이 3개의 근을 갖는 경우부터 조사하자. 작은 것부터 순서대로 α, β, γ라 하자.

함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 미분가능하지 않고, $x\le\alpha$ 또는 $\beta\le x\le\gamma$에서 $g(x)=0$이다.

함수 $g(2a-x)$의 그래프는 $g(x)$의 그래프를 $x=a$에 대하여 대칭시킨 것이다. 함수 $g(x)g(2a-x)$가 미분가능하려면

$x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 $g(2a-x)=0$이 되어야 한다. 되면 반대쪽, 함수 $g(2a-x)$가 미불일 때는 자동으로 처리된다.

나는 a가 매우 큰 수일 때부터 줄여나가면서 생각했다. 잘 생각해서 아래의 결론을 얻어보시라. 케이스를 나누어

Case1) $\beta-\alpha<\gamma-\beta$일 때, 구하는 a값들의 집합은 $\left\{a \middle| \beta\le a\le\frac{\alpha+\gamma}{2} \text{ 또는 } a\le\alpha\right\}$이다. 모양 안 맞음.

Case2) $\beta-\alpha=\gamma-\beta$일 때, 구하는 a값들의 집합은 $\left\{a \middle| a=\beta \text{ 또는 } a=\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ 또는 } a\le\alpha\right\}$이다. 모양 안 맞음.

Case3) $\beta-\alpha>\gamma-\beta$일 때, 구하는 a값들의 집합은 $\left\{a \middle| a=\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ 또는 } a\le\alpha\right\}$이다. 이거군.

$\frac{\alpha+\beta}{2}=5$, $\alpha=2$이므로 $\alpha=2$, $\beta=8$이다.

$\Rightarrow$ $f(x)=(x-2)(x-8)(x-\gamma)$에서 $8<\gamma<14$이다.

$f(x)=0$이 1개의 실근 α를 가질 때, 구하는 a값들의 집합은 $\{a|a\le\alpha\}$이다. 모양 안 맞음.

$f(x)=0$이 2개의 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 가질 때,

Case1) $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$일 때, 구하는 a값들의 집합은 $\{a|a\le\beta\}$이다. 모양 안 맞음.

Case1) $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$일 때, 구하는 a값들의 집합은 $\left\{a \middle| a=\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ 또는 } a\le\alpha\right\}$이다.

$\Rightarrow$ $f(x)=(x-2)(x-8)^2$인 경우도 가능하다. $f(x)=(x-2)(x-8)(x-\gamma)$에서 $8\le\gamma<14$라 보면 되겠군.

$f(6)=8(\gamma-6)$에서 $8\le\gamma<14$이므로 $16\le f(6)<64$이다.

COMMENT 확률과 통계 29

(전체 배열)$-$(A 이웃)$-$(B 이웃)$+$(A 이웃 $\cap$ B 이웃)

$=\frac{7!}{3!2!}-\left(\frac{4!}{2!}\times5+\frac{4!}{2!}\times5\times4\right)-\left\{\frac{6!}{3!}+(3!\times4+3!\times4\times3)\right\}$

※ $\frac{4!}{2!}\times5$는 A가 모두 이웃하는 경우의 수, $\frac{4!}{2!}\times5\times4$는 A 중 2개만 이웃하는 경우의 수이다.

COMMENT 확률과 통계 30

풀이1) 세 자연수 a, b, c가 $a+b+c=30$를 만족시키는 경우의 수는 ${}_3H_{27}=406$이다.

여기서 두 개 이상이 같은 경우의 수를 세면 40이므로 a, b, c가 서로 다른 수인 경우의 수는 366이다.

구하는 것은 세 수의 선택하는 경우의 수, 즉, a, b, c의 집합 $\{a, b, c\}$의 수이다. 이는 3!으로 나눈 61이다.

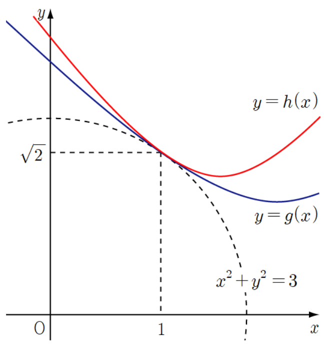
풀이2) 가장 작은 수가 1일 때, 13경우, 2일 때 11경우, 3일 때 10경우, $\cdots$로 삽질해보면,

구하는 경우의 수는 $13+11+10+8+7+5+4+2+1=61$이다.

COMMENT 미적분 28

$\sqrt{t^2-4t+5} \le f(t) \le \sqrt{2t^2-6t+6}$ 이다. $g(t)=\sqrt{t^2-4t+5}$ 와 $h(t)=\sqrt{2t^2-6t+6}$ 는

$g(1)=h(1)=\sqrt{2}$ 이고 $g'(1)=h'(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 대충 원그리면 답이 $\sqrt{3}$ 이다.



COMMENT 미적분 29

$\angle \mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{2}+\theta$ 이고 $\overline{\mathrm{AQ}}=2\cos2\theta$, $\overline{\mathrm{QR}}=2\cos2\theta\tan\theta$ 이다.

삼각형 ABR에서 사인법칙을 돌리면 $\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{2\cos2\theta}{\cos\theta}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta-\dfrac{2\cos2\theta}{\cos\theta}$ 이다.

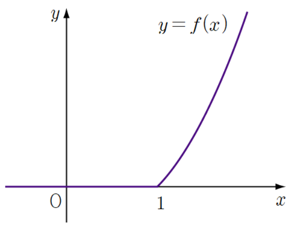
삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2\cos2\theta\tan\theta\times\left(2\cos\theta-\dfrac{2\cos2\theta}{\cos\theta}\right)\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$ 이다.

$2\cos\theta-\dfrac{2\cos2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2(\cos^2\theta-\cos2\theta)}{\cos\theta}=\dfrac{2(1-\cos2\theta-\sin^2\theta)}{\cos\theta}$ 이므로 대충 $2\theta^2$ 이다.

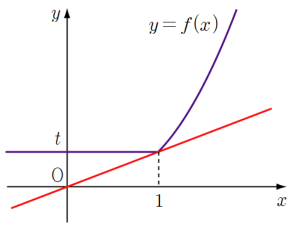
※ 풀이는 [사인법칙]과 [직각삼각형] 중 어느 쪽을 중심으로 가져가도 좋다. 의도적으로 반쯤 걸친 문항.

COMMENT 미적분 30

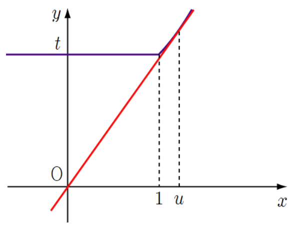
함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림1]과 같다. $x=1$에서의 우접선(?)의 기울기는 1이다.



[그림1]



[그림2]



[그림3]

$t\le1$일 때, $g(t)=t$이다. 따라서 $g\left(\dfrac{6}{e^3}\right)=\dfrac{6}{e^3}$이다. [그림2] 참고.

$t>1$일 때, $g(t)$는 직선 $y=mx$가 곡선 $y=f(x)+t$에 접할 때 얻어진다. [그림3] 참고.

접점의 x좌표를 u라 하면 $mu=u^2\ln u+t$이고 $m=2u\ln u+u$이다. 연립하면 $u^2\ln u+u^2=t$이다.

$g(a)\times e=f(e)+a$에서 직선 $y=g(a)\times x$가 곡선 $y=f(x)+a$이 $x=e$에서
서로 만나므로 $t=a$일 때 직선 $y=mx$와 곡선 $y=f(x)+t$는 $x=e$에서 서로 접한다.
따라서 $t=a$일 때 $u=e$이므로 $a=2e^2$, $g(a)=3e$이다.

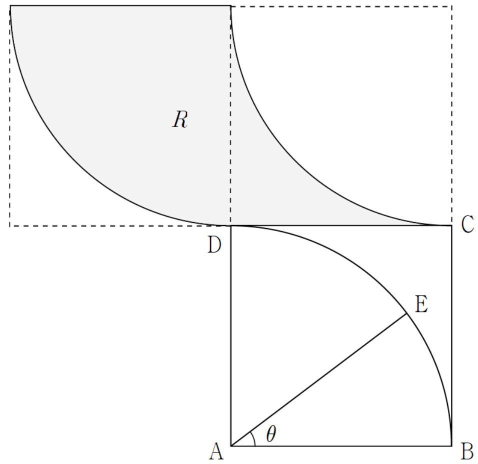
$u^2\ln u+u^2=t$를 미분하면 $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{2u\ln u+3u}$이고

$m=2u\ln u+u$를 미분하면 $\dfrac{dm}{dt}=(2\ln u+3)\times\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{u}$이다.

$t=a$일 때 $\dfrac{dm}{dt}$의 값은 $\dfrac{1}{e}$이다.

COMMENT 기하 28

잘 생각해서 그리면 다음 그림과 같다.



$A(0,\ 0)$ $B(5,\ 0)$, $E(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)$라 하면 최솟값은 $50\sin\theta-25$이다.

이 값이 5이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$이다. 최댓값은 $(5,\ 5)\cdot(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)=35$이다.

COMMENT 기하 29

$c=a+8$, 점 P의 x좌표는 $a+4$이다.

포물선의 정의에서 $\overline{PA}=2a+4$이다. $\overline{PF}=2a+4$, $\overline{PF'}=4a+8$이다.

점 P에서 x축에 수선의 발을 내리고 삼각형 2개에서 피타고라스 돌려보면

$$(4a+8)^2-(2a+12)^2=(2a+4)^2-4^2$$

이다. 풀면 $a=\sqrt{10}$, 장축의 길이는 $6a+12=12+6\sqrt{10}$이다.

COMMENT 기하 30

(가)에서 C가 아닌 밑면의 둘레의 평면 α 위로의 정사영과 직선 AB가 서로 접한다.

C가 아닌 밑면의 반지름의 길이를 r이라 하자. (다)에서 원뿔대의 높이는 $2r$이다.

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{6^2-r^2}\times2\sqrt{2}r$이므로 $r=4$이다. $\overline{AQ}=\overline{BQ}=\sqrt{84}$이다.